Pubblicazione bimensile. *Roma 2 gennaio 1910.* N. 1.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 1°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei · qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XIX.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Astronomia. — *Nuove posizioni della cometa di Halley e qualche notizia sulla posizione della cometa rapporto alla Terra.* Nota del Socio E. Millosevich.

Facendo seguito alla mia Nota presentata all'Accademia il 5 dicembre, aggiungo le posizioni seguenti della cometa di Halley fatte nel mese di dicembre all'equatoriale di 38 cm. dell'Osservatorio.

1909 Dicembre 14	$9^h51^m\ 0^s$	R. C. R.	Osservatore Zappa
α apparente cometa	3 30 26.88	(8^n.190)	
δ " "	+ 14°21′ 33″.5	(0. 606)	
1909 Dicembre 21	$8^h38^m44^s$	R. C. R.	" Bianchi
α apparente cometa	3 0 7.27	(8^n.642)	
δ " "	+ 13°16′ 44″.5	(0. 622)	
1909 Dicembre 31	$6^h47^m52^s$	R. C. R.	" Millosevich
α apparente cometa	2 20 51.70	(9^n.025)	
δ " "	+ 11°39′ 42″.5	(0. 648)	
1909 Dicembre 31	$7^h11^m22^s$	R. C. R.	" Zappa
α apparente cometa	2 20 48.33	(8^n.784)	
δ " "	+ 11°39′ 29″.4	(0. 645)	

Per il periodo utilizzabile in osservazioni della cometa dopo il passaggio al perielio, do qui i tempi del levare e tramontare dell'astro per Roma in t. m. dell'E. C. I calcoli sono approssimati.

1910		Levare	Tramontare
Maggio	2	2^h58^m m	3^h56^m s
»	6	2 47	3 52
»	10	2 43 m	4 1 s
»	11	2 46 m	4 8 s
»	12	2 49	4 16
»	13	2 51	4 26
»	14	2 56	4 43
»	15	3 6	5 4
»	16	3 20 m	5 32 s
»	17	—	—
»	18	—	—
»	19	—	—
»	20	—	—
»	21	7 9 m	9 52 s
»	22	8 9	10 28
»	23	9 2	10 53
»	24	9 41	11 9
»	25	10 8	11 18
»	26	10 29	11 25
»	27	10 44	11 31
»	28	10 57	11 33
»	29	11 5	11 35
»	30	11 11 m	11 36 s

L'astro, osservabile coi cannocchiali a ponente la sera fino ai primi di marzo, potrà essere veduto probabilmente ad occhio nudo a levante al mattino dal 2 al 16 maggio, poi a ponente la sera dal 21 maggio in seguito. In quest'ultima fase la cometa dovrebbe apparire quale astro splendido fino ai primi di giugno e forse anche dopo, per poi ridivenire astro telescopico.

Il passaggio al perielio, che io calcolai per la data aprile 19. 2 Gr. ± 0.5 fino dai saggi primi fotografici di settembre ottenuti ad Heidilberga, resta fissato ora dagli astronomi Cowell e Crommelin alla data aprile 19. 65 Gr. Probabilmente detta data è sicura entro mezz'ora. La distanza perigea ha luogo il 19 maggio nel valore 0.154, cioè circa 23 milioni di chilometri dalla terra; detta distanza è circa nodale, d'onde un passaggio della cometa sul disco del sole verso le 3^h am. M. E. C. del 19 maggio. La direzione della coda sarà dalla parte della terra, ma non sono lecite congetture ulteriori, nulla noi sapendo sulla lunghezza, sulla figura, sulla dimensione e sulla natura della coda della cometa in questo passaggio al perielio; e pur potendo congetturare per analogia con altre comete, parrebbe sempre più saggio il silenzio, risparmiandoci in tal modo le possibili smentite.

Geologia. — *Il profilo geologico del Sempione. I. La Val Devero.* Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

Biologia — *Osservazioni intorno al fenomeno della rudimentazione.* Nota del Socio B. GRASSI.

Fisica matematica. — *Il moto di un elettrone nel campo magnetico.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

Matematica. — *Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Meccanica. — *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su gli zeri del limite di una successione di funzioni analitiche.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Sia

$$f_1(x)\,,\, f_2(x)\,,\, \ldots\,,\, f_n(x)\,,\, \ldots \tag{1}$$

una successione di funzioni analitiche, monodrome e regolari in tutti i punti *interni* [1] ad un campo C, la quale converga, nei punti detti, ad una funzione $F(x)$, anch'essa analitica, monodroma, regolare.

Ciò posto, ci domandiamo: che relazione esiste tra gli zeri delle funzioni (1) e quelli di $F(x)$?

2. Supponiamo, dapprima, che, nell'insieme dei punti interni a C, le funzioni (1) siano tutte, in modulo, ugualmente limitate; vale a dire, che esista un numero positivo M tale che, per tutti punti interni a C, sia

$$|f_n(x)| < M \qquad (n = 1\,,2\,,3\,,\ldots)\,. \tag{2}$$

[1] Un punto si dirà *interno* ad un campo C se potrà essere il centro di un cerchio tutto appartenente a C.

Quest' ipotesi è certamente soddisfatta se, nell' insieme dei punti interni a C, la (1) converge uniformemente alla $F(x)$, e questa è limitata. Può, però, mancare la convergenza uniforme ed essere soddisfatta la (2), anche nel caso di un campo C semplicissimo (circolare, per es.).

Osservato ciò, consideriamo un punto $\overline{x}$ *interno* a C. Esiste un numero positivo R tale che il cerchio $(\overline{x}, R)$ [1] sia costituito tutto di punti interni a C. In tutto questo cerchio, contorno compreso, è verificata la (2), e quindi, come è ben noto [2], in ogni cerchio $(\overline{x}, r)$ $(0 < r < R)$ — circonferenza compresa — la (1) converge in modo uniforme alla funzione $F(x)$.

Inoltre, poichè in $(\overline{x}, R)$ la $F(x)$, come funzione analitica regolare, non può avere che un numero finito di zeri, in *e* su $(\overline{x}, r)$, per r abbastanza piccolo, non esisteranno zeri di $F(x)$ distinti da $\overline{x}$; e potrà determinarsi un numero positivo m in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$|F(x)| > m$$

per ogni x della circonferenza C_r di $(\overline{x}, r)$. Da ciò, e dalla convergenza uniforme di (1) su C_r, si ha, preso un $\varepsilon < \frac{m}{2}$ e piccolo a piacere, per ogni n maggiore di un certo $\overline{n}$,

$$|F(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad , \quad |f_n(x)| > \frac{m}{2}$$

su tutto C_r. Segue, poi, dalla convergenza uniforme di (1) in ogni cerchio interno a $(\overline{x}, R)$, la convergenza uniforme di

$$f'_1(x)\,,\, f'_2(x)\,,\, \dots\,,\, f'_n(x)\,,\, \dots$$

alla $F'(x)$, e quindi la disuguaglianza

$$|F'(x) - f'_n(x)| < \varepsilon$$

per ogni n maggiore di un certo $\overline{\overline{n}}$ e per ogni x di C_r. Dalle disuguaglianze precedenti si deduce, per ogni $n > \begin{cases} \overline{n} \\ \overline{\overline{n}} \end{cases}$ e per ogni x di C_r,

$$\left| \frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \right| < \frac{|F'(x)\,F(x) - f'_n(x)\,F(x)| + \varepsilon |F'(x)|}{|F(x)\, f_n(x)|} < 2\varepsilon \left(\frac{1}{m} + \frac{M'}{m^2} \right),$$

dove M' indica un numero positivo maggiore del massimo modulo di $F'(x)$ su C_r. Poichè ε è piccolo a piacere, la disuguaglianza precedente porta la convergenza uniforme di $\frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$ a $\frac{F'(x)}{F(x)}$ su tutto C_r, e quindi l'uguaglianza

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'_n(x)}{f_n(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{F'(x)}{F(x)}\, dx. \tag{3}$$

[1] Vale a dire, di centro $\overline{x}$ e raggio R.

[2] Osgood, *Note on the functions* ecc., Annals of Mathematics, second series, vol. III, n. 1.

Indichiamo, ora, con E l'insieme degli zeri delle funzioni (1), e supponiamo che $\overline{x}$ *non sia* un punto limite di E. Ponendo r soddisfacente alle condizioni dette ed all'altra che in e su $(\overline{x}, r)$ non esistano punti di E, avremo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e quindi, per la (3),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx = 0.$$

Risulta dunque che $\overline{x}$, non essendo punto limite di E, non può essere uno zero di $F(x)$.

Sia, invece, $\overline{x}$ punto limite di E. Per infiniti valori di n è, allora,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,dx \geq 1,$$

e quindi, per la (3),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx \geq 1.$$

Se ne deduce che $\overline{x}$ è uno zero di $F(x)$. Ma si può dire di più. Poichè

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx,$$

per ogni $n > \overline{n}$, sono numeri interi positivi, l'uguaglianza (3) porta l'altra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{F'(x)}{F(x)}\,dx$$

per ogni n maggiore di un certo N. Dunque, per ogni $n > N$, tutte le $f_n(x)$ hanno dentro C_r un numero di zeri uguale all'ordine dello zero $\overline{x}$ di $F(x)$; e, poichè r può farsi piccolo a piacere, possiamo dire che l'ordine dello zero $\overline{x}$ di $F(x)$ è dato dal numero delle radici di $f_n(x)$ che, al tendere di n all'infinito, tendono ad $\overline{x}$.

3. Si può notare che, in quanto si è detto al numero precedente, non si è sfruttata appieno l'ipotesi (2). Per le nostre conclusioni basta fare la ipotesi che per ciascun punto $\overline{x}$, interno a C, si possano determinare due numeri positivi $M_{\overline{x}}$, $R_{\overline{x}}$, tali che si abbia, per tutti gli x di $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$,

$$(4) \qquad |f_n(x)| < M_{\overline{x}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si può, poi, aggiungere che i risultati ottenuti continuano a sussistere anche se quest'ultima ipotesi non è verificata in punti interni a C *isolati*, ossia in un insieme J di punti interni a C, tale che nessuno dei suoi punti limiti sia interno a C medesimo. Detto, infatti, $\overline{\overline{x}}$ un punto di J, sia $(\overline{\overline{x}}, R)$ un cerchio tutto costituito di punti interni a C, e tale che non contenga,

nè internamente, nè sul contorno, altri punti di J distinti da $\overline{\overline{x}}$. Se, allora, r_1 è un numero positivo minore di R, nessuno dei punti della corona circolare $(\overline{\overline{x}}, r_1, R)$ appartiene ad J. In tutta questa corona, contorno compreso, è, perciò, verificata la (4); e, poichè trattasi di un insieme chiuso, per un noto teorema di Borel, con un numero finito di cerchi $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$ si ricopre tutta la corona. E, se si indica con M il massimo dei numeri $M_{\overline{x}}$ corrispondenti ai cerchi $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$ adoperati, si ha

$$|f_n(x)| < M \qquad (n = 1, 2, ...);$$

in ogni punto della corona detta; se ne deduce che, internamente ad essa, la (1) e la $f_1'(x), f_2'(x), ..., f_n'(x), ...$, convergono in modo uniforme rispettivamente a $F(x)$ e $F'(x)$. Si può, quindi, stabilire la formola (3) con tutte le sue conseguenze.

Concludendo, possiamo enunciare la seguente proposizione:

Alle ipotesi del n. 1 si aggiunga l'altra che, ad eccezione al più di un insieme J *di punti isolati, per ogni punto* $\overline{x}$ *interno a* C *si possano determinare due numeri positivi*, $M_{\overline{x}}, R_{\overline{x}}$, *tali che si abbia, per tutti gli* x *di* $(\overline{x}, R_{\overline{x}})$

$$|f_n(x)| < M_{\overline{x}} \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Allora, affinchè un punto X, *interno a* C, *sia uno zero di* $F(x)$, *è necessario e sufficiente che* X *sia un punto limite dell'insieme degli zeri della funzione* (1). *Inoltre, l'ordine dello zero* X *di* $F(x)$ *è dato dal numero delle radici di* $f_n(x)$, *che, al tendere di* n *all'infinito, tendono ad* X.

4. Se non facciamo nessuna ipotesi sul modo con cui le funzioni (1) convergono alla $F(x)$, che cosa possiamo rispondere alla domanda che ci siamo fatta al n. 1? La risposta, nel caso generale, sembra che non si possa dare. Possiamo, però, affermare qualcosa di concreto limitandoci a considerare classi speciali di funzioni $f_n(x)$. Supponiamo, dapprima che le $f_n(x)$ siano funzioni razionali intere a radici tutte reali: poniamo

$$f_n(x) = C_n(x - \alpha_{n1})(x - \alpha_{n2}) ... (x - \alpha_{nm_n}).$$

Vogliamo dimostrare che se $\overline{x}$ — interno a C — *non è* punto limite di E, non può essere uno zero di $F(x)$.

Supponiamo, in primo luogo, che sia $F(\overline{x}) = 0$ e $\overline{x} = \overline{u} + i\overline{v}$ con $\overline{v} \neq 0$. Per la convergenza della (1), preso un ε piccolo a piacere, potremo determinare un $\overline{n}$ tale che, per ogui $n > \overline{n}$ sia

$$|f_n(\overline{x})| < \varepsilon.$$

Ponendo $x = u + iv$, abbiamo

$$|f_n(x)| = |C_n| \sqrt{\{(u - \alpha_{n1})^2 + v^2\} \cdots \{(u - \alpha_{nm_n})^2 + v^2\}},$$

e quindi, per ogni $x' = \bar{u} + iv$, con $|v| < |\bar{v}|$

$$|f_n(x')| < |f_n(\bar{x})| < \varepsilon \qquad (n = \bar{n} + 1, \bar{n} + 2, \ldots). \tag{5}$$

Siccome $\bar{x}$ è interno a C, esisterà un segmento, avente per estremi $\bar{x}$ e $\bar{x}' = \bar{u} + i\bar{v}'$, con $|\bar{v}'| < |\bar{v}|$, tutto interno a C. Per ogni x' di tal segmento sarà verificata la (5) e si avrà, per la convergenza di (1),

$$|F(x')| < \varepsilon.$$

Poichè ε è piccolo a piacere, si avrà in tutto il segmento detto

$$F(x') = 0,$$

il che è assurdo.

Supponiamo, ora, che sia $F(\bar{x}) = 0$, con $\bar{x}$ reale. Preso ε piccolo a piacere, potremo anche qui determinare un $\bar{n}$ a partire dal quale sia

$$|f_n(\bar{x})| < \varepsilon. \tag{6}$$

Siccome, poi, $\bar{x}$ non è punto limite di E, potremo determinare un intervallo (a, b) contenente nel suo *interno* il punto $\bar{x}$ e tale che in esso cadano punti di E, solo in numero finito. Prendendo, allora, un N abbastanza grande, potremo far sì che, per ogni $n > N$, $f_n(x)$ verifichi la (6) e non si annulli mai in (a, b), estremi compresi.

Il modulo di $f_n(x)$ $(n > N)$ avrà, perciò, in (a, b), al più un sol punto di massimo; e, quindi, in uno almeno dei due intervalli $(\bar{x}, a)$, $(\bar{x}, b)$, $|f_n(x)|$, $(n > N)$ sarà sempre decrescente. Segue che in uno almeno dei due intervalli detti $|f_n(x)|$ sarà, per infiniti valori di $n > N$, sempre decrescente, vale a dire, per la (6), sempre minore di ε. In tutto quest'intervallo sarà, allora, $|F(x)| < \varepsilon$ ed anche $F(x) = 0$: cosa assurda.

È dunque completamente dimostrato il nostro asserto.

Una facile generalizzazione del ragionamento precedente prova che

se le (1) *sono funzioni intere di genere zero, aventi tutte le radici disposte su una medesima retta, condizione necessaria affinchè un punto $\bar{x}$, interno a* C, *sia uno zero di* $F(x)$, *è che $\bar{x}$ sia punto limite dell'insieme degli zeri delle $f_n(x)$.*

La condizione trovata, oltre che necessaria, è anche sufficiente? Non pare.

5. Siano, ancora, le $f_n(x)$ funzioni razionali intere. Se tutti gli zeri delle $f_n(x)$ sono, rispetto ad una retta del piano complesso, tutti da una medesima parte (possono anche essere sulla retta stessa), allora il modulo di $f_n(x)$ va diminuendo quando da un punto del semipiano che non contiene zeri di $f_n(x)$ si va a cadere perpendicolarmente sulla retta considerata. Ripetendo un ragionamento fatto al n. 4 si può, perciò, concludere che nel semipiano a cui non appartengono gli zeri delle $f_n(x)$ non possono esistere

zeri di $F(x)$, interni a C. La conclusione rimane ancora esatta se ad uno stesso semipiano appartengono tutti gli zeri delle $f_n(x)$, ad eccezione di un numero finito di essi; ed anche se solamente i punti limiti di questi zeri appartengano ad uno stesso semipiano, purchè tra i punti limiti non sia ∞. Possiamo, perciò, dire che

se si può costruire un poligono convesso (od una curva chiusa convessa) tale che nel suo interno e sul suo contorno siano contenuti tutti i punti limiti degli zeri delle funzioni razionali intere $f_n(x)$, allora esternamente al poligono detto non possono esistere zeri di $F(x)$, interni a C. Ed anche *se tutti i punti limiti (fra i quali non è $x=\infty$) degli zeri delle $f_n(x)$ sono su una medesima retta, non possono, fuori della retta, esistere zeri di $F(x)$ interni a C.*

Questa proposizione resta vera anche se $x=\infty$ figura tra i punti limiti, purchè la distanza degli zeri delle $f_n(x)$ dalla retta considerata tenda a zero al crescere del modulo degli zeri stessi.

Meccanica. — *Sopra le correnti liquide spontanee.* Nota di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Il moto di un liquido, in assenza di forze di massa, avvenga per piani paralleli, col medesimo comportamento su ciascuno di essi in modo da corrispondersi i punti di una medesima retta perpendicolare.

Se si assume un piano qualunque del fascio per piano $z=0$ di un sistema di riferimento, cartesiano ortogonale $(0; x, y, z)$, l'aspetto cinematico del fenomeno risulta indipendente dalla coordinata z.

Se si suppone poi che il fenomeno abbia carattere permanente, *tutto sarà indipendente oltre che da z anche dal tempo t.*

Assumiamo eguale ad 1, per maggior comodità, la densità (costante) del liquido, e chiamiamo p la pressione specifica. Se si indicano al solito con u e v le componenti della velocità, e si pone

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\quad,\quad v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\,, \tag{1}$$

dove $\Psi(x,y)$ designa un integrale della equazione

$$\Delta_2\Psi=f(\Psi)\,, \tag{2}$$

con f funzione arbitraria di Ψ, è noto che le (1) rendono soddisfatte tutte le equazioni indefinite [1].

[1] Cfr. ad es. Lamb., *Lehrbuch der Hydrodynamik* (trad. tedesca), Leipzig und Berlin, Teubner, 1907, pag. 285.

In quanto alla pressione p, essa a norma delle equazioni di Eulero e per le (1), è definita dalla relazione differenziale

$$dp = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right)dy,$$

oppure per le (2), qualora si ponga

$$f(\psi) = \mathrm{F}'(\Psi)\,, \tag{3}$$

e

$$\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2,$$

dalla

$$dp = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{F} - \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2\right\}dx + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathrm{F} - \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2\right\}dy,$$

dalla quale integrando si ha infine

$$p = \mathrm{F} - \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)^2, \tag{4}$$

includendo la costante di integrazione nella funzione arbitraria $\mathrm{F}(\Psi)$ [1].

Il moto liquido avvenga nel piano $z = 0$ tra due linee *libere* λ e μ: sieno esse indefinitamente estese (fig. 1), oppure rientranti in sè stesse (fig. 2); e del resto abbiano forma qualsiasi.

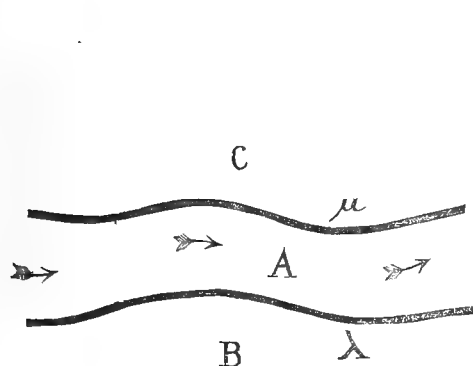
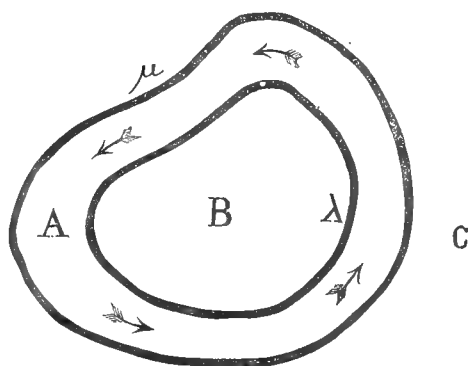



Fig. 1. Fig. 2.

In entrambi i casi le linee libere λ e μ dividono il piano in tre parti A, B, C. In A avvenga il moto permanente (corrente) e in B e C regni la quiete.

Essendo in riposo il liquido in B e C, dacchè non agiscono forze di massa, la pressione è ivi da ritenersi costante.

[1] Cfr. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge: University Press, 1880, pag. 14-15.

Indicando con p_B e p_C i rispettivi valori costanti di p in B e in C avremo

$$(5) \qquad \begin{cases} p = p_B & \text{in B}, \\ p = p_C & \text{in C}. \end{cases}$$

In A, dove ha luogo il movimento, la $\Psi(xy)$ (funzione di *corrente*) deve soddisfare alla (2); di più sopra λ e μ, trattandosi di linee di flusso, la Ψ deve assumere valori costanti, com'è ben noto.

Fissiamo, in particolare il valore zero della costante su λ, ed il valore costante q sopra μ, si dovrà avere

$$(6) \qquad \begin{cases} \Psi = 0 & \text{sopra } \lambda, \\ \Psi = q & \text{sopra } \mu; \end{cases}$$

q in tal guisa rappresenta la *portata* della corrente.

In quanto al comportamento della pressione p al contorno del campo A, manifestamente devono essere soddisfatte le relazioni seguenti:

$$(7) \qquad \begin{cases} p = p_B & \text{sopra } \lambda, \\ p = p_C & \text{sopra } \mu, \end{cases}$$

ossia, per le (4) e (3), la $\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2$ deve assumere valori costanti sopra λ e μ.

Le (6) e (7) esauriscono tutte le condizioni ai limiti.

Riassumendo *il problema è ricondotto alla determinazione di una funzione regolare* $\Psi(x, y)$ *che soddisfaccia in* A *alla* (2), *sul contorno* $\lambda + \mu$ *alle* (6), *e tale di più che la* $\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2$ *assuma valori costanti sopra* λ *e* μ.

Se le linee libere λ e μ fossero preventivamente assegnate riescirebbe, in generale, impossibile trovare una tale funzione Ψ per esuberanza di condizioni ai limiti.

Per convincersene basta pensare al caso di una corrente irrotazionale; in tal caso la (2) si riduce alla $\underset{2}{\Delta}\Psi = 0$.

Ora le (6)a ssegnano i valori che la Ψ deve assumere sul contorno del campo A, tali condizioni assieme alla $\underset{2}{\Delta}\Psi = 0$ individuano (a meno di una costante additiva), com'è ben noto, una funzione regolare Ψ; ma non c'è nessuna ragione da ritenere che la Ψ così determinata debba soddisfare all'altra condizione relativa al $\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)^2$.

Ne segue che l'esistenza di una funzione Ψ, integrale della (2) e soddisfacente a tutte le condizioni ai limiti, è subordinata ad una scelta conveniente delle linee libere λ e μ.

Si potrà sempre determinare due linee libere λ e μ in modo da rendere possibile la esistenza di una Ψ soddisfacente a tutte le condizioni su esposte? Di tale questione intendo di occuparmi prossimamente.

Per ora mi limiterò a mostrare, per dare un esempio di effettiva esistenza di soluzioni, che la risposta è affermativa nel caso in cui le due linee λ e μ sono circonferenze concentriche e il campo A è la corona circolare da esse definita.

2. Sia $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ la distanza di un generico punto (x, y) del piano dall'origine delle coordinate. Immaginiamo che le linee λ e μ coincidano rispettivamente colle circonferenze $r = a$, $r = b$, essendo $a < b$ e di più che la Ψ dipenda dalla sola r. Allora le linee di corrente sono circonferenze concentriche alle estreme, ed il valore assoluto della velocità è $\left|\left(\underset{1}{\Delta}\Psi\right)\right| \left|\frac{d\psi}{dr}\right|$.

In tale ipotesi è

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \Psi' \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \Psi' \frac{y}{r}, \tag{8}$$

avendo indicato con un apice la derivazione rispetto ad r. Le (8) rendono identicamente soddisfatta la (2) qualunque sia la $\Psi(r)$. Inoltre, essendo la Ψ costante assieme ad r, si può dire che su ciascuna delle linee λ e μ, Ψ ha valore costante e diverso dall'una all'altra. Infine $\left(\underset{1}{\Delta}\psi\right)^2 = \overline{\Psi'}^2$, risultando funzione di r, è costante assieme a questa e quindi è costante tanto su λ quanto sopra μ. Si può concludere che *una qualsiasi* $\Psi(r)$ *soddisfa a tutte le condizioni di cui al n. precedente.*

La (4), per le (8), ci dà la pressione in ogni punto di A. Il problema così è completamente risoluto, ed il grado di arbitrarietà è rappresentato dalla funzione $\Psi(r)$.

Per trattare un caso concreto, immaginiamo ad es. che il moto della corrente sia irrotazionale.

In tal caso dovendo essere la $\Psi(r)$ armonica in A, si avrà

$$\underset{2}{\Delta}\Psi = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi}{dr}\right) = 0,$$

da cui, integrando, si ricava

$$\Psi = \log\left[C_1 r C_2\right], \tag{9}$$

con C_1 e C_2 costanti arbitrarie. Tali costanti si possono valutare in modo che Ψ soddisfaccia alle (6), per il che basta manifestamente prendere

$$C_1 = a^{-C_2} \quad , \quad q = \log\left[C_1 b C_2\right];$$

queste relazioni determinano C_1 e C_2, e precisamente dànno

$$C_2 = \frac{q}{\log \frac{b}{a}} \quad , \quad C_1 = a^{-\frac{q}{\log \frac{b}{a}}} . \tag{10}$$

Dalla (9), derivando e tenendo conto di queste, si ha, chiamando V il valore assoluto della velocità,

$$V = \Psi' = \frac{q}{\log \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{r} .$$

Per questa dalla (4), notando che F è in tal caso costante, si ricava per la pressione

$$p = \text{costante} - \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \frac{1}{r^2} . \tag{11}$$

E per le (5), notando che tra le pressioni p_B e p_C deve passare la relazione

$$p_B - p_C = \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\} ,$$

si ricavano per la costante le espressioni seguenti

$$p_B + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2 a^2} = p_C + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2 b^2} ,$$

per cui la pressione in A viene definita a norma della (11) dalla espressione seguente

$$p = p_B + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right\} , \tag{11'}$$

oppure dalla

$$p = p_C + \frac{q^2}{2\left[\log \frac{b}{a}\right]^2} \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \right\} . \tag{11''}$$

Con ciò il problema è completamente determinato.

Fisica. — *Ricerche sullo spettro e sulla temperatura della fotosfera solare.* Nota preliminare del prof. ALESSANDRO AMERIO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. La determinazione della temperatura del sole è stata fatta tenendo conto, quasi esclusivamente, dell'energia irradiata e applicando le formule che si riteneva rappresentassero la relazione tra la temperatura e l'emissione.

È quindi naturale che si ottenessero risultati enormemente disparati, secondo che si applicava la legge di Newton (Secchi) o quella di Dulong e Petit (Pouillet).

Scoperta e dimostrata la legge di Stefan-Boltzmann, per quanto questa valga solo pel corpo assolutamente nero, la si applicò alla radiazione solare quale deve giungere al limite dell'atmosfera terrestre, non tenendo conto, dapprima che essa non può essere quella del corpo nero che abbia la temperatura del sole, per via dell'assorbimento dell'atmosfera solare che cresce dal centro all'orlo del disco. Di questo fu tenuto conto in seguito da Wilson e Gray e da Millochau misurando la radiazione totale di diversi punti del disco solare scelti lungo un diametro. Si ottenne così l'emissione della fotosfera e si applicò la legge di Stefan supponendo che la fotosfera fosse un corpo nero.

Ora, in una Nota teorica recente [1], senza fare alcuna nuova ipotesi sulla costituzione del sole, ho dimostrato che la fotosfera irradia come un corpo assolutamente nero o almeno approssimatamente tale, secondo i casi.

Questa conclusione che conferisce maggior valore ai risultati delle due ultime ricerche citate, permette di procedere nello studio della temperatura della fotosfera solare su basi più sicure, perchè qualora si riesca a determinarne lo spettro, si potranno applicare le varie leggi del corpo nero. I risultati avranno la stessa probabilità delle ipotesi note sulla costituzione della fotosfera.

2. Su questo principio ho fondato il seguente metodo di ricerca:

Si produca un'imagine reale del sole nel piano della fenditura di uno spettrobolometro catottrico; si disponga il bolometro su una determinata regione dello spettro e si faccia scorrere l'imagine del sole sulla fenditura, leggendo le deviazioni al galvanometro e notando la regione che le produce.

Si avrà così per una data lunghezza d'onda la distribuzione dell'energia sul disco solare.

Si faccia lo stesso per buon numero di altre lunghezze d'onda.

[1] *Sulla emissione della fotosfera solare,* Rend. Lincei, serie V, vol. XVIII, 2° sem. 1909, pag. 202.

Si potranno allora costruire gli spettri per un certo numero di punti determinati del disco solare, e, tenendo conto della loro posizione, calcolare i valori dell'assorbimento esercitato dall'atmosfera solare e dedurre lo spettro della fotosfera per il luogo ove si sono fatte le osservazioni.

Se di queste serie di osservazioni se ne fanno a varie altezze, si potrà allora eliminare anche l'influenza dell'assorbimento dell'atmosfera terrestre ed avere così lo spettro della fotosfera, quale si otterrebbe qualora non esistessero le due atmosfere, e ad esso applicare le leggi del corpo nero.

3. La disposizione adottata è la seguente:

Su un eliostata di Fuess trovasi uno specchio piano di argento di centimetri 15 × 12, che riflette orizzontalmente la luce del sole. Due specchi concavi, uno di m. 1,20 di distanza focale e avente 10 cm. di apertura, l'altro di 15 cm. di distanza focale e 3 di apertura, dànno una immagine reale del disco solare del diametro di cm. 10 sopra uno schermo annerito.

Nel mezzo di questo è praticata una finestra rettangolare e subito dietro a questa c'è la fenditura di uno spettrobolometro catottrico.

Tutti gli specchi sono d'argento e il prisma è di sale.

Per regolare la posizione dell'imagine del disco solare sullo schermo, serve un sistema di viti micrometriche che orientano lo specchietto minore in senso verticale e in senso orizzontale.

Sullo schermo sono tracciati nove cerchi eguali con 10 cm. di diametro, di cui uno ha il centro nel centro della fenditura, gli altri sono due a due simmetrici rispetto alla fenditura e coi centri alle distanze di cm. 5 sen 30°; 5 sen 45°; 5 sen 60°; 5 sen 75°: di modo che facendo cadere l'imagine del sole in uno di essi, la fenditura viene colpita da raggi che provengono da punti del disco solare situati rispettivamente a 0° dal centro, 30°, 45°, 60°, 75°, e ciò tanto a destra quanto a sinistra.

La lunghezza dell'onda che colpisce il bolometro è facilmente determinabile procedendo come ho descritto in altra Nota [1].

Il galvanometro adoprato è di Dubois e Rubens, corazzato; la corrente è data da una batteria di pile Daniell per le misure fatte al M. Rosa, di accumulatori per quelle fatte in laboratorio.

Ogni determinazione completa per ciascuna lunghezza d'onda consta di 20 misure fatte nell'ordine seguente delle posizioni del disco:

0°, 30°, ... 75°, 75°, 60° ... 0° a sinistra;
0°, 30° . . . . 0° a destra,

senza alcuna interruzione e ad intervalli di tempo eguali.

[1] *L'emissione del carbone in alcune fiamme,* Atti Acc. Torino, 1905; Acc. Peloritana, 1908.

Quest'ordine permette di eliminare varie cause d'errore. Anzitutto quelle dipendenti da variazioni sistematiche delle condizioni le quali avvengano sempre in un senso.

Tra queste noto il diverso spessore atmosferico attraversato nelle diverse ore; la variazione dell'angolo d'incidenza sullo specchio dell'eliostata e con essa il potere riflettente dell'argento e l'altezza del fascio che investe il primo specchio concavo.

Poichè infatti ogni esperienza completa dura una diecina di minuti, si può ammettere che in un tempo così breve le variazioni dovute a queste cause d'errore siano proporzionali ai tempi, e avvengano sempre nello stesso senso, purchè il mezzogiorno vero non si verifichi durante l'esperienza.

È facile verificare allora che la media aritmetica dei quattro valori così ottenuti per ogni punto dello spettro, corrisponde alla deviazione che si otterrebbe facendo le misure nell'istante di mezzo della determinazione.

L'altra causa d'errore che viene eliminata è dovuta alla eccentricità della fenditura rispetto al cerchio centrale; essa è trascurabile finchè si esamini la radiazione proveniente dal centro o da 30°, ma è grande per le posizioni corrispondenti a 60° e 75°. L'eliminazione si ottiene con le osservazioni simmetriche.

Le cause accidentali non possono essere eliminate se non facendo un grande numero di osservazioni e soprattutto facendo quelle a grandi altezze.

Solo alle grandi altezze si possono infatti eliminare, quasi completamente, le cause invisibili delle irregolarità così frequenti e grandi che si riscontrano, in questo genere di ricerche, quando si fanno a piccole altezze.

La ragione è che la maggior parte di esse è dovuta a vapor acqueo che mentre non offusca sensibilmente lo splendore del sole, sottrae in quantità alcune radiazioni ultrarosse. Di queste masse di vapor acqueo devono vagarne nell'atmosfera, trasportate dal vento, e variabili come e più di questo, nè si può nulla congetturare sulla loro distribuzione.

La loro presenza mi si svelò talvolta in modo caratteristico facendo delle misure sulle radiazioni assorbite dal vapore acqueo. Mentre l'occhio non avvertiva la minima variazione di luce nell'imagine del disco solare (e il passaggio di veli anche leggeri è visibilissimo perchè col disco solare si proietta pure l'imagine delle nubi), la deviazione del galvanometro diminuiva rapidamente, indicando un raffreddamento del bolometro. Io ero quasi sicuro che questo raffreddamento precedeva il passaggio di una nube sul disco solare.

È abbastanza plausibile che intorno alla nube esistano strati d'aria via via meno ricchi di vapore, e sono essi che ponendosi davanti al disco solare ne intercettano parte del calore, preavvisando così le nubi.

Nelle stazioni scelte per le osservazioni a grandi altezze, cioè l'Istituto internazionale Angelo Mosso (2980 m.) al Col d'Olen, e l'Osservatorio Regina

Margherita, sulla punta Gnifetti (4560 m.), questa causa d'errore è assai ridotta. L'umidità è così piccola, che l'azione degli essiccanti è quasi inutile nella prima stazione, e superflua nella seconda, tanto che in questa dopo sedici giorni il cloruro di calcio, che tenevo entro bicchieri intorno al prisma di sale, era perfettamente secco.

Altre cause d'errore importanti sono l'anidride carbonica e il pulviscolo atmosferico.

La prima è notevolmente ridotta alle grandi altezze; il secondo è completamente eliminato.

Nella disposizione bolometrica furono prese speciali precauzioni per evitare le perturbazioni di temperatura esterne. Così le cassette di resistenza e i contatti furono ben riparati con cassette di legno ermeticamente chiuse; i fili di connessione del ponte grossi, ben ricoperti e difesi per di più da tubi di gomma; l'apertura del bolometro chiusa con una lamina sottile di fluorina.

Queste precauzioni erano indispensabili all'Osservatorio Regina Margherita, dove il vento si fa sentire anche negli ambienti, ma anche all'Istituto Mosso furono utilissime a causa dell'inevitabile apertura praticata nella finestra per dar passaggio ai raggi solari.

4. Finora furono eseguite le misure in tre stazioni differenti.

La prima a Messina, nei locali dell'Istituto Fisico, praticamente al livello del mare, nel settembre e ottobre 1908. Gli apparecchi differivano pochissimo da quelli descritti e furono distrutti dal disastro del 28 dicembre.

Le altre due negli Osservatorî citati del Col d'Olen e della punta Gnifetti, nell'agosto e nel settembre scorsi, con gli apparecchi descritti, acquistati dall'Istituto Fisico di Roma, in parte direttamente, in parte con un fondo del Ministero della Pubblica Istruzione, e trasformati poi convenientemente nell'Istituto medesimo.

Nelle ultime due serie la stagione non fu molto propizia, tuttavia potei raccogliere una buona quantità di dati molto concordi. Ma siccome è mia intenzione di fare nel prossimo estate un soggiorno più lungo nelle località nominate del M. Rosa, e in altre, così rinvio le deduzioni quantitative a quando avrò raccolto maggior copia di osservazioni.

Qualitativamente le tre serie ottenute concordano nell'indicare *senza eccezione* che: l'*atmosfera solare esercita un assorbimento diffusivo che cresce gradatamente col diminuire della lunghezza d'onda.*

L'aumento è più accentuato per le lunghezze d'onda minori, ma è sempre molto minore di ciò che vorrebbe la teoria di lord Rayleigh, qualora lo si attribuisse alla diffusione e alla diffrazione prodotte da piccoli nuclei dell'atmosfera stessa.

Così, passando da $\lambda = 2\mu$ a $\lambda = 0{,}5\,\mu$, esso diventa solo meno che triplo.

Questo andamento dell'assorbimento fa spostare il massimo dello spettro verso le onde più corte e per conseguenza la temperatura dedotta dalla legge

$$\lambda_m \, T = \text{cost},$$

dove λ_m è la lunghezza d'onda corrispondente al massimo dell'energia, diventa notevolmente superiore a quella che si deduce dallo spettro solare di Langley.

Quantitativamente i valori ottenuti per l'assorbimento a Messina, superano quelli delle altre due stazioni, ma essi non sono molto concordi, e ciò in parte forse per una disposizione meno buona, e in parte certo per le cause maggiori e più frequenti di errore che presenta la località.

Le altre due serie sono assai più concordi, anzi l'accordo è in ognuna di esse buonissimo, quanto ritengo possa attendersi in questo genere di misure, e dimostra precisamente la necessità di ricorrere a queste grandi altezze per avere dei risultati che diano affidamento.

Colgo l'occasione per esprimere la mia gratitudine al prof. Blaserna per l'appoggio continuo ed autorevole col quale rese possibile questa ricerca.

Ringrazio pure di cuore S. E. l'on. Luigi Rava per i mezzi che mise a mia disposizione, il senatore Mosso, il dott. Agazzotti, il prof. Palazzo e il dott. Alessandri per l'ospitalità concessami all'Istituto del Col d'Olen e all'Osservatorio Regina Margherita. Ringrazio infine l'illustre Accademia, la quale, conferendomi la borsa « Joule », ha voluto rendermi possibile la continuazione di questo lavoro.

Fisica terrestre. — *Sulle osservazioni sismiche* [1]. Nota del dott. Antonino Lo Surdo, presentata dal Socio A. Ròiti.

La determinazione dell'intensità di un terremoto in misura assoluta.

Le scale sismiche.

L'intensità di un terremoto si suole stimare ordinariamente dagli effetti prodotti, sia sui sensi dell'uomo, sia sugli oggetti materiali; e così si sono stabilite arbitrariamente le *scale sismiche*. Questo metodo si presta a gravi critiche, che del resto nascono spontanee al semplice esame di una scala sismica, sia pure quella di Mercalli o quella di Rossi-Forel, che sono più in uso. Le indicazioni delle intensità sono puramente convenzionali, esse

(1) Vedi Note precedenti pubblicate nel vol. XVIII di questi Rendiconti, 2° sem. 1909, fasc. 6° e 10°.

non stanno in relazione ben definita con le quantità fisiche che caratterizzano il moto, nè si conoscono i rapporti fra i gradi di una stessa scala. Inoltre, anche se fosse lecito ammettere che le condizioni fisiche ed intellettuali dei varî osservatori non avessero influenza nella stima dell'intensità, resterebbe sempre l'incertezza dovuta al fatto che uno stesso terremoto può produrre effetti diversi, secondo un complesso di circostanze relative alla natura ed alla disposizione degli oggetti sottoposti all'osservazione.

Gli effetti di un terremoto sono dovuti all'inerzia delle masse che il suolo tende a trascinare nel suo movimento, inerzia che si fa valere finchè esse non acquistano lo stesso stato di moto del suolo. Così, p. es., se, partendo dalla quiete, con moto accelerato il suolo assume un moto uniforme, e dopo un certo tempo esso ritorna alla quiete, le forze suddette sono in giuoco in corrispondenza al moto vario; però durante il moto uniforme, comunque grande possa essere la velocità, manca qualsiasi impulso, come se il suolo fosse in quiete. Durante un terremoto si esercitano quindi delle forze, la cui grandezza dipende dall'accelerazione del suolo: siamo perciò condotti a definire come intensità assoluta di un terremoto il massimo valore raggiunto dall'accelerazione sismica.

Quando si tratta di terremoti molto forti, si può determinare il valore dell'accelerazione nel modo suggerito da Omori ([1]). Esso consiste nel calcolare l'accelerazione necessaria per far cadere alcuni corpi che si trovano rovesciati o no per effetto dei terremoti: questo calcolo si può fare quando detti corpi abbian forma semplice, come colonne, pilastri, ecc. Allora, quando concorrano fortuitamente condizioni opportune per le dimensioni dei corpi sui quali è possibile studiare l'effetto di un terremoto, si arriva a stabilire che la massima accelerazione è compresa in un certo intervallo più o meno ampio: i corpi rovesciati forniscono il limite inferiore; quelli che resistono, il limite superiore.

L'Omori classifica i terremoti forti in base ad una scala sismica assoluta di sette gradi, secondo il valore dell'accelerazione massima, che comincia da 300 mm./sec.^{2} (30 unità c. g. s.) per il primo grado; al settimo grado corrispondono valori dell'accelerazione massima più grandi di 4000 mm./sec.^{2} (400 c. g. s.).

La scala dell'Omori è fondata su un concetto rigoroso dell'intensità dei terremoti, però noi riteniamo che il procedimento da lui seguìto per determinare l'accelerazione si presti a gravi critiche. In vero, a parte la considerazione che le determinazioni possano essere fatte solo nel caso di terremoti molto forti e quasi solo all'epicentro, è evidente che, anche quando

([1]) Publications of the Earthquake Investigation Committee in Foreign Languages, n. 4. Tokyo 1900.

concorra l'esistenza dei corpi aventi forma e dimensioni opportune, questi corpi si possono considerare in generale come dei sistemi oscillanti di periodo proprio non piccolissimo, il quale ha notevole influenza sugli effetti, al succedersi degli impulsi sismici. Infine è da osservare che, trattandosi di oggetti in equilibrio stabile anche per spostamenti relativamente grandi, occorre un certo tempo prima che l'accelerazione produca il loro rovesciamento, e quindi può darsi che essa raggiunga un valore anche più grande di quello necessario per farli cadere, senza che ciò avvenga.

Cancani ([1]) ha dato i valori dell'accelerazione, che egli riteneva di aver dedotto da numerose osservazioni, corrispondenti ai gradi di una scala sismica empirica, quella di Forel-Mercalli. È chiaro però che non si ha nessun vantaggio di esprimere in valore assoluto l'intensità di un terremoto stimata dapprima mediante le scale empiriche. Ed infatti, ogni grado abbraccierebbe un intervallo molto ampio per i probabili corrispondenti valori dell'accelerazione massima, e gli intervalli competenti a gradi vicini dovrebbero essere necessariamente sovrapposti. Qualora invece, com'è stato già fatto, i successivi intervalli si separino nettamente, stabilendo che il massimo di ogni grado confini col minimo del grado successivo, dall'empirismo probabilmente si cade nell'errore, poichè terremoti della stessa intensità assoluta possono produrre effetti che, secondo la natura del moto e degli oggetti sottoposti all'osservazione, non sono imputabili allo stesso grado della scala empirica. Seguendo questo metodo dunque si stabilirebbe per ogni terremoto un intervallo in cui dovrebbe essere compresa l'accelerazione massima, mentre è possibile che questa abbia un valore non compreso in esso.

A dire il vero, l'applicazione delle scale sismiche empiriche verrebbe giustificata dal fatto che essa è l'unico modo di raccogliere dei dati nei posti in cui mancano le persone che siano in grado di fare delle osservazioni delicate e mancano i mezzi adatti per queste. E gli ordinarî osservatorii, quand'anche in essi vi fosse modo di determinare l'accelerazione sismica ([2]), sono troppo lontani l'uno dall'altro per poter fornire ampie notizie sull'intensità di un fenomeno sismico nella regione che si estende dall'epicentro fin dove l'intensità supera un certo valore, per il quale, ad es., il terremoto può essere appena avvertito dall'uomo. Ma è anche evidente che i dati così raccolti hanno ben scarsa importanza!

Appare quindi manifesta l'importanza di ricercare dei metodi semplici e rigorosi, che, senza richiedere delle cognizioni speciali e grandi mezzi,

([1]) A. Cancani, *Sur l'emploi d'une double échelle sismique des intensités empirique et absolue*. Ergänzungsband II zu Beiträge zur Geophysik. Annexe *A* 10; pag. 281.

([2]) È noto infatti che in quasi tutti gli Osservatorii, la stima dell'intensità di un terremoto si fa in base alle scale sismiche empiriche.

rendano possibile la determinazione dell' intensità di un terremoto in valore assoluto.

Guidati da queste considerazioni, abbiamo ideato alcuni apparecchi che riteniamo possano rispondere allo scopo: e di essi diamo qui una breve descrizione.

Gli accelerometri a liquido.

Abbiamo mostrato [1] come, per effetto della pressione idrostatica dovuta all'inerzia, possa venire usata una colonna liquida per la determinazione

Fig. 1.

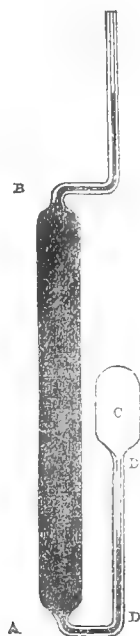



Fig. 2.

dell'accelerazione sismica, servendosi di apparecchi del genere di quelli rappresentati nelle figg. 1 e 2 che qui riproduciamo. Infatti, se li provvediamo di un indice mobile, ad esempio come nei termometri a massima, esso si fermerà in corrispondenza al massimo spostamento dei menischi nei cannelli verticali, opportunamente graduati secondo l'accelerazione. Così l' intensità di un terremoto potrà essere determinata colla stessa facilità con cui si legge un termometro, e senza che l'osservazione venga fatta durante il fenomeno sismico. Nelle regioni soggette a terremoti si potrebbero distribuire largamente questi apparecchi, come i pluviometri ed i termometri per le reti termo-udometriche: in ogni stazione due per le componenti orizzontali ed uno per la verticale.

Riservandoci di dare in seguito estesi particolari sulla loro costruzione, grandezza e forma, affinchè riescano di uso semplice e siano sottratti alle

(1) In questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem., fasc. 10°.

perturbazioni per la dilatazione termica del liquido, ecc., diamo qui un cenno preliminare delle prove fatte.

Abbiamo costruito alcuni modelli degli accelerometri già descritti, i quali hanno le seguenti caratteristiche:

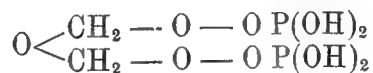
Lunghezza della colonna liquida, $L = 49,0$ cm.; rapporto delle sezioni, $n = 100$; per cui il periodo proprio risulta di circa $^1/_{10}$ di sec., e la sensibilità di cm. 0,025: cioè, ad ogni mm. di spostamento corrispondono 4 unità c. g. s. di accelerazione. I menischi potendosi spostare al massimo di 5 cm., il campo di misura va da 0 a 200 c. g. s.

Per una verificazione sperimentale gli apparecchi venivano collocati su una piattaforma oscillante, alla quale si poteva imprimere un moto armonico, verticale od orizzontale: il periodo e l'ampiezza di questo moto potevano essere regolati opportunamente. Si poteva quindi sperimentare con accelerazioni massime di diverso valore, e con diversa rapidità di variazione. E diremo senz'altro per ora che per accelerazioni comprese nel campo di misura, cioè fino a 200 c. g. s., e con periodi relativamente piccoli, perfino di un secondo, abbiamo ottenuto risultati che hanno pienamente confermato le nostre previsioni sulla pratica utilità di questi apparecchî. L'approssimazione raggiunta in ogni caso era maggiore di un ventesimo: ed essa si può ritenere sufficiente pel nostro scopo.

Le esperienze sono state eseguite nel Laboratorio di Fisica del R. Istituto di Studî Superiori in Firenze.

Chimica. — *Sintesi dell'acido fosfoorganico dei semi delle piante (acido anidro-ossi-metilen difosforico del Posternak)* (1). Nota del dott. ANGELO CONTARDI, presentata dal Socio G. KÖRNER.

In una precedente Nota (2) era stato da me detto che l'acido, fosfoorganico dei semi delle piante, al quale il Posternak assegnava la formula:

$$O\begin{matrix} \nearrow CH_2 - O - O\ P(OH)_2 \\ \searrow CH_2 - O - O\ P(OH)_2 \end{matrix}$$

poteva anche essere invece un etere esafosforico dell'inosite, come già fin da principio aveva supposto il Winterstein (3), e mi ero allora proposto di isti-

(1) Lavoro eseguito nella Regia Scuola Superiore d'Agricoltura di Milano. Gabinetto di chimica organica.

(2) Rendiconti R. Accad. Lincei, vol. XVIII, 1° sem., serie 5ª, fasc. 2°, pag. 64.

(3) Ber. d. Chem. Gesell. pp. 2299.

tuire esperimenti che servissero a chiarire tale questione; mi preparai dei derivati di questo acido che presumibilmente non fossero in soluzione dissociati, per poterne determinare la grandezza molecolare. I tentativi fatti però in questo senso non condussero a risultati soddisfacenti: infatti gli eteri metilici ed etilici di questo acido, sui quali io volevo sperimentare, non sono praticamente purificabili nè maneggiabili, poichè appena tolti dai recipienti in cui si preparano, venendo in contatto coll'umidità atmosferica, acquistano subito reazione fortemente acida. Rivolsi quindi altrimenti i miei sforzi per raggiungere lo stesso scopo, tentai cioè la sintesi dell'acido stesso.

Dirò subito che gli esperimenti numerosi fatti per raggiungere la sintesi completa di questo composto, fallirono; più fortunati furono invece quelli fatti partendo dall'inosite ordinaria e dall'acido fosforico, quantunque a priori essi mi lasciassero pochissima speranza di riuscita, e perchè l'acido fosfo-organico era ritenuto instabile a temperatura poco superiore a 120°, e perchè già prima era stato dimostrato che riscaldando fortemente inosite con acido fosforico glaciale si otteneva furfurolo.

Mediante il metodo descritto da me nella sopraccitata Nota mi preparai una considerevole quantità di inosite, circa 400 gr., quantità questa di cui nessun chimico potè forse fino ad oggi disporre. Disidratata completamente essa veniva riscaldata a bagno d'olio, in un pallone in cui passava una lenta corrente di anidride carbonica secca, con un leggiero eccesso di acido fosforico della densità 1,7: praticamente venivano impiegati gr. 25 di inosite e gr. 120 di acido fosforico. La temperatura interna della miscela veniva mantenuta a 160-165° per otto o dieci ore. Appena la temperatura raggiunge i 120°, l'inosite si scioglie nell'acido fosforico, ed a 140-145° incomincia la eliminazione dell'acqua; poco a poco poi lo svolgimento dell'acqua diminuisce per cessare quasi completamente dopo l'ottava ora. Si lascia raffreddare e la massa bruna sciropposa che si ottiene si scioglie in acqua distillata, si fa bollire con nero animale fino a completo scolorimento indi, filtrata, si tratta a bagno maria con carbonato di bario finchè si ha effervescenza. Il precipitato così avuto, lavato parecchie volte con acido acetico diluito e poi con acqua bollente, si ridiscioglie in acido cloridrico diluitissimo (0,2-0,5 %), indi si ripete la precipitazione con nuovo carbonato di bario. Ripetuta l'operazione un paio di volte e neutralizzato in ultimo con barite caustica anzichè con carbonato, impiegando come indicatore una cartolina al tornasole, si ottiene un sale che seccato fino a peso costante contiene il 56,2 di bario per cento, ed il 12,5 % di fosforo; il calcolato teorico per un sale neutro di bario dell'etere esafosforico dell'inosite sarebbe il 55,9 % di bario ed il 12,63 % di fosforo.

Da questo sale facilmente si può ottenere l'acido libero trattandolo colla quantità calcolata di acido solforico diluito a bagnomaria. La soluzione acquosa dell'acido, concentrata nel vuoto a sciroppo, venne trattata con alcool asso-

luto ed etere. Si separa così una massa vetrosa incristallizzabile, solubile assai nell'acqua; essa fu essicata a 110° e sottoposta all'analisi:
gr. 0,6605 di sost. secca, diedero gr. 0,244 di anidride carbonica e gr. 0,179 di acqua.

Trovato	Calcolato per $C_6 H_{18} P_6 O_{24}$
C = 10,89 %	C = 10,99 %
H = 3,00 "	H = 2,74 "

Gr. 0,684 di acido distrutti a bagnomaria con acqua regia e sottoposti alla determinazione quantitativa del fosforo, diedero gr. 0,380 di pirofosfato di magnesio corrispondenti al 28,1 % di fosforo; il calcolato teorico è del 28,5 %.

Una soluzione acquosa contenente gr, 0,485 di acido è completamente neutralizzata da cc. 87,5 di soda decinormale (indicatore tornasole). Cioè la quantità trovata di soda necessaria a saturarlo è di gr. 72,5 per cento grammi di acido, mentre il calcolato teorico sarebbe di gr. 72,72.

L'acido da me preparato è nell'aspetto fisico e nelle proprietà chimiche affatto simile all'acido fosforganico estratto dai semi. Le sue soluzioni acquose sono otticamente inattive, non precipitano a freddo, se molto diluite, col molibdato di ammonio (preparato secondo Fresenius) in soluzione concentrata si ottiene un precipitato bianco solubile nell'acqua, insolubile, o meglio, poco solubile nell'acido nitrico. Fatto bollire con acido nitrico concentrato, dà, per aggiunta di cloruro di calcio, la reazione caratteristica della inosite.

Se la soluzione del sale di bario in acido cloridrico diluito si tratta con una soluzione di acetato di rame, previa aggiunta della quantità calcolata di acetato sodico per neutralizzare l'acido cloridrico esistente, si forma subito un precipitato bleu-verde. Aspirato alla pompa, lavato prima con acido acetico diluito bollente, poi con acqua distillata pure calda, essicato quindi a 110° fino a costanza di peso, indi analizzato diede:

Sostanza impiegata gr. 1,591			Calcolato per $C_6 H_6 O_{24} Cu_4 Ba_2$
Perdita alla calcinazione	gr. 0,348 cioè	21,75 %	—
Pirofosfato di magnesio	" 0,887 "	P = 15,64 "	15,8
Solfuro di rame	" 0,446 "	Cu = 22,07 "	21,6
Solfato di bario	" 0,5625 "	Ba = 23,17 "	23,3 %

Neutralizzando la soluzione primitiva con carbonato di calcio invece che con carbonato di bario, come era stato fatto più sopra, e seguendo le norme ricordate, indi aggiungendo alla soluzione cloridrica del sale calcico, acetato sodico ed acetato di rame, si ottiene un sale doppio di rame e di calcio, i dati analitici del quale portano alla formula:

$$C_6 H_6 O_{24} Cu_4 Ca_2 .$$

Se si tratta la soluzione cloridrica del sale di calcio con ossido di magnesio si ottiene un sale che seccato a costanza di peso all'analisi diede:

Ceneri	66,71
Fosforo	21,42
Calcio	13,51
Magnesio	9,02.

Esso nelle proprietà e nei dati chimici coincide entro i limiti di errore con quello da me analizzato e descritto nella Nota citata più sopra, ed estratto dalla rusca del riso.

Nè per altro l'eterificazione procede così completa da dar luogo alla sola formazione dell'etere esafosforico; anzi il rendimento in quest'ultimo è assai scarso, tanto che per avere quantità bastevoli di prodotto ho dovuto sottoporre all'eterificazione circa 150 grammi di inosite. Però la separazione degli altri eteri meno ricchi in fosforo non è praticamente possibile salvo per uno, quello contenente due residui dell'acido fosforico per ogni molecola di inosite. Il modo di separare tale etere è assai facile grazie alla sua poca solubilità nell'alcool assoluto.

Se la soluzione contenente la miscela degli eteri fosforici, scolorata con nero animale, si concentra nel vuoto a bagnomaria fino a che non distilla più acqua e la massa sciroppposa, leggermente giallognola, si tratta con 15-20 volte il suo volume di alcool assoluto, precipita una sostanza gelatinosa bianca, che, dopo riposo, si deposita al fondo del matraccio: si lava con alcool, poi con etere; indi si essica a 110°.

L'analisi dà:

gr. 0,3452 di sostanza diedero gr. 0,3012 di anidride carbonica e gr. 0,1368 di H_2O cioè:

Trovato	Calcolato per $C_6H_{14}O_{12}P_2$
C % = 20,9	C % = 21,17
H » = 4,41	H » = 4,11

Distrutti gr. 0,3401 con acqua regia a bagnomaria diedero gr. 0,2202 di pirofosfato di magnesio, cioè 18,1 % di fosforo (calcolato teorico = 18,23 %).

L'aspetto dell'acido inosit-bifosforico è assai simile a quello dell'acido esafosforico solo che quando è assolutamente secco, è solido e bianco. All'aria va in deliquescenza. È assai più facilmente idrolizzabile dell'esafosforico ed il reattivo molibdico produce quasi subito il precipitato giallo caratteristico.

Neutralizzando una soluzione acquosa con acqua di barite e sottoposto il precipitato, dopo essicamento, all'analisi, si ebbe:

Sostanza impiegata gr. 1,142			Calcolato per $C_6H_{10}O_{12}P_2Ba_2$
Perdita alla calcinazione	gr. 0,2785	cioè 24,39 %	—
Solfato di bario	» 0,872	» Ba % = 44,83 »	44,99 %
Pirofosfato di magnesio	» 0,364	» P » = 10,00 »	10,15 %

Quantunque, come dissi sin da principio, la sintesi dell'acido fosfoorganico contenuto nei semi non sia completa, poichè io parto da inosite preformata, resta però messo fuori di ogni dubbio che l'acido naturale è un etere esafosforico dell'inosite, come del resto il Winterstein aveva già fin da principio con buon fondamento supposto.

Mineralogia. — *Una varietà di calcite cobaltifera di Capo Calamita nell'isola d'Elba.* Nota di FEDERICO MILLOSEVICH, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia vegetale. — *Osservazioni sopra il rapporto fra la composizione chimica delle radici della vite e il grado di resistenza alla fillossera.* Nota di L. PETRI, presentata dal Socio G. CUBONI.

In mancanza di metodiche ed approfondite ricerche sulle vere cause della resistenza antifillosserica, sono stati presi in considerazione dagli studiosi di questo problema dei caratteri secondari delle radici, istologici o chimici, i quali mostrano in modo approssimativo di variare da vitigno a vitigno quasi parallelamente alle diverse graduazioni della resistenza. A questi caratteri si potrebbe forse accordare un certo valore considerandoli tutto al più come indici delle complessive proprietà fisiologiche della pianta concorrenti a determinare il comportarsi di questa di fronte alla fillossera, se fosse dimostrato che una stretta e costante correlazione sussiste fra questi caratteri e il grado di resistenza. Ma questa dimostrazione per ora non è stata data, tutt'altro, ed essi hanno un'importanza assai più relativa ed apparente dal momento che necessariamente devono venir valutati sul mutevole resultato dell'esperienza colturale. Ed è in questo appunto che consiste la causa principale d'insufficienza comune a tutte le ipotesi poste avanti sino ad ora per spiegare la resistenza di alcuni vitigni alla fillossera.

È ben noto come la viticoltura pratica disgraziatamente sia ancora lontana dal darci, in un breve numero di anni, il definitivo responso sopra il grado di resistenza di un dato vitigno, sottosposto nella grande coltura, alle più svariate condizioni di ambiente.

Tutti sanno come i primi vitigni americani diffusi in Francia quali portainnesti resistentissimi alla fillossera si rivelassero poi nell'uso di una

resistenza ben insufficiente [1]. Era naturale che questo insuccesso dei primi tentativi nella ricostituzione dei vigneti portasse il discredito anche su quelle spiegazioni affatto ipotetiche della resistenza antifillosserica che erano state formulate prendendo come tipi del più elevato grado di questa resistenza quei vitigni che dimostrarono così bene di non possederla neanche in una misura sufficiente.

Voglio alludere principalmente alle ipotesi di Foëx e di Müller per ciò che riguarda la struttura istologica, che nel *Jacquez* e *Solonis*, secondo questi botanici, rappresentava il tipo corrispondente ad un'elevata resistenza. Anche la teoria di Millardet non può dirsi esente da questo difetto di origine, per quanto essa, ed a ragione, abbia avuto miglior fortuna delle altre perchè si fondava sopra un ordine di fenomeni che realmente concorrono a determinare il grado di resistenza, sia pure in minima parte.

Per intendere bene il giusto valore delle idee di Millardet, bisogna riflettere che in quel tempo erano in discussione o molto stimati parecchi vitigni che oggi l'esperienza colturale ha relegato fra quelli inservibili. Millardet quindi ha studiato il fenomeno della resistenza in una cerchia di viti nelle quali la ricettività per la fillossera è abbastanza elevata e nelle quali effettivamente la resistenza definitiva è una conseguenza della lotta delle radici contro il marciume.

Il fatto biologico ed anatomico principale su cui riposa la teoria di Millardet, la abbondante e ripetuta formazione di strati suberosi arrestanti il marciume, riguarda infatti un fenomeno che si verifica principalmente nelle radici delle viti di una resistenza molto relativa, mentre nei vitigni veramente resistenti, nelle più diverse condizioni d'ambiente, la formazione di sughero è limitata esclusivamente ai soli strati superficiali del parenchima corticale dove avviene la lesione fillosserica.

Ho cercato di dimostrare in un mio primo lavoro, e lo dimostrerò meglio in avvenire, come il *diffondersi del marciume è strettamente subordinato all'entità dell'alterazione primitiva causata dalla puntura della fillossera.* Ora questa alterazione nelle viti veramente resistenti *è sempre superficiale.* Per quanto a Millardet non fosse sfuggito questo fatto, tanto al suo tempo che dopo si è fatto un po' di confusione fra resistenza all'azione parassitaria della fillossera e resistenza al marciume che alle lesioni di questo insetto

[1] La cronaca dettagliata che nella letteratura viticola si ha di questi insuccessi, gli studi fatti posteriormente non lasciano ombra di dubbio che per certi vitigni non si è verificata una diminuzione del grado di resistenza a causa della coltura, come qualcuno ancora oggi sarebbe disposto a sostenere, ma il loro soccombere alla fillossera è il resultato inevitabile di un complesso di proprietà fisiologiche e strutturali che rende facilmente vulnerabili questi vitigni agli attacchi fillosserici. Questa ed altre questioni che riguardano le eventuali variazioni dei portainnesti e il valore che loro si deve attribuire nella diminuzione del grado di resistenza tratterò ampiamente in un lavoro apposito.

quasi constantemente tien dietro. Quasi come una reazione contro le ipotesi di Foëx il valore accordato ai fatti svelati da Millardet è diventato oltremodo prevalente. Ora mentre il minimo grado d'irritabilità alle punture fillosseriche può determinare senz'altro la resistenza definitiva, il meccanismo di difesa contro il marciume invadente non rappresenta che un fatto il quale assume una certa importanza in dati vitigni e in date condizioni d'ambiente e solo in qualche caso può determinare una resistenza pratica sufficiente, ma sempre di un valore molto relativo e che deve essere assolutamente valutata tenendo conto di tutte le altre condizioni d'ambiente che concorrono a determinarla. Molti che hanno accettato le idee di Millardet esagerandole anche, hanno invece ritenuto che buona parte del meccanismo della resistenza consistesse esclusivamente in questa lotta dei tessuti radicali contro i germi del marciume. Così sono sorte quelle teorie che, appoggiandosi appunto a quella di Millardet, cercano l'intima causa della resistenza in quelle proprietà chimiche delle radici per le quali una formazione di sughero può verificarsi più abbondante e più pronta (percentuale elevata di ferro, manganese, fosforo secondo Jovino, di acidi secondo Comes).

Da tutto quanto sino ad ora si sa intorno alla fillosseronosi della vite, resulta ben chiaro come il grado di resistenza di un vitigno sia la resultante di fattori distinti fra loro i quali lungi dal costituire delle costanti per ciascuna specie o varietà, sono invece direttamente dipendenti tanto dalle proprietà fisiologiche e strutturali della pianta quanto dalle condizioni dell'ambiente. Io ho già nettamente definito questi fattori nel modo seguente:

1° *grado di ricettività delle radici per l'insetto* (sapore dei succhi).

2° *grado d'irritabilità dei tessuti radicali alla puntura fillosserica* (proprietà specifiche d'irritabilità e di reazione dei tessuti).

3° *grado di resistenza di questi tessuti ai germi del marciume* (più o meno precoce caduta della prima peridermide, formazione di placche suberose, elaborazione di sostanze chemotropicamente positive o negative nei tessuti direttamente o indirettamente alterati dalla fillossera).

Si può asserire senza timore di errare che qualunque spiegazione della resistenza antifillosserica basata sopra uno solo dei tre suesposti fattori non può darci la chiave di un fenomeno tanto complesso. La teoria di Millardet, basandosi prevalentemente sul 3° fattore, poteva dare solo approssimativamente la spiegazione della resistenza relativa al marciume di quei vitigni che, comportandosi quasi nello stesso modo per ciò che riguarda i due primi fattori, in alcune condizioni di terreno e di clima hanno una resistenza pratica sufficiente. Questa teoria toccava quindi più da vicino la questione che maggiormente interessava i viticultori, illuminandoli riguardo al comportarsi di molti ibridi europeo-americani, ma non poteva rispondere a tutti i quesiti che sopra un tale argomento sorgono necessariamente in una investigazione scientifica più completa. L'ipotesi di Jovino, di Pichi, di Comes, ri-

ferendosi pure al 3° fattore (resistenza al marciume) non possono ugualmente spiegarci le vere cause della resistenza, se pure l'interpretazione dei fatti, sui quali si fondono, può reggere a una critica diligente.

Muovendo dalle idee, che fra i primi espose de Laffitte, che cioè la qualità dei succhi delle radici deve riguardarsi come la principale condizione del grado di resistenza, alcuni botanici si sono posti alla ricerca di quelle sostanze che in qualche modo potessero spiegare il diverso comportarsi della fillossera di fronte ai diversi vitigni. Ma una stessa unilateralità di vedute ha guidato questi investigatori che hanno ricercato esclusivamente quali sostanze potessero esercitare un'azione repulsiva sulla fillossera, tralasciando di ricercare quali altre sostanze potessero invece stimolarla positivamsnte. In questa Nota accennerò semplicemente a un recente scritto del dott. Averna-Saccà [1], il quale ha creduto di trovare le cause della resistenza nel tenore in acidi organici contenuti nelle radici dei diversi vitigni. Boutin sino dal 1876 aveva scritto che nelle viti americane resistenti, per quanto meno ricche di acido ossadico, il quale nelle viti nostrali trovasi quasi tutto allo stato di ossalato di calcio, contenevano una percentuale di acido malico che rendeva i loro succhi più acidi in confronto a quelli delle viti europee. In questa maggiore acidità Boutin vedeva una della cause della resistenza. Il dott. Averna-Saccà in modo più particolareggiato afferma che più alto è il grado di resistenza, più elevato è il grado di acidità dei succhi, e che questa acidità diminuisce con la prolungata coltura tanto da determinare la perdita quasi assoluta della resistenza in quei vitigni che al momento della loro introduzione nella pratica colturale la possedevano al più alto grado. Così anche le *Riparie* e le *Rupestris* dovrebbero, con l'andar del tempo, soccombere agli attacchi della fillossera.

Le ricerche, che io vado facendo intorno alle cause della resistenza già da qualche tempo, mi autorizzano a pubblicare i seguenti risultati, i quali tolgono ogni valore alla percentuale di acidi quale causa determinante la resistenza, inoltre le considerazioni suesposte mi dispensano dall'insistere in quale concetto certi dati, anche se fossero diligentemente raccolti, devono esser tenuti in una teoria completa della resistenza antifillosserica.

1). I portainnesti comunemente usati, specie pure, ibridi americo-americani o europeo-americani, possono essere distinti in due grandi serie tanto per ciò che riguarda la loro struttura istologica come per le proprietà chimiche dei loro succhi. Una prima serie che comprende le *Riparie*, le *Rupestris* e gl'ibridi fra queste due specie e quelli con viti europee, presenta

[1] *L'acidità dei succhi nelle viti americane in rapporto alla resistenza di esse alla fillossera.* Giornale di Viticoltura ed Enologia. Avellino, 31 agosto 1909.

un certo parallelismo fra grado di acidità, percentuale di cellule a tannino, e il grado di resistenza. Più precisamente tanto più elevata è que st'ultima, tanto più elevato è il grado di acidità e maggiore è il numero *relativo* di cellule ricche di sostanze tanniche (1).

Una seconda serie, che comprende le *Berlandieri* e probabilmente anche la *Rotundifolia* e gl' ibridi di queste specie con altri vitigni americani o europei, non presenta più alcun parellelismo fra grado di acidità, percentuale di cellule a tannino e il grado di resistenza. Se, per es., si volesse dedurre il grado di resistenza della *Berlandieri Resseguier* n. 2 dal grado di acidità delle sue radici, dovremmo ritenerla una vite di una resistenza simile a quella del *Jacquez* e in certi casi anche minore.

2). Un'altra prova che la forte acidità o il tenore in tannino non rappresentano per un tessuto un mezzo di immunità o di resistenza contro la fillossera, ce la forniscono le foglie giovani di molti vitigni americani che ordinariamente portano galle fillosseriche. Porterò qui un esempio molto istruttivo, fornito dalle radici di due anni della *Riparia gloire* di Montpellier (ben difficilmente fillosserabili) e dalle foglie della *Rupestris* n. 5 di Velletri che sul Lago Maggiore forma galle fillosseriche con grande facilità.

	Acidità espressa in cmc. di soda N/50 °/₀ di sostanza secca (media di 4 saggi)	Gr. di sostanze tanniche °/₀ di sostanza secca (media di 4 saggi)
Corteccia delle radici di due anni della *Riparia gloire* di Montpellier . .	525	1,267
Foglie giovani di *Rupestris* n. 5 di Velletri	4987	3,205

3). Le differenze del grado di acidità e della percentuale di elementi tannici sono spesso maggiori in uno stesso vitigno esaminato in epoche differenti del suo periodo di vegetazione, di quello che sieno fra due vitigni differenti e di diversa resistenza.

4). Esiste una variazione del grado di acidità dovuta all'influenza del terreno e del clima. In generale le viti coltivate nei paesi meridionali hanno succhi meno acidi delle stesse viti coltivate al nord, ma queste differenze sono così piccole che devono essere ritenute senza effetto per ciò che riguarda il grado di ricettività per la fillossera o di resistenza contro il marciume. La *Berlandieri Rességuier* n. 2 in Puglia e in Sicilia ha un grado di acidità dei succhi radicali spesse volte eguale e minore di quello dell'*Aramon* × *Rupestris*, sempre minore di quello della *Fresia* coltivata ad

(1) Ho già dimostrato che questo rapporto è inverso se si tien conto della percentuale in peso.

Arizzano (Intra). Ora nessuno vorrà sostenere che la *Berlandieri* non sia una vite resistentissima alla fillossera anche nell' Italia meridionale.

Dobbiamo ricercare quindi in altre cause la mancanza di ricettività o la poca irritabilità dei tessuti delle viti resistenti. Per ciò che riguarda i mezzi di difesa contro il marciume nelle viti di resistenza molto relativa come il *Jacquez*, il *Clinton*, e anche l'*Aramon* × *Rupestris*, una diminuizione del grado di acidità non può esser la causa nè dell'elevarsi del grado di ricettività per l'insetto nè dell'approfondirsi del marciume nei tessuti come in qualche caso si verifica. Gl'individui di *Aramon* × *Rupestris* più carichi di fillossera hanno spesso i succhi più acidi di altre piante della stessa varietà che sono immuni, in secondo luogo le differenze nell'acidità tra individui fillosserati con marciume profondo e individui pur fillosserati ma con radici relativamente sane, sono trascurabili. È da osservare infine che nella ricerca del significato biologico degli acidi organici nei tessuti viventi, l'analisi volumetrica, eseguita riguardo all'*acidità totale* dei succhi, difficilmente potrà dare dei risultati che possano esser presi in considerazione per la valutazione del meccanismo della resistenza.

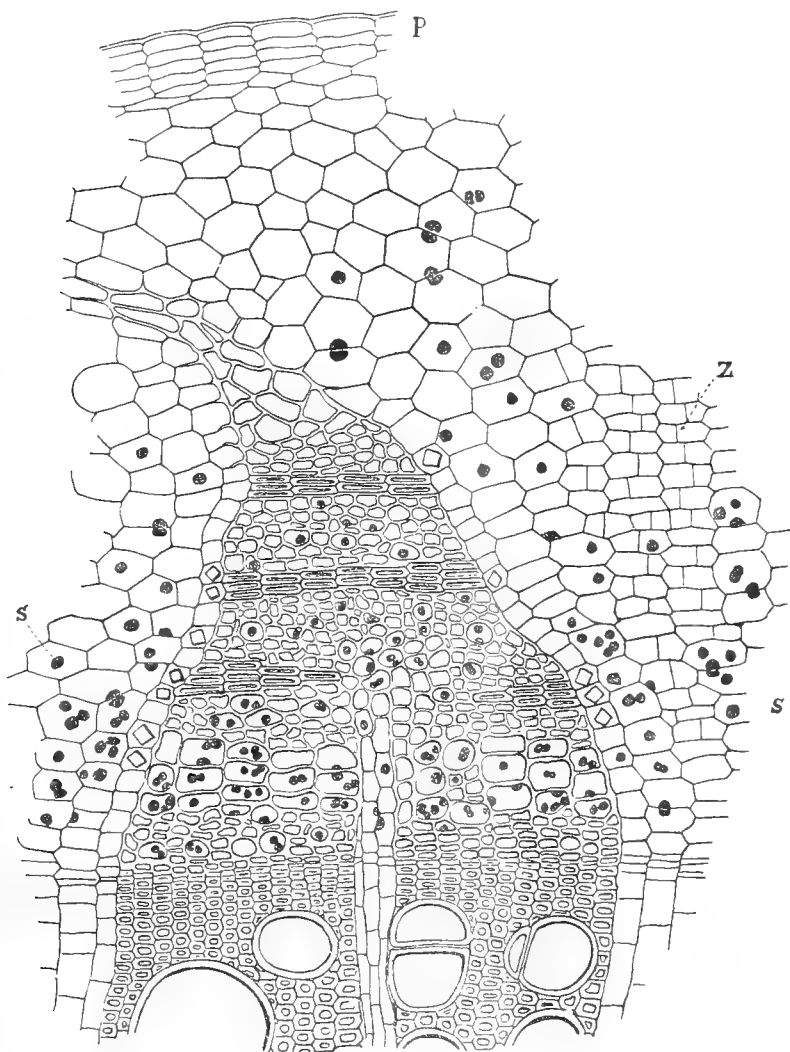
Mi è sembrato interessante ricercare se fra le sostanze che possono agire come stimolanti positivi sulla fillossera e sugli agenti del marciume non potessero esser compresi gl' idrati di carbonio solubili che si trovano nelle radici. Le mie ricerche si limitano per ora agli zuccheri. L'esame microchimico delle sezioni trasverse di radici già lignificate (di 2 o 3 anni) dimostra la presenza di saccarosio, glucosio, fruttosio. Hebert [1] dimostrò la presenza di inosite sino dal 1875. Adoperando i metodi di Senft [2] e di Grafe [3] si ha la formazione di caratteristici cristalli di osazoni specialmente nel libro molle e nelle cellule del parenchima corticale profondo (cfr. la quì unita figura). Ho fatto eseguire dall'egregio dott. M. Marantonio dell'Istituto chimico della R. Università di Roma dei saggi preliminari di analisi quantitativa sopra gli zuccheri riduttori delle radici e delle foglie di diversi vitigni.

Da quanto risulta da queste prime analisi nelle viti coltivate al nord diminuiscono gli zuccheri riduttori, nelle viti americane della prima serie suddetta il contenuto in zuccheri sembra scemare col crescere del grado di resistenza ma le differenze tra vitigno e vitigno non sono proporzionali al grado della resistenza stessa. Così mentre la *Riparia gloire* presenta gr. 0,526 di zuccheri riduttori per 100 di peso secco, l'*Aramon* × *Rupestris*

(1) Hebert A., *Note sur la sève*. Bull. Soc. Chim., 3me sér., t. 13, pag. 927: t. 17, pag. 88.

(2) Scuft E., *Ueber den mikrochemischen Zuckernachweis durch essigsaures Phenylhydrazin*. Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wiss.-Math.-Natur. Kl. Bd. CXIII, 1904.

(3) Grafe V., *Studien über mikrochemischen nachweis verschiedener Zuckerarten in den Pflanzengeweben mittels der Phenylhydrazinmethoden*. Ibidem. Bd. CXIV. 1905.

Ganzin n. 1 ne presenta gr. 0,564 %. La *Berlandieri* Rességuier n. 2, che è senza dubbio un vitigno ben resistente, ha nelle radici una percentuale di zuccheri riduttori più elevata di alcuni ibridi di debolissima resistenza. Mal-

Porzione di una sezione trasversa di radice di *Negro-amaro*. Localizzazione degli zuccheri nel parenchima corticale e nel fascio liberiano. S = sferiti del fruttosiometilfenilosazone derivati in parte anche dall'inversione del saccarosio. Z = meristema radiale dell'aerenchima corticale. P = peridermide.

grado questi risultati devo far notare quì l'importanza che gl'idrati di carbonio solubili contenuti nei tessuti, sui quali la fillossera si fissa, devono avere nella nutrizione di questo insetto.

Nelle foglie con galle fillosseriche gli zuccheri salgono spesso a percentunli elevatissime (anche al 6 %). Questi materiali sono certamente assor-

biti in grande quantita. La facoltà delle foglie di poter formare una maggiore o minore quantità e qualità d'idrati di carbonio solubili, dovrebbe costituire una delle condizioni necessarie per la fissazione delle fillossere gallicole. A questo riguardo ho constatato che certi fatti che generalmente sono in correlazione con la saccarofillia e l'amilofillia si verificano per certe viti che mostrano una ricettività diversa per la forma gallicola quando si trovino in condizioni d'ambiente molto diverse. La *Riparia gloire* di Montpellier, per es., coltivata nel R. Vivaio di Palermo, forma galle fillosseriche in grande quantità e facilmente; coltivata ad Arizzano, sul lago Maggiore, ha fatto riuscir vani per ora tutti i tentativi eseguiti per fillosserarne le foglie.

In corrispondenza a questo diverso comportarsi sta lo straordinario sviluppo di micorize endotrofiche nelle radici della *Riparia* coltivata a Palermo e la loro relativa scarsità nella stessa vite che vegeta ad Arizzano. Mentre le radici autotrofiche si possono calcolare a Palermo circa il 26 %, sul lago Maggiore raggiungono anche l'80 %. Stahl hà dimostrato con numerosissimi esempî come esista uno stretto rapporto fra micotrofia e saccarofillia. Le ulteriori ricerche potranno dire qual valore dovremo accordare a questi fatti per spiegare alcuni punti oscuri dei molti che ancora rimangono a proposito delle *simpatie* e *antipatie* della fillossera. Per quanto io sia convinto che il meccanismo intimo della resistenza propriamente detta risieda principalmente nelle proprietà specifiche d'irritabilità del citoplasma vivente della pianta (2° fattore), più che nella qualità o quantità delle sostanze di riserva o di rifiuto contenute nei tessuti (1° fattore), pure sono di opinione che delle ricerche metodiche sopra il contenuto chimico delle radici e delle foglie delle viti s'impongono ed esse faranno parte del nostro futuro programma anche per esaurire un tema che è ancora aperto ai ricercatori troppo affrettati i quali, senza volerlo, trovano il modo di riportare la discussione, sul già troppo complesso problema della resistenza antifillosserica, ai primi stadî della questione.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Socio straniero dott. Ludwig Mond, mancato ai vivi l'11 dicembre 1909, e ricorda i meriti del defunto e la munifica sua istituzione affidata all'Accademia; aggiunge che ai funerali del compianto Socio, fatti a Londra, l'Accademia venne rappresentata dai Soci Sir Roscoe e Dewar.

Il Socio sen. Todaro legge la seguente Commemorazione del Socio straniero prof. Antonio Dohrn.

Illustri Colleghi,

Sull'albeggiare del 26 settembre 1909, moriva, in Monaco di Baviera, Antonio Dohrn, il fondatore della Stazione zoologica di Napoli, il quale per 25 anni appartenne alla nostra Accademia. Forse egli avrebbe preferito morire sul campo di battaglia nella sua patria d'elezione: fatalità volle che lasciasse le sue ceneri nella terra che gli aveva dato i natali.

Fu un compianto generale: la triste novella fece profonda impressione su l'animo de' naturalisti, che d'ogni parte d'Europa e dalle lontane contrade dell'America e del Giappone erano venuti numerosi a studiare in quella Stazione le piante e gli animali di cui è così ricco il Mediterraneo; e non meno dolorosa fu l'impressione in quanti amano la scienza e si interessano della umanità.

S. M. l'Imperatore di Germania, che nella Stazione zoologica di Napoli vede il maggior tempio pel culto della Scienza della vita, non ha tralasciato occasione di manifestare la sua simpatia e l'alta sua stima per colui che la fondò; e nell'ultima fase della lunga e penosa malattia che trasse il Dohrn alla tomba, di lui premurosamente volle continue notizie.

Il nostro Augusto Sovrano, che con uguale interesse segue le sorti del grande Istituto, telegraficamente espresse il suo rammarico, per la perdita di tant'uomo, a Rinaldo Dohrn, che succedeva al padre nella Direzione.

Ma ad Antonio Dohrn non mancarono in vita i segni di riconoscenza e di ammirazione per l'opera da lui compiuta.

Nell'aprile del 1895, festeggiandosi il 25° anniversario della fondazione della Stazione zoologica, il municipio di Napoli, a pieni suffragi, nominò Antonio Dohrn cittadino onorario; e, in quell'occasione, il governo italiano si fece rappresentare da Emanuele Gianturco, ministro della Pubblica Istruzione, e il governo germanico dal principe von Bülow, ambasciatore in Italia, i quali gli portarono il plauso dei rispettivi governi.

Delegato a rappresentare l'Accademia dei Lincei, espressi anch'io al Dohrn i sensi d'ammirazione degli scienziati italiani, e W. His ed il Waldeyer portarono al loro compatriota l'omaggio dei biologi tedeschi.

La Stazione zoologica, sorta nel 1872, nel sito più incantevole della Villa Nazionale di Napoli, con la sua maestà attira l'attenzione del pubblico, che vi accorre ad ammirare gli animali del golfo, rinchiusi nei grandi bacini del pianterreno dell'edificio; ma questi bacini costituiscono una parte meramente accessoria.

L'importanza della Stazione sta nei Laboratorî scientifici, e nella grande Biblioteca, preziosissima per la raccolta delle numerose opere di zoologia. Le pubblicazioni della *Fauna und Flora*, delle *Mitteilungen* e del *Jahresbe-*

richt, completano la mirabile organizzazione, che il Dohrn e i tre suoi collaboratori, Ugo Eisig, Paolo Mayer e Salvatore Lo Bianco, hanno dato al geniale Istituto, nel quale si vive in contatto della natura e in relazione con i naturalisti di tutte le nazioni.

Non minore cura pose il Dohrn nell'organizzare la pesca, per la quale sono adibiti due piccoli vapori, destinati a raccogliere le piante e gli animali littoranei in tutti i meandri del golfo, e ai quali non sfugge più alcuna delle forme pelasgiche; così spetta a lui il merito di avere contribuito, in modo efficace, a far conoscere la ricchezza degli animali che popolano il golfo di Napoli.

Per la Fauna abissale e gli studî oceanografici, appena iniziati nel Mediterraneo, vi vogliono ben altri mezzi: anzitutto un grande vapore con un Laboratorio galleggiante; e a ciò mirava Antonio Dohrn, il quale avrebbe attuato il suo pensiero se la morte non fosse venuta a troncargli l'esistenza nella pienezza della sua fenomenale attività. Poichè era in lui spirito intraprendente, largo e penetrante, vivo, fertile ed ostinato, unitamente ad un talento di organizzatore non comune.

La Stazione zoologica di Napoli fu di fatto una conseguenza delle sue larghe idee scientifiche, e del suo temperamento irrequieto e perseverante, come si rileva pure dalle sue numerose pubblicazioni e dalle lettere confidenziali, che scrisse all'intimo suo amico prof. Adolfo Stahr, uomo di lettere e di lui molto più innanzi negli anni. Fortunatamente queste lettere sono state raccolte e si conservano nell'Archivio particolare della Stazione zoologica.

***

Antonio Dohrn nacque il 25 dicembre 1840 in Stettino, e seguì gli studî di scienze naturali nelle Università di Königsberg, di Bonn, di Jena e di Berlino ove conseguì la laurea nel 1866; e, due anni dopo, ottenne l'abilitazione, come privato docente di zoologia, nell'Università di Jena.

Aveva avuto la fortuna di fare la sua prima educazione sotto un padre, colto e appassionato per la musica e la zoologia, il quale gli fece apprendere le lingue e coltivare la letteratura classica, la filosofia e le scienze naturali, iniziandolo prestissimo negli studî di zoologia.

Nella lettera scritta il 19 aprile 1866 al suo amico Stahr, il Dohrn narra che fin dall'infanzia era stato spinto dal padre « entomologo dilettante e collettore appassionato », a coltivare la zoologia con la sistematica degli insetti, nella quale fece i suoi primi passi. Ma frequentando l'Università, e venuto a conoscenza dello stato attuale (1860-66) delle discipline di scienze naturali, ebbe una grande disillusione: si accorse di avere perduto il suo tempo in ricerche minuziose e precise, che non si confacevano all'indole del suo spirito. Ne fu talmente scoraggiato che aveva deciso abbandonare la zoologia, quando gli capita fra le mani il libro di Carlo Darwin che lo rianima.

Il Dohrn scrive in questa stessa lettera: « Le idee di Darwin commossero profondamente l'anima mia intellettuale: riconobbi per esse che la zoologia è veramente una fonte importantissima dell'umano sapere (Erkenntniss); mi convinsi che, siano pure noiose e prive d'interesse le parti di questa scienza, il Darwin e le sue teorie le davano un rilievo grandioso ».

Non minore fascino esercitò su lui il libro di Ernesto Haeckel sopra la Morfologia generale degli organismi, pubblicato nell'ottobre 1866, del quale in data dello stesso mese il Dohrn scrisse al suo amico Stahr: « Nel libro testè pubblicato Haeckel dà il fondamento alla Morfologia generale degli organismi, applicando i principî di Darwin ».

Loda quindi questo libro, ma fa la seguente riserva: « Haeckel va troppo addentro nel dommatismo materialistico, del quale io mi sono liberato leggendo il libro di Lange (*Geschichte des Materialismus*) ».

Da questo momento il Dohrn si propone di sostenere la nuova dottrina e il 20 aprile 1867 scrive allo stesso suo amico: « I miei lavori e le mie ricerche debbono servire a confermare le idee di Darwin e guadagnare alle sue idee quei zoologi che non vogliono accettarle ».

Un primo accenno filogenetico il Dohrn lo dà nella sua Dissertazione di Laurea (*Zur Anatomie der Hemipteren*), nella quale, confermando ciò che Siebold aveva sostenuto sopra l'importanza che hanno i caratteri delle parti genitali esterne degli emitteri per distinguere le specie fra loro, il Dohrn richiama anche l'attenzione sulle rassomiglianze loro per stabilirne le parentele.

Ma la prima volta ch'egli formula le sue ipotesi su l'origine genealogica dei crostacei, ragni, centopiedi ed insetti, fu nella conferenza fatta al Congresso annuale che, nel settembre 1867, tenne a Dundee, in Irlanda, la *British Association*, conferenza che, pubblicata nel *Journal of Anatomie and Physiology*, venne lodata da Carlo Darwin, il quale gli scrisse: « È un soggetto molto interessante, e se Ella riesce a dimostrare l'omologia degli organi della testa delle diverse classi (artropodi, crostacei e ragni), potrà avere un trionfo nella scienza ».

Si capisce adunque l'interesse nel Dohrn a riprendere in queste classi gli studî zoologici sotto la scorta dei principî darwiniani, per estenderli di poi nei vertebrati. Ma le ricerche sopra animali morti non erano sufficienti; bisognava continuarle nei vivi, e a tal fine Antonio Dohrn si porta a Kiel per studiare i crostacei.

In quel tempo, avendo contratto nuove amicizie ad Amburgo, venne proposto candidato alla Direzione del Giardino zoologico di quella città. Egli aveva già rinunciato all'offerta di Direttore del Museo zoologico di Calcutta, che, appena laureato, aveva ricevuta dall'Inghilterra. Ora declina la sua candidatura di Amburgo, per istigazione di Ernesto Haeckel e del Gegenbaur, i quali lo sconsigliarono, scrivendogli entrambi che le sue qualità intellettuali

giustificavano migliore impiego, essendo la carriera accademica più adatta alle sue attitudini.

Intanto, lavorando a Kiel e ad Amburgo sentì il bisogno di un Acquario, e però si decise a partire per Glasgow, ove gliene aveva fatto allestire uno il Robertson, che, senza essere scienziato ma semplice commerciante, aveva tuttavia fatte molte indagini nel mare di Millpont, isola vicina a Glasgow.

Dopo tre mesi di soggiorno, lascia la Scozia e si reca a Messina, ove giunse verso la metà di ottobre del 1868 e ove dimorò fino al susseguente gennaio.

Da Messina scrive contento al suo amico, per l'abbondanza degli animali dello Stretto e per essere riuscito a mettere in funzione l'Acquario, che aveva portato seco dalla Scozia; e soggiunge: « Subito nei primi giorni sono riuscito a stabilire, con l'ajuto del mio Acquario, come sia fatto innegabile che certi piccoli crostacei sono le larve dell'Aragosta; perchè li ho veduti uscire dalle ova ed ho potuto osservare lo sviluppo loro. Tale risultato è dovuto alla possibilità di fare queste osservazioni nell'acqua corrente che ho stabilito nell'Acquario. Con l'uso dell'Acquario, costruito in vetro, l'osservazione è facile; e sono del parere che così si è trovato un nuovo mezzo di studio, il quale sarà molto proficuo alle ricerche zoologiche ».

Queste parole rivelano l'osservatore sagace, che dall'Acquario passa a concepire la creazione di un grande Laboratorio scientifico per studiare gli animali così abbondanti nelle acque dello Stretto e dei due Pantani di Messina, a somiglianza del piccolo Laboratorio marittimo, che, da più di un secolo, Lazzaro Spallanzani si era costruito a Portovenere.

A tal fine, nel febbraio 1869, il Dohrn viene nuovamente a Messina per aprire trattative col Municipio, e nel Natale va a Stettino per interessarne il padre, il quale però rifiuta recisamente. Egli non si scoraggia e martella la sua mente per trovare il modo di raggiungere il suo scopo. Al suo ritorno, mentre viaggiava nella diligenza di Apolda, gli balena l'idea che, aggiungendo un Acquario pubblico, poteva procurarsi i mezzi per mantenere il Laboratorio scientifico. Invaso da questa idea, salta dal legno e giunge a piedi a Jena. Ma capisce che Messina non poteva offrire una simile risorsa; e quindi il 13 gennaio 1870 scrive al suo amico: « Voglio fondare a Napoli un grande Acquario, se mi riesce, con azionisti; un piano riservato per Acquarî pubblici, il resto dell'edificio con Laboratorî per gli scienziati ». Però l'idea di fondarlo per azioni fu da lui abbandonata.

Invece, coloro che ne intesero tutta l'importanza scientifica vi concorsero generosamente, e fra' primi, Carlo Darwin, Tommaso Huxley, Michele Forster e Francesco Balfour, con un cospicuo contributo.

Tuttavia le entrate e le contribuzioni non bastarono, anche avendovi impiegato la dote della degna compagna della sua vita. La grandiosa impresa sarebbe fallita se la Germania e l'Italia non fossero venute ad aju-

tarlo largamente, e non si fossero uniti gli altri governi illuminati con l'affitto dei posti di studio pei rispettivi connazionali.

In tal modo Antonio Dohrn riuscì a creare un grande Istituto scientifico internazionale *sui generis*, non ostante tutte le difficoltà, compreso il pregiudizio, propalato dai malevoli, i quali andavano sussurrando ch'egli, anzichè alla scienza, mirasse a farne oggetto di speculazione. Il Dohrn, però, raddoppiando le sue energie, con la cooperazione dei suoi ammiratori ed amici, seppe superare ogni difficoltà; e la Stazione zoologica prosperò a tal punto che egli, coscienzioso ed eccellente amministratore, provvide anche all'assicurazione per gli infortunii e la vecchiaia dei suoi dipendenti.

Vediamo ora qual parte abbia preso Antonio Dohrn nel grande movimento scientifico della zoologia, che avvenne nella seconda metà del XIX secolo, movimento al quale egli fu tra' primi a contribuire, spinto, come si è detto, dalla lettura del libro di C. Darwin sulla origine della specie, e da quello di E. Haeckel su la Morfologia degli organismi; ma come non fu materialista, il Dohrn non fu neanche un darwiniano ortodosso, per quanto fosse grande in lui l'entusiasmo pel Darwin.

Colui, che portò il contributo di fatti al concetto della lotta per l'esistenza e la selezione naturale, fu Fritz Müller, col celebre scritto: *Für Darwin*; dimostrando che, dei numerosi crostacei fossili, sono sopravvissuti quelli che hanno più forte la tanaglia della zampa anteriore, o più sviluppato l'organo dell'olfatto; e stabilendo che, nella lenta e graduale trasformazione delle specie, si abbrevia e si falsifica il processo, o diviene *caenogenetico*, come lo chiama Haeckel, che su questo principio ha fondata la sua legge biogenetica.

Il Dohrn invece nel suo libro, *Der Ursprung der Wirbelthiere und das Princip des Funktionswechsels*, piccolo di mole ma ricco di idee, sostiene che la lenta trasformazione degli organi avviene pel cambiamento delle funzioni, prodotto dall'azione dell'ambiente, secondo la dottrina di Lamark, che fu il primo a rilevare i rapporti fra lo sviluppo individuale (*ontogenetico*) e quello genealogico (*filogenetico*).

In questo libro, nel quale espone le sue vedute generali sulla filogenesi, il Dohrn fa derivare i vertebrati dagli anellidi, contrariamente ad Haeckel, Gegenbaur e Kupffer, che sostennero l'origine di quelli da' tunicati e dall'*Amphioxus*, laddove, pel Dohrn questi, unitamente ai ciclostomi, sarebbero pesci degenerati.

Anch'io ho opinato che i vertebrati abbiano origine dai tunicati; ma sono stato concorde col Dohrn nel principio fondamentale della Teoria della Discendenza, ammettendo con lui che il cambiamento delle funzioni, il quale apporta la trasformazione degli organi, sia dovuto principalmente all'azione dell'ambiente, o, come ho anche detto, alle cause fisico-chimiche, che hanno agito nel tempo; essendo queste le cause meccaniche o reali dei fenomeni della

vita, come dimostrarono Malpighi e Lazzaro Spallanzani che fondarono la Biomeccanica.

Col principio del cambiamento delle funzioni, il Dohrn spiega la formazione dell'attuale bocca dei vertebrati, da un paio di fessure branchiali dell' antico loro progenitore; e così di seguito, tutti gli altri organi si formerebbero sempre da un paio di fessure branchiali.

Già a corollario delle sue ricerche nelle varie classi di artropodi, il Dohrn ammette che pure questi animali si sviluppino dagli anellidi; e nei suoi studî dei crostacei viventi, fatti a Kiel, Glasgow e Messina, poggiandosi su taluni caratteri anatomici, embriologici e paleontologici, sostiene che il Nauplius sia il prototipo dei crostacei, e che il Nauplius, la così detta Archizoea e la Zoea siano forme larvali, rappresentanti animali adulti, vissuti in tempi remoti.

Tali vedute vennero da lui confermate anche nella monografia sui pantopodi, da lui trovati nel golfo di Napoli, illustrata da bellissime tavole e pubblicata nel 1881 nella *Fauna und Flora* (vol. III); nella quale tratta distesamente la filogenesi e la sistematica di questi stranissimi animali. Ma non si occupa dell'istogenesi, e l'anatomia è fatta, com'era uso allora, col metodo della dilacerazione e con l'osservazione degli animali trasparenti. Il metodo delle *sezioni seriali* fu introdotto da me, nella mia Memoria *Sopra lo sviluppo* e *l'anatomia delle Salpe*; mediante queste sezioni ho fatto lo studio della struttura e della conformazione interna, e la ricostruzione degli embrioni. Questo metodo, perfezionato dal Giesbrecht e da Paolo Mayer della Stazione zoologica, servì al Dohrn per i suoi studî su la storia antica (*Studien zur Urgeschichte Wirbelthierkörpers*), dei vertebrati, che pubblicò in 25 Memorie, dal 1882 al 1907, ultimo periodo della sua attività scientifica.

Le ricerche, registrate in queste Memorie, furono intraprese dal Dohrn nell'intento di dimostrare la discendenza dei ciclostomi, dell'*Amphioxus* e dei tunicati, dai pesci, per degenerazione o riduzioni degli organi, ognuno dei quali deriverebbe da un paio di fessure branchiali ridotte; ma egli non dà la prova perentoria nè dell'una nè dell'altra ipotesi. E tuttavia vi sono tali fatti importanti e suggestivi, da lui scoperti nei ciclostomi e nei pesci, che hanno molto contribuito al progresso della Morfologia dei vertebrati, e che conserveranno sempre il loro intrinseco valore scientifico, qualunque siano le teorie dominanti nella scienza.

Il Dohrn descrive con molta cura i primi stadi dello sviluppo della glandula tiroide del *Petromyzon*, dimostrando in modo evidente il graduale passaggio della doccia ipobranchiale, a secrezione mucosa, dei tunicati e dei cefalocordati, nella glandula tiroide dei ciclostomi, la struttura della quale va sempre più complicandosi negli altri vertebrati, nei quali diviene a secrezione interna. Ma egli fa un ragionamento opposto a quello di coloro che ammettono l'omologia fra questi due organi; ed inoltre ravvicina a questi due

organi, la fessura dello spiraglio dei pescecani, la pseudobranchia dei ganoidi e dei teleostei, scoperta da lui anche ne' ciclostomi (*Ammocetes*) e il solco pericoronale dei tunicati e dell'*Amphioxus*; ammettendo che filogeneticamente derivano tutti dal secondo pajo ipotetico che, nei pesci primitivi, si troverebbe fra l'arco iomandibulare e l'arco joideo.

Questo modo di vedere del Dohrn è stato combattuto da alcuni morfologi; però, poggiandosi sull'innervazione dello spiraglio dei pescecani, corrispondente a quella della prima fessura branchiale definitiva degli *ammocetes*, gli stessi oppositori considerano lo spiraglio come omologo a questa fessura e rispettivamente alla pseudobranchia, che Dohrn, partendo da un altro punto di vista, aveva stabilito.

Sono pure interessanti i suoi studi intorno alle pinne natatorie dei pesci, sui quali si fonda per combattere la teoria dell'*Archipterigium* del Gegenbaur; e sopratutto quelli sopra la metameria della testa dei pescecani, nei quali dà una descrizione dei segmenti mesodermici, diversa da quella del van Wejhe, e dimostra che il numero loro è maggiore di quello affermato da quest'autore. Con ciò il Dohrn dà un colpo valido contro la teoria segmentale del Gegenbaur, che combatte con altri argomenti nei suoi studi.

Da questa lunga serie di lavori intorno ai ciclostomi e ai pesci si vede pertanto nel Dohrn l'osservatore sagace e geniale, nonostante fosse dominato dalle sue idee speculative. Egli fu portato alla speculazione dagli studi filosofici, specialmente dalla sua grande coltura nel campo della Filosofia naturale. Se non che l'indole della sua mente e la tempra del suo carattere lo richiamarono sempre all'osservazione ed interpretazione dei fatti, sui quali si fondano le leggi della natura; essendo anche egli conscio che le cose fondate in natura, crescono, e raggiungono la mèta, laddove quelle che si poggiano sopra le opinioni, variano, non aumentano.

E però egli peregrinò pei mari in cerca di animali viventi, che per la trasparenza loro sono favorevoli alle osservazioni; adattò l'Acquario, costruendolo in vetro e stabilendovi l'acqua corrente per la ricerca degli animali marini in tutti i gradi di sviluppo; e istituì i Laboratori scientifici, che mise a disposizione degli scienziati, nella stazione zoologica di Napoli: dapprima con indirizzo morfologico; poi, veduti i progressi che nell'indirizzo fisiologico ha fatto e fa sempre più, via via che si vanno perfezionando i mezzi di indagine, la Biologia, ingrandì l'edificio per collocarvi i laboratorî di Fisiologia sperimentale e Chimica fisiologica, che vennero inaugurati nel 1906.

Antonio Dohrn è sparito dalla scena del mondo; ma per la fermezza dei propositi, per l'amore della verità e la grande liberalità, il suo nome resterà ad esempio nella storia, finchè la scienza e il disinteresse saranno le fonti dell'umano incivilimento.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando quelle dei Soci CIAMICIAN, ENRIQUES, CAPELLI, GIGLIOLI; fa inoltre menzione dell'opera del prof. PERRONITO: *La malattia dei minatori. Dal S. Gottardo al Sempione*; della *Relazione* della Commissione per l'ordinamento degli studi secondari in Italia; e delle *Osservazioni magnetiche* fatte dalla spedizione antartica inglese del 1901-1904, e pubblicate per cura della Società Reale di Londra.

Il Socio VOLTERRA presenta il 1° numero del *Bollettino* del Comitato talassografico della Società italiana per il progresso delle Scienze; accenna alla costituzione del Comitato stesso per lo studio dei mari italiani e comunica che due crociere furono già eseguite nel mare Adriatico, e che se ne sta organizzando una terza per la prossima primavera. Coglie l'occasione per ringraziare l'Accademia del contributo dato al Comitato per l'esecuzione delle sue ricerche.

CONCORSI A PREMI

Il Presidente BLASERNA comunica che con Regio Decreto del 26 ottobre 1909 fu eretta in Ente morale la Fondazione « Alfonso Sella » e ne venne approvato lo Statuto.

CORRISPONDENZA

Il PRESIDENTE dà comunicazione del programma del 3° Congresso internazionale di Botanica che si terrà in Bruxelles nel maggio del corrente anno.

Il Segretario MILLOSEVICH dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La R. Società di zoologia di Amsterdam; la Società Reale di Vittoria; la Società delle scienze di Varsavia; la Società geologica di Manchester: la Società geografica del Cairo; la Commissione geologica svizzera di Zurigo; il Museo di S. Paulo; la Biblioteca Bodleiana di Oxford; gli Osservatorii di Parigi e di San Fernando.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 1°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVII. (1892-1909). Fasc. 6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. Fasc. 11°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 gennaio 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CONCORSI A PREMI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 16 gennaio 1910.* N. 2.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 *gennaio* 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 2°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO
PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1910.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità.* Nota del Socio Carlo Somigliana.

In alcuni lavori recentemente pubblicati [1] io ho studiato da un punto di vista puramente meccanico il problema dell'equivalenza fra azioni a distanza ed azioni propagantisi da punto a punto attraverso ad un mezzo elastico, e sono riuscito a dimostrare la possibilità di una tale equivalenza con una notevole generalità e senza alcuna ipotesi speciale sulla natura del mezzo. Ho inoltre notato che mediante l'ordinaria teoria dell'elasticità non è possibile un'applicazione dello stesso procedimento a campi di forze magnetiche, in quanto quella teoria è basata sull'ipotesi che nessuna reazione elastica si manifesti quando le molecole del corpo deformato sono sollecitate a ruotare, senza modificazioni di forma, mentre questo è appunto il modo di agire delle forze magnetiche, almeno secondo i concetti attualmente accettati.

Si presentava quindi come necessaria una estensione della teoria classica dell'elasticità.

[1] *Sulla teoria Maxwelliana delle azioni a distanza,* Rend. Acc. dei Lincei, 1907; *Sul problema statico di Maxwell,* Memorie id. id., 1909; *Sopra una rappresentazione meccanica di alcuni campi di forza,* Nuovo Cimento, ser. V, vol. XVII, 1909.

Ora l'opportunità di una tale estensione fu già indicata da parecchi elasticisti e fu anche studiata sotto punti di vista assai diversi ed a proposito di questioni anche non direttamente concernenti le proprietà elastiche dei corpi ([1]). Tuttavia i risultati ottenuti non sono sempre concordanti nè dànno luogo ad una teoria definitiva; per cui mi è sembrato conveniente riprendere la questione per stabilire le equazioni differenziali nel modo più semplice e ricercare la forma speciale che esse assumono nel caso dell'isotropia.

Una tale ricerca può anche giustificarsi in quanto può essere applicata allo studio di alcune deformazioni che forse non sono state prese finora in diretta considerazione. Immaginiamo infatti un corpo magnetico immerso in un campo magnetico. Se esso è libero di muoversi intorno al suo centro di gravità assumerà una certa orientazione dipendente dal campo. Ma se noi con mezzi meccanici impediamo un tale movimento esso dovrà, in generale, deformarsi, anche astrazion fatta dal ben noto fenomeno della magnetostrizione. Una tale deformazione non può attribuirsi a forze agenti sugli elementi di massa, nè a forze superficiali, ma a momenti di rotazione agenti sugli elementi stessi, mentre la teoria elastica ordinaria presuppone che tali momenti non abbiano alcuna azione deformante.

Ci troviamo quindi di fronte ad una questione che non sembra possa trovare spiegazione cogli antichi concetti, e possiamo quindi sperare che la teoria di cui ci occupiamo sia suscettibile di una conferma sperimentale, e forse possa portare qualche contributo utile intorno al modo di agire delle forze magnetiche.

I. L'ipotesi che porremo a base delle nostre considerazioni è la più semplice che si possa fare per rappresentare il fatto che esistono reazioni elastiche alle rotazioni molecolari. Supporremo che l'energia elastica elementare unitaria W, dipenda, oltre che dalle sei componenti di deformazione, anche dalle tre componenti della rotazione elementare. Introduciamo le notazioni solite: u, v, w per le componenti dello spostamento,

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad z_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$y_z = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad z_x = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \qquad x_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

([1]) Senza discutere qui le varie teorie, citerò i lavori principali riferentisi a questo argomento: Voigt, *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*, Abhand. K. Ges., Göttingen, 1887; Larmor, *The equations of Propagation of Disturbances in Girostatically Loaded Media and of the Circular Polarizzazion of Light*, Proc. London Math. Soc., 1891; Padova, *Interpretazione meccanica delle formole di Hertz*, Rend. Acc. dei Lincei, 1891; Lord Kelvin, *Baltimore Lectures*, London, 1904 (Lecture XX); Combiebac, *Sur les équations générales de l'élasticité*, Bulletin de la Soc. Math. de France, t. XXX, 1902; E. J. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Paris, 1909.

per le componenti di deformazione, e indichiamo con r_x, r_y, r_z le componenti della rotazione elementare, moltiplicata per 2:

$$r_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \qquad r_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad r_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'energia elastica W dipenderà, per quello che si è detto, da queste nove variabili ed una variazione qualsiasi di essa sarà data da una espressione della forma seguente:

$$\text{(1)} \quad \begin{aligned} \delta W = {} & W_1 \delta x_x + W_2 \delta y_y + W_3 \delta z_z + W_4 \delta y_z + W_5 \delta z_x + W_6 \delta x_y + \\ & + W_7 \delta r_x + W_8 \delta r_y + W_9 \delta r_z. \end{aligned}$$

Indichiamo con X, Y, Z le componenti unitarie delle forze di massa, con L, M, N le componenti unitarie delle forze superficiali, e con $2M_x$, $2M_y$, $2M_z$ le componenti unitarie dei momenti, che, secondo il concetto già indicato, possono eventualmente agire sugli elementi di volume. Indicando con ϱ la densità, con S il volume occupato dal corpo, con s la superficie, il principio dei lavori virtuali ci porta allora, per l'equilibrio, alla relazione seguente:

$$\text{(2)} \quad \begin{aligned} & \int_S \varrho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, dS + \int_s (L\delta u + M\delta v + N\delta w)\, ds + \\ & + \int_S (M_x \delta r_x + M_y \delta r_y + M_z \delta r_z)\, dS - \int \delta W dS = 0. \end{aligned}$$

Se in questa equazione sostituiamo il valore (1) di δW e trasformiamo coi soliti metodi gli integrali in modo da rendere lineari rispetto a δu, δv, δw le funzioni che compaiono sotto i segni d'integrazione, otteniamo subito che nello spazio S devono essere soddisfatte le seguenti equazioni, che vengono a sostituire le ordinarie equazioni indefinite dell'equilibrio elastico:

$$\text{(3)} \quad \begin{aligned} & \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial (W_6 - W_9)}{\partial y} + \frac{\partial (W_5 + W_8)}{\partial z} + \varrho X + \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0 \\ & \frac{\partial (W_6 + W_9)}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial (W_4 - W_7)}{\partial z} + \varrho Y + \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0 \\ & \frac{\partial (W_5 - W_8)}{\partial x} + \frac{\partial (W_4 + W_7)}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} + \varrho Z + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Per stabilire le equazioni che debbono essere soddisfatte alla superficie, conviene dapprima osservare che fra gli integrali di superficie provenienti dal primo membro della (2) vi è il seguente:

$$\text{(4)} \quad \begin{aligned} \int_s \Bigg[& \left(M_y \frac{\partial z}{\partial n} - M_z \frac{\partial y}{\partial n} \right) \delta u + \left(M_z \frac{\partial x}{\partial n} - M_x \frac{\partial z}{\partial n} \right) \delta v + \\ & + \left(M_x \frac{\partial y}{\partial n} - M_y \frac{\partial x}{\partial n} \right) \delta w \Bigg] ds. \end{aligned}$$

Ora noi abbiamo considerato i momenti M_x, M_y, M_z come agenti sugli elementi di volume dS, nè sappiamo quale significato si possa attribuire ai prodotti $M_x ds$, $M_y ds$, $M_z ds$. D'altra parte, come osserva il Voigt (Mem. cit., pag. 11) noi non conosciamo alcun mezzo sperimentale per produrre dei momenti di rotazione agenti sopra elementi superficiali, e conviene quindi per ora *considerare quei prodotti come nulli.*

Le equazioni alla superficie che si ottengono con questa ipotesi sono allora:

$$
(3') \qquad \begin{aligned}
&W_1 \frac{\partial x}{\partial n} + (W_6 - W_9) \frac{\partial y}{\partial n} + (W_5 + W_8) \frac{\partial z}{\partial n} + L = 0 \\
&(W_6 + W_9) \frac{\partial x}{\partial n} + W_2 \frac{\partial y}{\partial n} + (W_4 - W_7) \frac{\partial z}{\partial n} + M = 0 \\
&(W_5 - W_8) \frac{\partial x}{\partial n} + (W_4 + W_7) \frac{\partial y}{\partial n} + W_3 \frac{\partial z}{\partial n} + N = 0 .
\end{aligned}
$$

Il sig. Combiebac (nel lavoro citato) conserva nelle equazioni al contorno i termini provenienti dall'integrale (4); il che, secondo un punto di vista puramente analitico, è sempre lecito. Però conviene osservare che in questo caso, oltre la difficoltà già accennata, non è possibile dedurre senza altro dalle (3') le relazioni che dànno le espressioni delle componenti di tensione, relative ad un elemento superficiale qualsiasi. Infatti in queste equazioni noi possiamo identificare le L, M, N alle componenti di tali tensioni relative ad un elemento superficiale interno al corpo, come si fa ordinariamente, ma non sapremmo a quale grandezza meccanica identificare le M_x, M_y, M_z relative ad un tale elemento.

Nel caso nostro invece, ammettendo, come di solito, che un elemento superficiale interno sia in equilibrio sotto l'azione di due tensioni elastiche uguali ed opposte, ed indicando con X_n, Y_n, Z_n le componenti della tensione relativa all'elemento di normale n, dalle (3') applicate ad elementi superficiali le cui normali siano parallele agli assi coordinati, troviamo subito

$$
\begin{array}{lll}
X_x = W_1 & Y_x = W_6 + W_9 & Z_x = W_5 - W_8 \\
X_y = W_6 - W_9 & Y_y = W_2 & Z_y = W_4 + W_7 \\
X_z = W_5 + W_8 & Y_z = W_4 - W_7 & Z_z = W_3
\end{array}
$$

e quindi ricordando che, pel teorema di lord Kelvin, δW deve essere un differenziale esatto, si hanno, fra le componenti di tensione e le derivate dell'energia le relazioni

$$
(5) \qquad \begin{array}{lll}
X_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_x} & Y_y = \dfrac{\partial W}{\partial y_y} & Z_z = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} \\[2ex]
Y_z = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} - \dfrac{\partial W}{\partial r_x} & Z_x = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} - \dfrac{\partial W}{\partial r_y} & X_y = \dfrac{\partial W}{\partial x_y} - \dfrac{\partial W}{\partial r_z} \\[2ex]
Z_y = \dfrac{\partial W}{\partial y_z} + \dfrac{\partial W}{\partial r_x} & X_z = \dfrac{\partial W}{\partial z_x} + \dfrac{\partial W}{\partial r_y} & Y_x = \dfrac{\partial W}{\partial x_y} + \dfrac{\partial W}{\partial r_z} .
\end{array}
$$

Le differenze $Y_z - Z_y$, $Z_x - X_z$, $X_y - Y_x$ non sono quindi nulle, come nella teoria ordinaria, ma si ha

$$\tfrac{1}{2}(Z_y - Y_z) = \frac{\partial W}{\partial r_x} \quad , \quad \tfrac{1}{2}(X_z - Z_x) = \frac{\partial W}{\partial r_y} \quad , \quad \tfrac{1}{2}(Y_x - X_y) = \frac{\partial W}{\partial r_z}$$

e inoltre

$$\tfrac{1}{2}(Z_y + Y_z) = \frac{\partial W}{\partial y_z} \quad \tfrac{1}{2}(X_z + Z_x) = \frac{\partial W}{\partial z_x} \quad \tfrac{1}{2}(Y_x + X_y) = \frac{\partial W}{\partial x_y} .$$

È questa, a nostro avviso, la forma più semplice che può assumere la teoria delle tensioni elastiche e dell'equilibrio quando si ammetta che la energia venga a dipendere anche dalle componenti di rotazione.

II. Si presenta ora la questione di determinare le varie espressioni che spettano alla funzione W (per la quale si assume, per ben note ragioni, una forma quadratica) quando il materiale elastico ammette degli elementi di simmetria.

Non tratterò la quistione in generale, sebbene essa non presenti alcuna difficoltà teorica; mi limiterò, per brevità, a considerare il caso che esista un asse di isotropia, per dedurne poi l'espressione di W, che è la più interessante, quella corrispondente al caso dell'isotropia completa.

Le formole di trasformazione per le sei componenti di deformazione, quando gli assi coordinati ruotano di un angolo α intorno all'asse delle z, si possono scrivere nella forma seguente, da me usata in varie occasioni [1]

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad x'_x - y'_y + i x'_y = e^{2i\alpha}(x_x - y_y + i x_y) \\
&(b) \qquad x'_x + y'_y = x_x + y_y \\
&(c) \qquad z'_x + i z'_y = e^{i\alpha}(z_x + i z_y) \qquad\qquad i = \sqrt{-1} \\
&(d) \qquad z'_z = z_z
\end{aligned}$$

mentre per quelle relative alle rotazioni si ha

$$\begin{aligned}
&(e) \qquad r'_x + i r'_y = e^{i\alpha}(r_x + i r_y) \\
&(f) \qquad r'_z = r_z .
\end{aligned}$$

Si decompongono così in tre sostituzioni ortogonali di tre variabili sotto forma canonica. La W dovrà, nel caso della isotropia assiale, essere formata linearmente colle espressioni quadratiche invariantive per una rotazione arbitraria attorno all'asse delle z, posto di scegliere questo asse come asse di isotropia. Tali espressioni si ottengono eliminando α fra le relazioni precedenti e le loro coniugate. Si trovano così, come è ben noto, cinque inva-

[1] *Sul potenziale elastico,* Annali di Matematica, 1901.

rianti quadratici (di rotazione) formati colle sei componenti di deformazione, cioè

$$I_1 = (x_x + y_y)^2 \qquad I_2 = z_z^2 \qquad I_3 = (x_x + y_y)\, z_z$$
$$I_4 = z_x^2 + z_y^2 \qquad I_5 = (x_x - y_y)^2 + x_y^2 \, .$$

Restano ora da trovarsi gli invarianti che dipendono anche da r_x, r_y, r_z.

Dalle (b) (d) (e) (f) risultano subito gli invarianti quadratici

$$R_1 = r_x^2 + r_y^2 \qquad R_2 = r_z^2 \qquad R_3 = r_z z_z \qquad R_4 = (x_x + y_y)\, r_z \, .$$

Per moltiplicazione dalle (c) e dalla coniugata della (e) si ha inoltre

$$(z'_x + i z'_y)(r'_x - i r'_y) = (z_x + i z_y)(r_x - i r_y)$$

da cui risultano gli altri due invarianti

$$R_5 = z_x r_x + z_y r_y \qquad R_6 = z_y r_x - z_x r_y \, .$$

Non è difficile vedere che dalle combinazioni delle relazioni precedenti non è possibile dedurre altre formazioni invariantive e possiamo quindi concludere:

La energia elastica W, *nell'ipotesi che essa dipenda dalle sei componenti di deformazione e dalle tre componenti di rotazione, quando esiste un asse d'isotropia, è funzione lineare dei cinque invarianti* I, *e dei sei invarianti* R, *ora determinati. Conterrà quindi undici coefficienti.*

È assai facile ora dedurre da questa espressione quella dell' isotropia completa, dovendo tale espressione essere un caso speciale della prima.

È noto che quando W non contiene r_x, r_y, r_z si riduce, nel caso dell' isotropia, ad una funzione lineare dei due invarianti

$$(x_x + y_y + z_z)^2 \quad , \quad x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2) \, .$$

Basterà quindi considerare la parte di W che è formata cogli invarianti R. Scrivendola sotto la forma

$$c_1 R_1 + c_2 R_2 + c_3 R_3 + c_4 R_4 + c_5 R_5 + c_6 R_6$$

essa dovrà rimanere inalterata scambiando fra loro comunque gli assi. Scambiando gli assi delle z e delle x, si vede facilmente che dovrà essere

$$c_1 = c_2 \qquad c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$$

e che perciò deve ridursi alla forma

$$c_1(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)$$

la quale è evidentemente isotropa.

Concludiamo quindi:

La forma generale dell'energia W, *quando dipende dalle componenti di deformazione e di rotazione, nel caso dell'isotropia è formata linearmente con tre invarianti e può porsi sotto la forma:*

$$2W = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2) + \\ + \nu(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2).$$

In questa espressione alle condizioni solite per la positività di W, dovremo aggiungere l'altra

$$\nu \geq 0.$$

Le equazioni a cui dà luogo questa forma dell'energia elastica si ottengono immediatamente.

Osserviamo dapprima che per le componenti delle tensioni le (5) dànno

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu x_x \qquad Y_y = \lambda\theta + 2\mu y_y \qquad Z_z = \lambda\theta + 2\mu z_z$$

ove θ indica la dilatazione cubica.

Queste componenti quindi non differiscono dalle ordinarie. Per le altre si ha

$$\begin{array}{ll} Y_z = \mu y_z - \nu r_x & Z_y = \mu y_z + \nu r_x \\ Z_x = \mu z_x - \nu r_y & X_z = \mu z_x + \nu r_y \\ X_y = \mu x_y - \nu r_z & Y_x = \mu x_y + \nu r_z \end{array}$$

e le equazioni indefinite d'equilibrio (5) si riducono alla forma seguente:

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_y}{\partial z} - \frac{\partial r_z}{\partial y}\right) + \varrho X + \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_z}{\partial x} - \frac{\partial r_x}{\partial z}\right) + \varrho Y + \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + (\mu + \nu)\left(\frac{\partial r_x}{\partial y} - \frac{\partial r_y}{\partial x}\right) + \varrho Z + \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 0.$$

Le equazioni (3') al contorno, con le solite riduzioni, divengono

$$\lambda\theta\frac{\partial x}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_z\frac{\partial y}{\partial n} - r_y\frac{\partial z}{\partial n}\right) + L = 0$$

$$\lambda\theta\frac{\partial y}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_x\frac{\partial z}{\partial n} - r_z\frac{\partial x}{\partial n}\right) + M = 0$$

$$\lambda\theta\frac{\partial z}{\partial n} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial n} + (\mu - \nu)\left(r_y\frac{\partial x}{\partial n} + r_x\frac{\partial y}{\partial n}\right) + N = 0.$$

Diverse considerazioni si possono fare intorno a queste equazioni generalizzate dell'equilibrio nel caso dell'isotropia. Ci limiteremo a notare che la forma analitica della parte dei primi membri che dipende da u, v, w non differisce dalla ordinaria. Esse ammettono quindi quelle soluzioni singolari mediante le quali è possibile arrivare alla rappresentazione generale dei loro integrali mediante integrali definiti. Segue da ciò la possibilità di estendere ai campi magnetici di forza i metodi stessi coi quali è possibile ottenere la rappresentazione mediante tensioni elastiche dei campi ordinarî, ed arrivare così alla soluzione generale del problema di cui abbiamo parlato da principio.

In secondo luogo noteremo che le equazioni precedenti, anche quando i momenti M_x, M_y, M_z sono nulli, se la costante ν è differente da zero, non si riducono a quelle ordinarie. Quindi per corpi, pei quali questo fatto si verifica, le leggi di deformazione potranno essere differenti da quelle dedotte dalla teoria ordinaria anche quando le cause della deformazione sono le solite forze o tensioni superficiali.

Questa circostanza potrà forse facilitare la ricerca che si presenta ora spontanea, quella cioè di vedere se esistano in natura materiali, per i quali il coefficiente ν sia differente da zero e, nell'ipotesi favorevole, immaginare dei procedimenti sperimentali atti a determinare i valori di un tale coefficiente.

Astronomia. — *Osservazioni astronomiche e fisiche sulla topografia e costituzione del pianeta Marte fatte nella specola Reale in Milano coll'equatoriale Merz-Repsold durante l'opposizione del 1890.* Memoria VII[a] del Socio G. V. SCHIAPARELLI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Il Segretario MILLOSEVICH nel presentare la VII[ma] Memoria del Socio Senatore GIOVANNI SCHIAPARELLI riguardante le osservazioni e i disegni fatti nell'apparizione del 1890, rileva l'opera insigne compiuta dallo Schiaparelli dal 1827 in poi nei riguardi di Marte e ricorda che, volendo suddividere in periodi le nostre cognizioni sul disco del pianeta, il periodo Schiaparelliano resterà sempre il più insigne come quello che ci rivelò sul disco minimi particolari, i quali pur potranno essere in avvenire più minutamente analizzati e decomposti. L'Accademia dopo alcune parole del Socio F. MARIOTTI e del Vicepresidente F. D'OVIDIO, le quali lumeggiano la grande figura dell'astronomo di Savigliano, delibera d'inviare un telegramma di ringraziamento al Socio Schiaparelli per avere offerto alla nostra Accademia l'ultima sua Memoria sulle sue ricerche sul disco di Marte.

Biologia — *Osservazioni intorno al fenomeno della rudimentazione nei Fillosserini* (Nota 23ª). Nota del Socio B. Grassi.

Nelle fillosserine si incontrano di frequente interessanti casi di rudimentazione, i quali furono oggetto di ricerche speciali, oltre che da parte mia, da parte anche della mia assistente dott.ª A. Foà e della mia allieva dott.ª B. Bonfigli.

Trattasi di riduzioni, evidentemente collegate alla vita parassitaria. Tra esse sono vistose due:

I) quella delle ali;

II) quella del tubo digerente.

Per un adeguato valutamento sì dell'una che dell'altra occorre tener presenti tutti gli *Aphidina* (ricordo che questa superfamiglia dividesi in tre famiglie *Coccidae*, *Aphididae* e *Chermesidae*, la quale ultima comprende due sottofamiglie: *Chermesinae* e *Phylloxerinae*).

Nei sessuali delle *Phylloxerinae* mancano stiletti e labbro inferiore; il tubo intestinale esiste, ma impervio alle estremità sì anteriore che posteriore. Notasi che i sessuali hanno invece un apparato digerente capace di funzionare nelle *Chermesinae* e in una gran parte delle *Aphididae* (una piccola parte di queste comportasi come le *Phylloxerinae*).

Per quanto finora ho veduto, la riduzione del tubo digerente è giunta press'a poco allo stesso grado non soltanto in tutti gli individui di una determinata specie, ma anche in tutte le specie da noi studiate.

Tra i fatti che possono concorrere a spiegare questa riduzione, ricordo i seguenti:

1° che non abbiamo mai trovato alcuna fillossera coll'ano pervio, qualunque fosse lo stadio e la forma presa in esame;

2° che la fillossera sessupara, giunta al periodo adulto (definitivo), cioè dopo le quattro mute, può riprodursi senza essersi nutrita. Ciò abbiamo accertato per le alate della Fillossera (*Viteus*) della vite, della *Ph. quercus*, della *Paraphylloxera glabra*, della *Acanthaphis spinulosa*; alcuni individui furono però veduti qualche volta fissati col rostro, non sappiamo se per trovare appoggio, come fanno le ibernanti, ovvero allo scopo di nutrirsi. L'*Acanthochermes quercus* poi, che fa le uova di sessuali in abito di attera sessupara, certamente non si nutre mai. Eppure tutte le alate e le attere sessupare hanno rostro e intestino capaci di funzionare, per quanto si può giudicare da un esame sommario.

L'ano è chiuso evidentemente in rapporto alla qualità del nutrimento assunto dall'animale, e ciò non fa meraviglia; sorprende molto invece la presenza di tutto il digestorio in forme, che non assumono cibo, mentre si aspetterebbe di trovarlo in via di riduzione.

Per intavolare intorno a questi fenomeni una esauriente discussione, occorrerebbe però anche determinare la presenza, o l'assenza di sacchi digerenti, ma ciò non è possibile senza ricorrere a difficilissime ricerche fisiologiche; perciò preferisco rivolgere l'attenzione all'altro gruppo di rudimentazioni, cioè alla riduzione delle ali, comitata da altre riduzioni.

Nell'*Acanthochermes quercus* non esistono che attere sessupare in abito larvale. Nella *Phylloxerella confusa*, nella *Phylloxerina salicis*, nello *Pseudochermes populi*, troviamo una simile condizione di cose, però le forme adulte sono in parte virginopare e in parte sessupare. Nelle altre fillossere esistono attere e alate; le attere in generale virginopare, le alate virginopare e sessupare, o solo sessupare. I sessuali di tutte le forme, eccezione fatta dell'apparato boccale, hanno molti caratteri comuni colle attere sessupare o virginopare. È importante ricordare che, per arrivare all'alata occorrono quattro mute, e altrettante per arrivare alle attere virginopare, o sessupare, o ai sessuali, il che dimostra che in nessun caso siamo davanti a vere larve che diventano sessualmente mature (progenesi). Secondo la teoria dell'evoluzione, dobbiamo ritenere *a priori* che tutte le qui denominate forme originariamente abbiano avute le ali e secondariamente le abbiano perdute. La proposizione inversa che, cioè, originariamente non abbiano avuto ali, sembra infatti inverosimile perchè se è vero che in tutte le *Chermesidae* i sessuali sono sforniti di ali, troviamo però maschi forniti di ali nelle affini *Aphidinae* (sempre) e *Lachninae* (ora sì, ora no) ecc.; e d'altra parte in molte altre *Phylloxerinae*, come nelle *Chermesinae*, troviamo sessupare e talora anche virginopare fornite di ali.

Un interesse speciale nelle *Phylloxerinae* è destato da circostanze, le quali tendono a far ritenere che il fenomeno sia ancora in corso, che, cioè, noi in certo modo assistiamo alla riduzione e scomparsa delle ali. Queste circostanze sono le seguenti: si trovano nelle *Ph. quercus* rare alate virginopare e sessupare (queste tra le ultime sviluppatesi sulle querce a foglie caduche), aventi ali interamente sviluppate, ben spiegate, ma piccoline. Altre volte le ali restano raggrinzate e l'animale non può volare; il fenomeno, eccezionale nella *Ph. quercus*, diventa costante nelle alate sessupare della *Paraphylloxera glabra* figlie della fondatrice, mentre torna ad essere eccezionale, fino a mancare del tutto nelle nipoti, pronipoti ecc.

Partendo da questo estremo — insetto perfetto colle ali interamente sviluppate, ma non ben distese e incapaci del volo — arriviamo alle sessupare e virginopare attere attraverso moltissime forme, che diventano adulte in abito più o meno spiccatamente di ninfe e che per brevità denominiamo *ninfali*.

Avanti di scendere ai particolari noto: 1) che le forme ninfali compaiono in tutte le fillossere da noi studiate aventi forme alate; 2) che in alcune specie sono sessupare, in altre virginopare (*Acanthaphis spinulosa*, *Viteus vastator*, almeno nella massima parte, e *Phylloxera quercus*; 3) che subiscono quattro mute come tutte le altre forme, attere, alate, o sessuali;

4) che in generale una singola forma ninfale fa un numero di uova minore di quello della virginopara attera e maggiore di quello dell'alata sessupara.

Il fenomeno, che caratterizza le ninfali, è la progenesi, cioè l'anticipata maturazione degli organi sessuali, sia che si tratti di sessupare, sia che si tratti di virginopare; questa può avvenire nelle più svariate epoche, cioè da quando non c'è ancora alcun carattere ninfale a quando l'animale è già quasi alato perfetto. Si può dire che, a seconda che l'anticipazione è grande, mediocre, piccola o minima, si conservano caratteri di larva, di preninfa, di ninfa giovane, di ninfa vicina a diventare insetto perfetto, o infine non mancano caratteri di insetto perfetto. Così possono le forme in discorso avere tutti i caratteri larvali, ovvero alludere alla ninfa soltanto per le antenne più lunghe, carattere a cui possono aggiungersi soltanto alcune faccette (rappresentanti ommatidi) dell'occhio composto, ovvero un maggior numero di faccette e traccia delle ali, ovvero faccette sempre più numerose, anche ocelli e accenno delle ali più sviluppato ecc., fino ad avere individui col terzo articolo delle antenne fornito di due rinari, coi peli e coi sensilli delle ali, colla testa, col torace, coll'addome, colle zampe ecc., in tutto come nelle alate, da cui si differenziano perciò quasi soltanto per le ali ridotte a monconi.

Si danno delle differenze, che, per quanto abbiamo veduto, hanno valore specifico, così nella *Ph. quercus* precede lo sviluppo degli ocelli a quello degli occhi composti e quindi anche delle ali. Nella *Moritziella corticalis* può trovarsi il torace in condizioni, che si avvicinano a quelle dell'alata, senza traccia di ali, con ocello impari ecc.

In una singola specie possono verificarsi eccezionali arresti di sviluppo, così può mancare l'accenno delle ali anteriori, o di quelle posteriori, ovvero possono manifestarsi dissimmetrie (due rinari al terzo articolo dell'antenna da un lato e uno dall'altro; un numero differente di faccette nell'occhio composto da un lato e dall'altro). Singolare è il fatto che dall'ultima muta (quarta) può venir fuori un individuo coi monconi delle ali più corti.

È utile qui distinguere le varie forme delle *Phylloxerinae* in tre gruppi (lasciando da parte i sessuali che, come ho detto, sono tutti atteri):

I) le forme di una data specie si possono giudicare diventate tutte definitivamente attere (*Acanthochermes*, *Phylloxerella confusa* ecc.);

II) una forma di tutte le specie si può giudicare diventata definitivamente attera (la fondatrice); un'altra forma quasi diventata definitivamente attera (virginopara attera);

III) altre forme delle stesse specie sembrano avviate a diventare attere (ninfali sessupare, o virginopare).

Sorge ora la domanda se e come la scomparsa delle ali riesca di giovamento alle fillosserine. Non può cadere dubbio che sia stato favorevole alla propagazione della specie *la perdita delle ali limitata a certe forme*, destinate a sfruttare l'abbondanza di nutrimento fornito dalla pianta ospite; esse hanno acquistata maggiore prolificità, più rapidamente raggiungono lo

stadio definitivo e non si espongono ai pericoli della cattiva stagione. Di qui però al dimostrare l'utilità della scomparsa completa, o della tendenza alla scomparsa completa di *tutte* le alate, molto ci corre.

Potrebbe forse desumersi l'utilità o meno delle ali dalla diffusione delle varie specie?

A tutta prima tenendo presente la grande diffusione della *Ph. glabra*, della *Ph. quercus*, dell'*A. spinulosa*, specie (con forme alate), che noi abbiamo trovate dappertutto nell'Italia media e la relativa limitazione dell'*A. quercus* (senza alate) che per es. non abbiamo trovato a Fauglia e del *Ph. italicum* (con rarissime alate) che nell'Agro Romano abbiamo trovato solo al Bivio di Grottaferrata, e che non abbiamo trovato in Toscana, ci sembrerebbe di poter conchiudere che le specie con alate fossero più diffuse; ma la *Ph. salicis* è altrettanto diffusa, pur non avendo alate, mentre l'affine *Ps. populi* del pari senza alate è molto meno diffuso. Tenendo presente anche tutte le altre specie, si può conchiudere che dal criterio della diffusione non si può dedurre certamente l'utilità della scomparsa delle ali.

Si può tentare di considerare il vantaggio, o meno, della presenza delle ali sotto un altro aspetto, mettendolo, cioè, in rapporto col già accennato andamento della stagione. Così, per citare un esempio, quest'anno, per la stagione piovosa e i forti venti a Roma pochissime alate virginopare arrivarono a passare dai lecci alle querce; in questo caso le ali sono state dannose alla specie, senonchè l'anno scorso il tempo è stato quasi sempre bello e le alate hanno infettato molto le querce. Evidentemente anche questo secondo argomento non riesce perciò più decisivo del primo.

Si può supporre che le ali scompaiano a preferenza in quelle forme che si propagano poco e perciò hanno meno bisogno di passare da una pianta all'altra e che invece le ali si conservino in quelle forme che, riproducendosi molto copiosamente, in breve tempo invadono tutta la pianta e sentono la necessità di migrare; purtroppo vi sono fatti che non si accordano con queste presunzioni, così per es. il *Ph. italicum* si propaga moltissimo e pur non presenta alate che molto eccezionalmente.

Si potrebbe obbiettare che non è giusto di tener conto soltanto delle alate, molti altri fenomeni (es. la diffusione delle Fillosserine per mezzo delle prime larve, la conservazione di anno in anno per mezzo delle ibernanti, le varie cause nemiche) potendo influire sull'abbondanza o meno degli individui di una data specie. È un fatto però che noi oggi conosciamo le nostre fillosserine in modo sufficiente per poter valutare anche queste circostanze. Orbene, tutto ponderato, non possiamo azzardarci a conchiudere che quella tendenza alla soppressione delle alate, a cui accenna il ciclo evolutivo delle varie fillossere, debba con sodo fondamento venir giudicata utile, e fa molto meraviglia che ci venga meno il criterio utilitario in questo caso, ove si sarebbe creduto di trovarlo evidente.

Il fenomeno che abbiamo esposto, cioè la maturazione sessuale degli in-

vidui più o meno precoce, trova riscontro in quanto avviene nei Termiti; quivi però l'utilità della riduzione delle ali è evidentissima, perchè altrimenti, la colonia di *Calotermes flavicollis* non riparerebbe alla perdita del re e della regina con re e regina di supplemento e i *Termes lucifugus*, le cui alate vanno tutte irremissibilmente perdute, si estinguerebbero.

Passiamo ora ad apprezzare i differenti gradi di rudimentazione che sopra abbiamo segnalato in una medesima specie.

Non si può parlare di graduale scomparsa per effetto del fattore Lamarckiano, ossia del disuso, e ciò, dopo le spiegazioni che ho più sopra fornite, è evidente senza che occorrano commenti; si può anzi osservare che fra i casi, in cui la spiegazione della riduzione per effetto del disuso, si esclude con certezza, questo delle ali dei fillosserini è certamente uno decisivo. Che se invece del Lamarckismo invochiamo il Weismannismo (selezione germinale), subito ci accorgiamo che anch'esso non rende conto del fenomeno. Ciò che si verifica nelle ali delle Fillosserine non è una variazione dei supposti determinanti — per effetto della selezione germinale — in continua oscillazione discensionale, non è una corrente discendente di ulteriori variazioni, rappresenta invece qualcosa di saltuario. Non so se il Weismann sottilizzando potrebbe trovare modo di far rientrare in apparenza anche questa saltuarietà nella selezione germinale; io però sono convinto che egli dovrebbe certamente violentare i fatti per aggregarli alla sua teoria!

Nei casi di dimorfismo e polimorfismo degli insetti sociali, o no, il Weismann invoca la pluralità di idi e l'influenza del nutrimento come stimolo che attivi l'uno o l'altro ido. Nel caso delle Fillosserine questa moltiplicità di idi sembra esclusa dall'esistenza di tutte le possibili forme intermedie tra le larve e le alate.

Lascio perciò in disparte il disuso e la selezione germinativa, ossia i rami che allungansi verso le cause finali e tento una spiegazione del fenomeno d'ordine molto differente. A me sembra che la questione degli organi rudimentali prenda un aspetto positivo quando si può dominarli come nel caso attuale, colla fisiologia dello sviluppo. Certamente non possiamo andare al di là di un certo limite e dare una precisa analisi del fenomeno, ma possiamo almeno porre la questione in forma sperimentale, che è il miglior modo di renderla accessibile.

Premettiamo che in tutte le forme di *Chermesidae* (a noi note), comprese le alate, l'ultima muta, che è quella la quale conduce all'apertura della vulva, è preceduta da un breve periodo in cui le uova rapidamente ingrandiscono. Potrebbe darsi che questo accrescimento delle uova la occasionasse. Sta inoltre il fatto che quando avviene questo rapido ingrandire delle uova — indipendentemente dal prodursi uova maschili, femminili o partenogeniche —, gli altri organi, se non hanno già raggiunto lo sviluppo completo, si arrestano a quel punto a cui si trovano, e perciò ci si presentano tanto più incompleti, quanto più precocemente avviene l'accrescimento delle uova. Spie-

ghiamoci in modo più preciso con un esempio. Supponiamo una ninfa che non abbia ancora gli ocelli e che abbia l'occhio composto fornito di pochissime faccette e un breve accenno delle ali; gli ovarii che erano ancora lontani dalla maturazione e che fino a quel momento si erano andati sviluppando lentamente, per effetto di stimoli provenienti dall'esterno, rapidamente ingrandiscono, sottraendo alimento o almeno certe sostanze alle altre parti; questo fenomeno occasiona la quarta muta, prima che i varî organi siano evoluti come nelle alate e li arresta definitivamente nel loro sviluppo. Così si comprende quel singolare arresto nei più differenti gradi di sviluppo, che a tutta prima non sembrerebbe spiegabile altrimenti che col disuso. Esso devesi dunque ritenere occasionato dall'ingrandimento rapido delle uova, che alla sua volta deve essere provocato da stimoli esterni (modificazioni delle qualità del nutrimento fornito dalla pianta al parassita). Siccome, contemporaneamente al crescere delle uova, si completano i gonodotti, fors'anche questi concorrono a determinare l'arresto di sviluppo.

La tesi da me qui sostenuta è applicabile in generale a tutte le rudimentazioni, non ne sono però occasione sempre e solo gli organi genitali.

Già nel caso dei sessuali delle Fillosserine è meno evidente che anche la scomparsa degli stiletti, del labbro inferiore, della pompetta salivare ecc. siano riferibili alle gonadi, perchè questi organi si sviluppano precocemente, prima che la larva esca dall'uovo. In altri casi poi (es. dissogonia) devesi addirittura escludere che la maturazione delle gonadi provochi un arresto di sviluppo degli altri organi.

Formulo pertanto come segue la interpretazione che io do ai fenomeni di rudimentazione. Ad un certo momento, per effetto di stimoli esterni o interni, comparisce o ingrandisce un organo, provocando un arresto di sviluppo di altri; ciò accade probabilmente secondo regole, che la fisica, la chimica, o la chimica-fisica potranno un giorno analizzare con grande soddisfazione della nostra mente. Così si spiega la rudimentazione senza il disuso. Si può dare un'analoga spiegazione della comparsa, o del perfezionamento degli organi nuovi? La questione è molto più ardua e, se definita negativamente, potrebbe a sua volta perfino sollevare dei dubbî sulla giustezza della spiegazione da noi data alla rudimentazione. Ma qui mi si affaccia un terreno, sul quale il mio piede sdrucciola, e perciò io non voglio inoltrarmi.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota II del Corrispondente E. Almansi.

1. Ricordo la formula stabilita in una Nota precedente.

Suppongo che una massa liquida M, di densità ϱ, in moto, occupi interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ di un corpo fisso S_0, ed un'altra superficie, pure fissa, σ'. Sulle particelle di M non agiscono forze di massa.

Chiamo p la pressione, al tempo t, in un punto qualunque di S; e considero la quantità

$$A = \int_\sigma p\lambda d\sigma, \tag{1}$$

λ essendo una funzione definita nei punti di σ, che soddisfa alla condizione

$$\int_\sigma \lambda d\sigma = 0 . \tag{2}$$

Dette u, v, w le componenti di velocità al tempo t, pongo:

$$U = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \tfrac{1}{2} V^2,$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} ,$$

$$f = v\zeta - w\eta \quad , \quad g = w\xi - u\zeta \quad , \quad h = u\eta - v\xi ,$$

$$D = f\frac{\partial \varphi}{\partial x} + g\frac{\partial \varphi}{\partial y} + h\frac{\partial \varphi}{\partial z} , \tag{2}$$

$$Q = u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z} ,$$

ove φ rappresenta una funzione armonica e regolare nello spazio S, che nei punti di σ e σ' verifica rispettivamente le equazioni

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

n denotando la normale che penetra in S.

Potranno esservi in S, al tempo t, delle superficie su cui il moto è discontinuo. Chiamo ω l'insieme di tali superficie; n, in un punto qualunque di ω, la normale uscente da una faccia assunta come positiva; α, β, γ i suoi coseni direttori; N la componente $u\alpha + v\beta + w\gamma$ della velocità secondo n.

Suppongo che nei punti di ω i valori di U e Q siano presi sulla faccia positiva; chiamo invece U', Q' i valori delle quantità analoghe sulla faccia negativa. Pongo:

$$H = (Q - Q')\, N - (U - U')\frac{\partial \varphi}{\partial n} .$$

Si ha allora:

$$A = \varrho\left(-\int_\sigma U\lambda\, d\sigma + \int_\omega H\, d\omega - \int_S D\, ds\right) . \tag{4}$$

In questa Nota dedurrò alcune conseguenze dalla formula (4), la quale ci fornisce il valore di A al tempo t, espresso mediante quantità che dipendono solo da u, v, w (non dalle loro derivate rispetto al tempo), e quantità indipendenti dal movimento della massa liquida.

2. Sieno, al tempo t, u_1, v_1, w_1 le componenti di velocità relative ad un movimento μ_1; e consideriamo un altro movimento μ a cui corrispondano le componenti di velocità

$$u = cu_1 \quad , \quad v = cv_1 \quad , \quad w = cw_1 \, ,$$

ove c rappresenta una costante (positiva o negativa). Esso sarà un movimento possibile, se tale è μ_1. Le superficie di discontinuità, se esistono, saranno le stesse nei due movimenti.

Le quantità ξ, η, ζ, Q, N, relative al movimento μ, si otterranno moltiplicando per c le quantità analoghe relative a μ_1; mentre le quantità U, f, g, h, D, H, relative a μ, si otterranno moltiplicando le analoghe, relative a μ_1, per c^2.

La quantità A relativa a μ (e ad una determinata funzione λ), sarà dunque eguale a $c^2 A_1$, essendo A_1 la quantità analoga relativa a μ_1. Onde avremo, se V e V_1 rappresentano le grandezze della velocità in uno stesso punto di S, nei due movimenti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{V^2}{V_1^2} \, .$$

Noi potremo chiamare *simili* tutti i movimenti μ che si ottengono facendo variare la costante c; ed avremo perciò il teorema:

I valori di A *relativi a movimenti simili, stanno fra loro come i quadrati delle velocità in uno stesso punto della massa in moto.*

In particolare il teorema varrà per le componenti della forza F e del momento G resultanti del sistema di forze $p \, d\sigma$, esercitate dalla massa liquida in moto sugli elementi di σ. Dunque la direzione *e il verso* di F (e tutto ciò che diciamo di F vale per G) sono gli stessi per movimenti simili; le grandezze stanno fra loro come i quadrati delle velocità in un medesimo punto.

Supponiamo $c = -1$, consideriamo cioè, al tempo t, insieme con μ_1, il movimento μ ottenuto invertendo le velocità delle singole particelle liquide. *Il vettore* F *sarà identico nei due movimenti.*

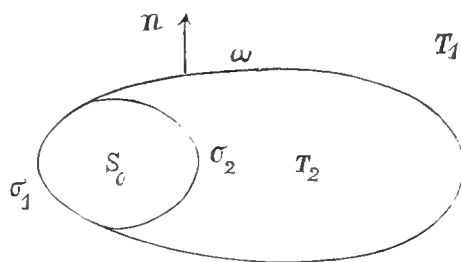
Introduciamo un vettore W atto a rappresentarci, in grandezza, direzione e verso, la *corrente* che investe il corpo S_0. Come componenti di W assumeremo, per un movimento generico $(u\, v\, w)$, i valori medii

$$W_x = \frac{\int_\sigma u \, d\sigma}{\sigma} \, , \text{ ecc.},$$

di u, v, w, sulla superficie σ di S_0.

Invertendo il movimento, il vettore W cambia di verso, mentre F rimane inalterato. Dunque: *o la spinta* F, *esercitata dalla massa liquida in moto sul corpo* S_0, *è nulla o normale alla direzione della corrente, in ambedue i movimenti; ovvero, in uno dei due, essa forma colla corrente* (supposta diversa da zero) *un angolo acuto.*

Noi possiamo considerare questo resultato (valido per movimenti continui e discontinui) come l'espressione più generale del *paradosso di D'Alembert*.

3. Esamineremo ora un caso particolare di movimento della massa liquida. Si abbia, al tempo t, una superficie ω di discontinuità, che divida lo spazio S in due regioni T_1, T_2. La regione T_1 sia limitata dalla superficie chiusa σ' (che limita, con σ, l'intero spazio S), da ω, e da una parte σ_1 della superficie σ. Diciamo σ_2 la rimanente parte di σ. Nella regione T_1 il moto sia irrotazionale. Nella regione T_2 sia (al tempo t), $u = v = w = 0$. Cerchiamo in questo caso l'espressione di A.

Come faccia positiva di ω assumeremo quella che è rivolta verso T_1.

Mancando i vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$), sarà, in tutto lo spazio S, $D = 0$; quindi, per la formula (4):

$$A = \varrho \left(- \int_\sigma U \lambda \, d\sigma + \int_\omega H d\omega \right).$$

Poichè al tempo t le particelle di T_2 sono in quiete, sulla parte σ_2 di σ sarà $U = 0$; e sulla superficie ω, $N = 0$, $U' = 0$, e perciò

$$H = - U \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

ove U denota il semi-quadrato della velocità delle particelle liquide attigue ad ω, che appartengono a T_1. Avremo dunque:

$$A = \varrho \left(- \int_{\sigma_1} U \lambda \, d\sigma_1 - \int_\omega U \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega \right);$$

ovvero, chiamando Ω l'intera superficie chiusa formata da ω e σ_1, e ricordando che sopra σ_1 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ è uguale a λ:

$$A = - \varrho \int_\Omega U \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

od anche:

$$A = - \tfrac{1}{2} \varrho \int_\Omega V^2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

formula che si riduce alla (3) della Nota I quando Ω venga a coincidere con σ: quando, cioè, il moto sia continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S.

Poichè la funzione φ è armonica e regolare nello spazio S, e in particolare nella regione T_1 limitata dalle superficie σ' ed Ω, sulla prima delle quali si ha $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, sarà

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Omega=0\,;$$

onde avremo pure, indicando con V_0 una costante arbitraria:

$$A=\tfrac{1}{2}\,\varrho\int_{\Omega}(V_0^2-V^2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\Omega\,; \tag{5}$$

e se torniamo a scindere in due l'integrale esteso ad Ω:

$$A=\tfrac{1}{2}\,\varrho\int_{\sigma_1}(V_0^2-V^2)\,\lambda d\sigma_1+\tfrac{1}{2}\,\varrho\int_{\omega}(V_0^2-V^2)\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\omega\,. \tag{6}$$

4. Noi possiamo immaginare una massa liquida in moto che occupi l'intero spazio esterno a σ. È questo un movimento puramente ideale, ma che ha importanza, in quanto, nei punti dello spazio abbastanza vicini ad S_0, esso potrà differire pochissimo dal movimento reale di una massa che occupi lo spazio limitato da una superficie σ' i cui punti siano tutti a distanza finita, ma lontanissimi da σ.

Assegneremo, al tempo t, in tutto lo spazio S, le componenti di velocità u, v, w, le quali potranno ammettere delle superficie di discontinuità ω. Supporremo che all'infinito u, v, w assumano valori costanti u_0, v_0, w_0, vale a dire che all'infinito il movimento sia traslatorio; e precisamente, che, posto

$$u=u_0+u'\quad,\quad v=v_0+v'\quad,\quad w=w_0+w',$$

u', v', w' si comportino all'infinito, per ciò che riguarda il modo di tendere a zero delle funzioni stesse e delle loro derivate, come potenziali di masse distribuite in S_0.

Alla pressione p imporremo la condizione di assumere all'infinito un valore costante p_0.

Si può allora dimostrare che la p è determinata in tutto lo spazio S; quindi, fissata la funzione λ, potremo considerare la quantità A, definita dalla formula (1), e cercare di trasformarla come nella Nota I, introducendo la funzione φ, *armonica e regolare in tutto lo spazio* S, *che nei punti di* σ *verifica la condizione* $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\lambda$, *e all'infinito si annulla* (o assume un valore costante).

Si troverà che susiste ancora la formula (4).

La funzione φ presenta i caratteri del potenziale di una massa *nulla* (per essere $\int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma \lambda \, d\sigma = 0$) situata in S_0. Le sue derivate prime, che figurano nella espressione di A, decrescono rapidamente quando ci si allontana da S_0: all' infinito diventano infinitesime come l' inversa del cubo della distanza da un punto fisso. E ciò mostra che il movimento della massa liquida che occupa le regioni dello spazio lontane da S_0, ha poca influenza sul valore di A.

Se il movimento è continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S, ed A rappresenta la componente, secondo la direzione del moto all' infinito, della spinta esercitata dal liquido sul corpo S_0, si troverà, col Cisotti, $A = 0$.

Se invece il movimento presenta gli stessi caratteri di quello considerato nel paragrafo precedente (salvo l'estendersi della regione T_1 all' infinito), varranno, qualunque sia il significato di λ, le formule (5) e (6), in cui alla costante V_0 attribuiremo il valore della velocità all' infinito. Converrà però che in luogo di V scriviamo $V_0 \cdot V$. Avremo pertanto:

$$A = K \varrho V_0^2,$$

essendo

$$K = \tfrac{1}{2} \int_\Omega (1 - V^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Omega,$$

ovvero

$$K = \tfrac{1}{2} \int_{\sigma_1} (1 - V^2) \lambda \, d\sigma_1 + \tfrac{1}{2} \int_\omega (1 - V^2) \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega. \tag{7}$$

È superfluo ricordare che questo valore di A si riferisce al tempo t, in cui supponiamo che la massa occupante lo spazio T_2 sia in quiete: ciò che in generale non avverrà negl' istanti successivi.

5. Data la superficie σ che limita il corpo fisso S_0, e la direzione e il verso del moto traslatorio all' infinito, si può ritenere che esista una particolare superficie ω, che diremo ω', a cui corrisponde un movimento *stazionario* μ' della massa liquida. Essa si distacca da una linea tracciata sopra σ, che divide σ nelle due parti σ_1 e σ_2, e si estende all' infinito.

Diremo $V_0 \cdot V'$ la velocità nel movimento μ', V_0 essendo ancora la velocità di traslazione all' infinito. Sulla superficie ω', V' avrà un valore costante, ed eguale ad 1 [1].

Poniamo

$$K' = \tfrac{1}{2} \int_{\sigma_1} (1 - V'^2) \lambda \, d\sigma_1.$$

[1] V. Levi-Civita, *Sulla resistenza dei mezzi fluidi.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. X, 1901.

Consideriamo, al tempo t, un movimento μ, traslatorio all'infinito con velocità V_0, al quale corrisponda, come superficie di separazione fra le regioni T_1 e T_2, una superficie ω, i cui punti siano tutti a distanza finita da σ, ma che coincida in parte con ω', e se ne distacchi solo in punti lontanissimi da σ; ed ammettiamo che nella espressione (7) di K, il primo integrale differisca pochissimo da K', il secondo da zero: ciò che, in generale, avverrà effettivamente, per il modo di comportarsi delle derivate prime di φ allorchè ci si allontana da σ (§ 4), e per il fatto che, in prossimità di questa superficie, V differirà pochissimo da V', e, in particolare, nei punti di ω, da 1.

Lo stesso coefficiente K avrà allora un valore vicinissimo a K'. Inoltre, per un certo periodo di tempo, il movimento, in prossimità di σ, si conserverà sensibilmente stazionario; e K conserverà un valore poco diverso da K'.

6. Ritorniamo al caso che lo spazio S sia finito, e limitato dalle superficie σ e σ'.

Noi diamo al tempo t le componenti di velocità u, v, w, che devono verificare la condizione di incompressibilità

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{8}$$

e nei punti di σ e σ' l'altra condizione

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0. \tag{9}$$

Date u, v, w, potremo calcolare le funzioni ξ, η, ζ, ed f, g, h (§ 1).

Supponiamo che u, v, w siano continue in tutto lo spazio S; e che inoltre resulti

$$f=\frac{\partial P}{\partial x}\quad,\quad g=\frac{\partial P}{\partial y}\quad,\quad h=\frac{\partial P}{\partial z}, \tag{10}$$

ove P denoti una funzione regolare nello spazio S.

Ciò avverrà quando il movimento è stazionario; giacchè, essendo allora $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0$, le equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}-f\right),\ \text{ecc.} \qquad \text{(I, § 3)} \tag{11}$$

dànno:

$$f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho}+U\right),\ \text{ecc.};$$

onde sarà:

$$P = \frac{p}{\varrho} + U + \text{cost.}$$

Inversamente, se al tempo t sono verificate le equazioni (10), il movimento è stazionario. Infatti, dato u, v, w al tempo t, il movimento è determinato in ogni istante, sono cioè determinate le funzioni u, v, w delle coordinate x, y, z e del tempo, e, a meno di una costante, la pressione p. Esse devono soddisfare alle equazioni (8), (9) e (11); le quali resultano effettivamente soddisfatte, supponendo che u, v, w conservino sempre, in tutti i punti dello spazio, il valore che hanno al tempo t, e che la pressione sia

$$p = \varrho(P - U) + \text{cost.}$$

Il valore di A, in questo caso, si può avere direttamente dalla formula (1) sostituendo a p la sua espressione. Sarà:

$$A = \varrho \int_\sigma (P - U)\, \lambda\, d\sigma. \tag{12}$$

Ma, come verifica, si può anche ricavare dalla (4). Non avendosi superficie di discontinuità, mancherà in essa il 2° integrale. Sarà poi, per le formule (2) e (10):

$$D = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

avremo quindi, con una integrazione per parti, tenendo presenti l'equazione $\Delta\varphi = 0$ e le (3):

$$\int_S D\, dS = - \int_\sigma P\lambda\, d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (4), otterremo ancora la (12).

In particolare, se mancano i vortici ($\xi = \eta = \zeta = 0$), sarà $f = g = h = 0$, $P = \text{cost}$; e si ritroverà la formula (3) della Nota I [1].

[1] La formula (12) sussiste anche nel caso limite che la massa liquida occupi l'intero spazio esterno a σ, e in particolare se all'infinito il moto è traslatorio. Sarebbe però da vedersi se esistano movimenti continui, traslatorii all'infinito, stazionarii, *e non irrotazionali*. Posta la condizione che tutte le linee di corrente provengano dall'infinito, per il principio della conservazione dei vortici, il vortice, che all'infinito è nullo, sarà nullo in tutti i punti di una linea di corrente, quindi in tutto lo spazio. Si ricade dunque nel moto irrotazionale.

Fisica matematica. — *Il moto di un elettrone nel campo magnetico*. Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

1. Un elettrone si muove sotto l'azione di forze centrali; le coordinate x ed y della sua trajettoria (piana) soddisfano dunque alle

$$\left\{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\mathrm{F}(r)\cdot\frac{x}{r}\,, \\ m\ddot{y} &= -\mathrm{F}(r)\cdot\frac{y}{r}\,, \end{aligned}\right. \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Siecciti adesso un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla giacitura dell'orbita, e si domandi sotto quali condizioni l'effetto del campo consisterà in una rotazione uniforme, intorno alla linea di forza che passa per il centro attraente

Analiticamente il problema vuol essere posto nel modo che segue.

Si scrivono le equazioni del fenomeno perturbato sotto la forma

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\mathrm{F}(r)\cdot\frac{x}{r}+\mathrm{AH}e\dot{y}\,, \\ m\ddot{y} &= -\mathrm{F}(r)\cdot\frac{y}{r}-\mathrm{AH}e\dot{x}\,, \end{aligned}\right. \qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

e si assumono le condizioni

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t\,, \\ y &= \eta\cos\omega t-\xi\sin\omega t\,, \end{aligned}\right. \qquad [\text{con } \omega \text{ costante}]\,,$$

intendendo che le ξ ed η soddisfino alle

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -\mathrm{F}(\varrho)\cdot\frac{\xi}{\varrho}\,, \\ m\ddot{\eta} &= -\mathrm{F}(\varrho)\cdot\frac{\eta}{\varrho}\,, \end{aligned}\right. \qquad \varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,.$$

Sostituisco le (2) nelle (1), e tengo conto delle (3), mi viene

$$\left\{\begin{aligned} &[(\mathrm{AH}e-m\omega)\,\omega\xi-(\mathrm{AH}e-2m\omega)\,\dot{\eta}]\cos\omega t \\ &\qquad\qquad = -[(\mathrm{AH}e-m\omega)\,\omega\eta+(\mathrm{AH}e-2m\omega)\,\dot{\xi}]\sin\omega t\,, \\ &[(\mathrm{AH}e-m\omega)\,\omega\eta+(\mathrm{AH}e-2m\omega)\,\dot{\xi}]\cos\omega t \\ &\qquad\qquad = +[(\mathrm{AH}e-m\omega)\,\omega\xi-(\mathrm{AH}e-2m\omega)\,\dot{\eta}]\sin\omega t\,, \end{aligned}\right.$$

e dunque

$$[(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\xi - (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot\eta]^2 + [(\mathrm{AH}e - m\omega)\,\omega\eta + (\mathrm{AH}e - 2m\omega)\,\dot\xi]^2 = 0\,,$$

o ancora

$$[(2q - \omega)\,\omega\xi - 2(q - \omega)\,\dot\eta]^2 + [(2q - \omega)\,\omega\eta + 2(q - \omega)\,\dot\xi]^2 = 0\,, \tag{4}$$

con

$$q = \frac{\mathrm{AH}e}{2m}\,. \tag{5}$$

Dalla (4) risulta immediatamente

$$\left\{\begin{aligned} &(2q - \omega)\,\omega\xi - 2(q - \omega)\,\mathrm{D}\eta = 0\,,\\ &2(q - \omega)\,\mathrm{D}\xi + (2q - \omega)\,\omega\eta = 0\,, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

e però le ξ ed η devono soddisfare alle

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} (2q-\omega)\,\omega & -2(q-\omega)\,\mathrm{D} \\ 2(q-\omega)\,\mathrm{D} & (2q-\omega)\,\omega \end{vmatrix} \xi = 0\,,\\ &\begin{vmatrix} (2q-\omega)\,\omega & -2(q-\omega)\,\mathrm{D} \\ 2(q-\omega)\,\mathrm{D} & (2q-\omega)\,\omega \end{vmatrix} \eta = 0\,, \end{aligned}\right.$$

cioè alle

$$\left\{\begin{aligned} \ddot\xi &= -\frac{(2q-\omega)^2\cdot\omega^2}{4(q-\omega)^2}\cdot\xi\,,\\ \ddot\eta &= -\frac{(2q-\omega)^2\cdot\omega^2}{4(q-\omega)^2}\cdot\eta\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Perchè le (7) si identifichino con le (3) bisogna dunque fare

$$\frac{\mathrm{F}(\varrho)}{\varrho} = p^2 = \text{costante.} \tag{8}$$

A parole « vi è un modo solo per soddisfare rigorosamente alla richiesta; « la forza deve essere proporzionale alla distanza o il movimento armonico ».

Si ricade così nelle condizioni ben note, che dànno origine al fenomeno di Zeeman.

2. Ponendo, secondo le (7) e (8)

$$\frac{(2q-\omega)\,\omega}{2(q-\omega)} = \pm p\,,$$

risulta

$$\omega = \begin{cases} \begin{cases} q + p - \sqrt{p^2 + q^2} , & (\alpha) \\ q + p + \sqrt{p^2 + q^2} , & (\alpha') \end{cases} \\ \begin{cases} q - p + \sqrt{p^2 + q^2} , & (\beta) \\ q - p - \sqrt{p^2 + q^2} . & (\beta') \end{cases} \end{cases}$$

In realtà, se si scrive

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \xi = a \cos pt , \\ \eta = a \sin pt , \end{cases}$$

le (6) riescono soddisfatte con le posizioni (α) e (α'); se si postula invece che sia

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \xi = a \cos pt , \\ \eta = - a \sin pt , \end{cases}$$

bisogna ricorrere ai valori (β) e (β').

Dalle (A) e (α) deriva

$$[\text{A} , \alpha] \cdots\cdots \begin{cases} x = a \cos pt \cos \omega t + a \sin pt \sin \omega t , \\ = a \cos(p - \omega) t , \\ = a \cos(\sqrt{p^2 + q^2} - q) t , \\ y = a \sin pt \cos \omega t - a \cos pt \sin \omega t , \\ = a \sin(p - \omega) t , \\ = a \sin(\sqrt{p^2 + q^2} - q) t ; \end{cases}$$

mentre dalle (B) e (β) risulta

$$[\text{B} , \beta] \cdots\cdots \begin{cases} x = a \cos pt \cos \omega t - a \sin pt \sin \omega t , \\ = a \cos(p + \omega) t , \\ = a \cos(\sqrt{p^2 + q^2} + q) t , \\ y = - a \sin pt \cos \omega t - a \cos pt \sin \omega t , \\ = - a \sin(p + \omega) t , \\ = - a \sin(\sqrt{p^2 + q^2} + q) t . \end{cases}$$

Quanto alle combinazioni $[\text{A} , \alpha']$ e $[\text{B} , \beta']$ esse non ci apprendono niente di nuovo.

Perchè dalla prima nasce

$$[A\,,\alpha'] \equiv [B\,,\beta] \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} x &= a\cos(p-\omega)\,t\,, \\ &= a\cos(-\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ &= a\cos(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ y &= a\sin(p-\omega)\,t\,, \\ &= a\sin(-\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ &= -a\sin(\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,; \end{aligned} \right.$$

e dalla seconda

$$[B\,,\beta'] \equiv [A\,,\alpha] \cdots\cdots \left\{ \begin{aligned} x &= a\cos(p+\omega)\,t\,, \\ &= a\cos(-\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ &= a\cos(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,, \\ y &= -a\sin(p+\omega)\,t\,, \\ &= -a\sin(-\sqrt{p^2+q^2}+q)\,t\,, \\ &= a\sin(\sqrt{p^2+q^2}-q)\,t\,. \end{aligned} \right.$$

Ho dato nel luglio scorso un metodo il quale permette di descrivere meccanicamente le orbite, che corrispondono, per il caso testè trattato agli integrali generali [1].

3. Si noterà adesso che quando la q^2 fosse piccola in confronto della p^2, le (α) e (β) fornirebbero concordemente

$$\omega = q\,.$$

Questo risultato è più generale che non possa parere a prima vista. In realtà se si suppone debolissima, come è nei casi pratici, la perturbazione dovuta al campo magnetico, i primi membri delle (6) si riducono ai termini, che contengono le velocità; e risulta dunque

$$(6') \qquad \left\{ \begin{aligned} (q-\omega)\,\dot{\xi} &= 0\,, \\ (q-\omega)\,\dot{\eta} &= 0\,, \end{aligned} \right.$$

alle quali equazioni si soddisfa ponendo ancora una volta

$$\omega = q\,.$$

E però « l'orbita di un elettrone, soggetto a forze centrali, gira senza de- « formarsi nel suo piano, intorno al punto attraente, quando si ecciti un

[1] Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [1], 583, 1909.

« campo debole normale al detto piano, e gira, per la (5), con la velocità « angolare

$$\omega = \frac{AHe}{2m} \text{ ».}$$

La cosa fu riconosciuta già, recentemente, dal Righi, per il caso dei sistemi che dànno origine ai cosidetti raggi magnetici (1).

Paleontologia. — *Alcuni mammiferi fossili del Genovesato e del Savonese.* Memoria del Corrisp. A. Issel.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Sulla risolubilità della equazione integrale lineare di prima specie.* Nota del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Corrispondente G. Castelnuovo.

1. Recentemente (2) il prof. G. Lauricella, completando un resultato del prof. E. Picard (3), dimostrava che condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione

$$\int_a^b f(x)\, U(x, y)\, dx = g(y) \tag{1}$$

ammetta una soluzione $f(x)$ atta all'integrazione insieme al suo quadrato $f^2(x)$ nell'intervallo ab sono:

1°) che una certa serie Σa_n^2 sia convergente;

2°) che la $g(y)$ sia esprimibile per mezzo di una serie di Fourier-Hilbert procedente per certe funzioni date $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_n(y), \dots$

Il problema della risolubilità della equazione (1) viene così ricondotto a determinare quando una funzione $g(y)$ è sviluppabile in una serie di Fourier-Hilbert di funzioni date $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, problema difficile, di cui non è ancora stata data una soluzione esauriente.

Ad un risultato analogo noi eravamo giunti (4) nel caso particolare in cui l'integrale del primo membro è esteso ad un contorno chiuso e le funzioni che si considerano sono funzioni uniformi dei punti di quel contorno.

(1) Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XVIII, [2], 241 e 301, 1909.
(2) Comptes Rendus, 14 giugno 1909.
(3) Atti della R. Accademia dei Lincei, 1 agosto 1909.
(4) Annali di Matematica, marzo 1909.

Nella presenta Nota ci permettiamo di tornare sull'argomento per presentare un nuovo criterio, valevole pel caso generale, che, se non erriamo, ci sembra più elementare.

2. Premettiamo il seguente problema. Essendo dato nell'intervallo ab un certo numero m di funzioni $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ linearmente indipendenti, atte all'integrazione insieme ai loro quadrati in tutto l'intervallo, e corrispondentemente m costanti $c_1, c_2, \dots, c_m$ determinare fra tutte le funzioni che soddisfano simultaneamente alle equazioni

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r \qquad (r = 1, 2, \dots, m) \tag{2}$$

quella per cui l'integrale $I = \int_a^b f^2(x)\, dx$ è un minimo.

Secondo i principî del calcolo delle variazioni, otteniamo, uguagliando a zero, la variazione prima dell'integrale I e tenuto conto della (2)

$$\int_a^b (f(x) - \lambda_1 u_1(x) - \cdots - \lambda_m u_m(x))\, \delta f\, dx = 0,$$

tale relazione dovendo aver luogo qualunque sia δf dovrà essere

$$f(x) = \lambda_1 u_1(x) + \cdots + \lambda_m u_m(x),$$

da cui eliminando $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ per mezzo della (2), dopo aver posto

$$a_{rs} = \int_a^b u_r(x)\, u_s(x)\, dx,$$

si ottiene

$$f(x) = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & c_m \\ u_1(x) & \dots & u_m(x) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

È facile vedere che l'espressione precedente rappresenta effettivamente una soluzione delle (2), il denominatore essendo diverso da zero, poichè le $u_1(x) \dots u_m(x)$ sono linearmente indipendenti [1].

[1] Vale la pena di enunciare a parte il risultato seguente, che sostituisce con vantaggio il criterio dato dall'annullarsi del Wronskiano, e che si dimostra molto facilmente:

Il valore del minimo I è quindi

$$I = \int_a^b f^2(x)\,dx = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & c_m \\ c_1 & \dots & c_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}} .$$

Il numeratore essendo una forma quadratica irriducibile nelle $c_1, c_2, \dots, c_m$, possiamo ridurlo ad una forma canonica in m variabili, e la riduzione si ottiene ponendo:

$$\Gamma_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,r-1} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{r\,r-1} & c_m \end{vmatrix} , \quad B_r = \int_a^b \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,r-1} & u_1(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{r\,r-1} & u_r(x) \end{vmatrix}^2 dx ,$$

« Condizione necessaria e sufficiente perchè m funzioni $u_1(x), \dots, u_m(x)$ definite nell'intervallo ab, non identicamente nulle, sieno linearmente indipendenti è che sia

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0,$$

essendo

$$a_{rs} = \int_a^b u_r(x)\, u_s(x)\, dx \text{ ».}$$

Infatti, se una delle $u_\mu(x)$ si può ottenere come combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle rimanenti, nel determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$ una colonna si ottiene come combinazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti delle rimanenti, e quindi quel determinante è nullo.

Viceversa, essendo

$$\int_a^b \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m-1} & u_1(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,m-1} & u_m(x) \end{vmatrix}^2 dx = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

se è $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0$, o la $u_m(x)$ è una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti delle precedenti, oppure è anche $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m-1} \end{vmatrix} = 0$, ecc.

da cui

$$I = \frac{\Gamma_1^2}{B_1} + \frac{\Gamma_2^2}{B_2} + \cdots + \frac{\Gamma_m^2}{B_m}.$$

La forma è quindi definita positiva.

2. Vediamo come si modifica il problema, allorquando le funzioni $u_1(x) \dots u_m(x)$ non sono più linearmente indipendenti, ma sono legate da un certo numero di relazioni identiche

$$b_{\rho 1} u_1(x) + b_{\rho 2} u_2(x) + \cdots + b_{\rho m} u_m(x) = 0 \quad , \quad \rho = 1, 2, \dots, \mu \leq m$$

le $b_{\rho s}$ essendo costanti.

Evidentemente in questo caso il problema non è sempre risolubile, e la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità è che $c_1 \dots c_m$ sieno legate dalle relazioni corrispondenti

$$b_{\rho 1} c_1 + b_{\rho 2} c_2 + \cdots + b_{\rho m} c_m = 0 \quad , \quad \rho = 1, 2, \dots, \mu \leq m$$

le $b_{\rho s}$ essendo le stesse costanti precedenti.

Sia B_{ρ_1} tra le B_r la prima che si annulli, $\rho_1 \geq 1$. Conveniamo allora in tutti i determinanti Γ_r ed in tutti i determinanti che compariscono sotto il segno in B_r, per tutti gli indici $r > \rho_1$ di sopprimere la ρ_1^{esima} linea e la ρ_1^{esima} colonna.

Sia B_{ρ_2} la seconda tra le B_r che si annulli, $\rho_2 > \rho_1$. Conveniamo nei determinanti Γ_r e nei determinanti che compariscono sotto il segno in B_r, per tutti gli indici $r > \rho_2$, nei quali abbiamo già soppresso la ρ_1^{esima} linea e la ρ_1^{esima} colonna, di sopprimere la ρ_2^{esima} linea e la ρ_2^{esima} colonna, e così via per tutte le B_r che si annullano.

Fatte tutte le soppressioni, diciamo Γ_r' e B_r' le espressioni che si ottengono.

La condizione precedente di risolubilità si può esprimere dicendo che, ove sia $B_s' = 0$, deve essere ancora $\Gamma_s' = 0$.

Conveniamo ancora di porre per definizione $\frac{\Gamma_s'^2}{B_s'} = 0$, ove sia

$$\Gamma_s' = B_s' = 0.$$

Supposta soddisfatta la condizione di risolubilità, l'espressione

$$I = \frac{\Gamma_1'^2}{B_1'} + \frac{\Gamma_2'^2}{B_2'} + \cdots + \frac{\Gamma_m'^2}{B_m'}$$

ha un valore determinato e finito, e rappresenta il minimo dell'integrale $\int_a^b f^2(x)\,dx$, $f(x)$ essendo una funzione che soddisfa alle (2) proposte.

Ove la condizione di risolubilità non risulti soddisfatta, la espressione precedente non ha più alcun significato, essendovi in essa qualche termine che assume la forma $\frac{p}{0}$.

4. Ciò premesso, sia $f_0(x)$ una soluzione dell'equazione integrale (1), essendo $\int_a^b f_0^2(x)\,dx < A$. Poniamo

$$(4)\qquad \begin{cases} u_r(x) = \int_a^b y^{r-1} V(x, y)\,dy \\ c_r = \int_a^b y^{r-1} g(y)\,dy. \end{cases}$$

La funzione $f_0(x)$ soddisfa al sistema di equazioni

$$\int_a^b f_0(x)\,u_r(x)\,dx = c_r \qquad r = 1, 2, \dots, m$$

qualunque sia m, onde, costruite le Γ_m' e le B_m' secondo i numeri precedenti, abbiamo $\sum_1^m {}_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'} < A$, qualunque sia m; e quindi la serie $\Sigma_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ converge. La convergenza di quella serie è quindi condizione necessaria per la risolubilità dell'equazione (1).

5. Mostriamo che è sufficiente. Poniamo

$$(5)\qquad v_r(x) = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\,r-1}\, u_1(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} \dots a_{r\,r-1}\, u_r(x) \end{vmatrix},$$

e conveniamo, se v_ϱ è identicamente nulla, $\varrho \geq 1$, di sopprimere entro v_r, $r > \varrho$, la ϱ^{esima} linea e la ϱ^{esima} colonna: diciamo $v_r'(x)$ le funzioni che così si ottengono.

Abbiamo

$$\int_a^b v_\mu'(x)\,u_\nu(x)\,dx = 0, \quad \nu < \mu$$

e quindi

$$\int_a^b v_\mu'(x)\,v_\nu'(x)\,dx = 0 \qquad \nu \neq \mu$$
$$= B_\mu' \qquad \nu = \mu.$$

Poniamo ancora

$$(6)\qquad w_\mu(x) = \frac{v_\mu'(x)}{+\sqrt{B_\mu'}}.$$

Questa espressione non ha significato quando è $B_\mu' = 0$, assumendo allora la forma $\frac{0}{0}$: perciò conveniamo di scartare quelle delle $v_\mu'(x)$ che sono $\equiv 0$,

e di limitare alle rimanenti la posizione (6), per queste si ottiene

$$\int_a^b w_\mu(x)\, w_\nu(x)\, dx = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu$$
$$= 1 \quad , \quad \mu = \nu .$$

Per un noto teorema di Riesz [1], la serie $\Sigma_\mu \frac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ essendo convergente, esisterà una funzione $f(x)$ per cui

$$\int_a^b f(x)\, w_\mu(x)\, dx = \frac{\Gamma_\mu'}{\sqrt{B_\mu'}}$$

qualunque sia l'indice di $w_\mu(x)$, e quindi avremo

$$\int_a^b f(x)\, v_\mu'(x)\, dx = \Gamma_\mu' ,$$

relazione che vale anche per quelle delle $v_\mu'(x)$ che fossero identicamente nulle, riducendosi in quel caso alla identità $0 = 0$. Quella relazione sussiste quindi per tutti i valori di μ, onde sostituendo per Γ_μ' e $v_\mu'(x)$ le loro e.pressioni, si ottiene

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r$$

qualunque sia r. Posto quindi

$$h(y) = g(y) - \int_a^b f(x)\, V(x , y)\, dx ,$$

abbiamo

$$\int_a^b y^{r-1}\, h(y)\, dy = \int_a^b y^{r-1}\, g(y)\, dy - \int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r - c_r = 0$$

qualunque sia r, da cui si conclude $h(y) \equiv 0$.

Conclusione. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una soluzione dell'equazione* (1) *atta all'integrazione insieme al suo quadrato nell'intervallo ab, è che la serie $\Sigma \frac{\Gamma_\mu'^2}{B_\mu'}$ sia convergente.*

Se quella condizione è soddisfatta $\Gamma_1', \Gamma_2', \dots, \Gamma_\mu', \dots,$ rappresentano i valori degli integrali

$$\int_a^b f(x)\, v_1'(x)\, dx \;,\; \int_a^b f(x)\, v_2'(x)\, dx \;, \dots ,\; \int_a^b f(x)\, v_\mu'(x)\, dx \;, \dots$$

[1] *Ueber ortogonale Funcktionensysteme,* Nachr. zu Gott., 1907.

6. Il metodo seguìto nella precedente trattazione consiste in sostanza nel determinare una funzione $f(x)$ che soddisfi alle infinite equazioni

$$\int_a^b f(x)\, u_r(x)\, dx = c_r\,, \qquad r = 1\,, 2\,, \ldots\,,$$

ove è

$$u_r(x) = \int_a^b y^{r-1}\, V(x\,, y)\, dy \quad , \quad c_r = \int_a^b y^{r-1}\, g(y)\, dy\,.$$

Quella trattazione rimarrebbe inalterata, ove si ponesse invece

$$u_r(x) = \int_a^b V(x\,, y)\, \varphi_r(y)\, dy \quad , \quad c_r = \int_a^b g(y)\, \varphi_r(y)\, dy\,,$$

$\varphi_1\,, \varphi_2\,, \ldots\,,$ essendo funzioni soggette all'unica condizione di costituire un sistema chiuso, tale cioè che non esista nessuna funzione non identicamente nulla $h(x)$ per cui sia $\int_a^b h(x)\, \varphi_r(x)\, dx = 0$ per ogni valore di r.

7. Dei risultati ottenuti si può dare una elegante interpretazione geometrica.

Supponiamo per semplicità che $u_1\,, \ldots\,, u_m$ sieno linearmente indipendenti, e poniamo

$$k_m = \frac{\Gamma_1^2}{B_1} + \frac{\Gamma_2^2}{B_2} + \cdots + \frac{\Gamma_m^2}{B_m} = - \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & c_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_m & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} \end{vmatrix}}\,.$$

Diciamo A_m il determinante denominatore, ed $A_{rs}^{(m)}$ il complemento algebrico di a_{rs} in quello.

In uno spazio ad m dimensioni consideriamo la quadrica irriducibile Q_m di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma\, a_{rs}\, \xi_r\, \xi_s = 0$ ed in coordinate di iperpiani $\frac{1}{A_m} \Sigma A_{rs}^{(m)}\, \eta_r \eta_s = 0$; k_m rappresenta appunto il valore che assume il primo membro di quell'ultima equazione, ove si pongano per $\eta_1\,, \eta_2\,, \ldots\,, \eta_m$ le coordinate $c_1\,, c_2\,, \ldots\,, c_m$ che nello spazio considerato si possono ritenere come le coordinate di un certo iperpiano $\mathcal{A}_m$ ad m dimensioni.

Supponiamo che, crescendo m indefinitamente, $u_1\,, u_2\,, \ldots\,, u_m$ restino sempre linearmente indipendenti. Seguendo un concetto sviluppato dal professore S. Pincherle, possiamo allora considerare in uno spazio ad un numero

infinito di dimensioni la quadrica irriducibile Q_∞ di cui l'equazione in coordinate di punti è $\Sigma a_{rs} \xi_r \xi_s = 0$, ed in coordinate di piani è

$$\frac{1}{A_\infty} \Sigma A_{rs}^{(\infty)} \eta_r \eta_s = 0 .$$

In quello spazio la funzione $g(y)$ è rappresentata da un iperpiano $\mathcal{A}$ ad infinite dimensioni, precisamente dall'iperpiano le cui coordinate sono $c_1, c_2, \dots, c_m, \dots$

Segando la quadrica Q e l'iperpiano $\mathcal{A}$ coll'iperpiano coordinato ad r dimensioni $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ otteniamo per sezione la quadrica Q_r e l'iperpiano ad $r-1$ dimensioni $\mathcal{A}_r$.

La condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) sia risolubile è che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q_r, sostituitevi le coordinate del piano $\mathcal{A}_r$, conservi, al crescere di m, un valore determinato e finito: brevemente che il primo membro dell'equazione della quadrica inviluppo Q, sostituitevi le coordinate dell'iperpiano $\mathcal{A}$ abbia un valore determinato e finito.

Analogo, ma più complicato nella esposizione, è il caso in cui le $u_1, u_2, \dots$ non sono linearmente indipendenti.

8. Osserviamo finalmente che la trattazione precedente si estende senza incontrare difficoltà essenziali, alla equazione

$$g(\eta_1 \dots \eta_n) = \int_\sigma f(\xi_1 \dots \xi_m)\, V(\xi_1 \dots \xi_m | \eta_1 \dots \eta_n)\, d\xi_1 \dots d\xi_m ,$$

$\xi_1 \dots \xi_m$ variando entro un campo σ ad m dimensioni, $\eta_1 \dots \eta_n$ entro un campo τ ad n dimensioni.

Meccanica. — *Sul moto stazionario lento di un liquido viscoso.* Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio Levi-Civita.

In questa Nota stabilisco una proprietà, che mostra la dipendenza dei problemi di moto stazionario lento dei liquidi viscosi, da problemi di equilibrio elastico: precisamente, faccio vedere che la determinazione della velocità delle particelle liquide nel moto stazionario lento di un liquido viscoso, che occupa lo spazio S interno od esterno ad una superficie chiusa σ, nell'ipotesi che nei punti di σ si conosca la velocità delle particelle stesse, si effettua immediatamente allorchè sia determinata la deformazione del solido S, riguardato come elastico ed isotropo, nel caso in cui si conosca lo spostamento subìto dai punti del contorno σ. Basta infatti dare un valore particolare alla costante di elasticità.

Poichè il problema elastico si sa ormai risolvere per campi molto generali, si conclude che per tali campi sarà senz'altro risolto anche il problema idrodinamico enunciato. Quest'ultimo problema, limitato però al solo campo interno a σ, è pure stato risolto recentemente da A. Korn (1), con procedimento diretto, analogo a quello che egli stesso aveva impiegato precedentemente per l'integrazione della doppia equazione di Laplace. La proprietà che io dimostro qui, elimina quindi questi nuovi calcoli, bastando, allo scopo, le formole del problema elastico.

Per maggior chiarezza richiamo dapprima (n. 1) un procedimento, assai semplice, dovuto al prof. Marcolongo (2) col quale, da soluzioni particolari, note già da molto tempo, delle equazioni indefinite dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, si deduce un sistema di tre equazioni integrali, che permette di risolvere il problema dell'equilibrio elastico per dati spostamenti superficiali.

In questo lavoro mi valgo della recente teoria delle omografie vettoriali (3), che rende i calcoli e la esposizione più agile, breve e nitida; in conseguenza, essendo del tutto eliminate le coordinate, invece di un sistema di tre equazioni integrali, si trova una sola equazione integrale di seconda specie, il cui nucleo è un'omografia vettoriale. A tale equazione si possono, del resto, applicare le note proprietà delle ordinarie equazioni integrali. Dalle formole che ottengo per il problema elastico, seguono immediatamente (n. 2) quelle che dimostrano la proprietà enunciata.

1. *Equazioni del problema elastico.* — Sia S un solido elastico isotropo, limitato da una superficie σ. Se diciamo $\mathbf{s}$ il vettore (infinitesimo) che rappresenta lo spostamento subìto da un punto qualunque del solido, in una sua deformazione, la condizione di equilibrio elastico di S, nell'assenza di forze esterne, è rappresentata dall'equazione (*O. v.*, pag. 76):

$$\Delta'\mathbf{s} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} = 0, \tag{1}$$

ove k è una costante.

Orbene, è facile vedere che, se si introduce il parametro:

$$\lambda = \frac{k}{k+2},$$

(1) Korn, *Allgemeine Lösung des Problems kleiner, stationärer Bewegungen in reibenden Flüssigkeiten.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXV, 1° semestre 1908.

(2) Marcolongo, *La teoria delle equazioni integrali e le sue applicazioni alla Fisica-matematica,* Rendiconti di questa Accademia, serie 5ª, vol. XVI, 1° semestre 1907.

(3) Tale teoria trovasi egregiamente sviluppata, con varie interessanti applicazioni, nel recentissimo volumetto *Omografie vettoriali,* ecc. (G. B. Petrini, Torino, 1909), dei proff. Burali-Forti e Marcolongo. Nelle citazioni, indicherò questo libro con (*O. v.*).

e si indica con $\mathbf{a}$ un vettore costante, si soddisfa alla (1) assumendo:

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda\frac{dr^2}{dn}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r} \quad (2)$$

([1]),

ove r è la distanza di un punto qualunque P dello spazio, da un punto M di σ, e $\frac{d}{dn}$ indica la solita derivata normale interna che, per una funzione qualunque f, può esprimersi sotto forma assoluta così (*O. v.*, nota pag. 52):

$$\frac{df}{dn} = \frac{df}{dM}\mathbf{N},$$

$\mathbf{N}$ essendo un vettore unitario, parallelo alla normale a σ e diretto all'interno di S.

Infatti si ha dalla (2), applicando una nota formola (*O. v.*, pag. 62, [7]):

$$\Delta'_P \mathbf{s} = -2\lambda\left(\frac{d}{dP}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r}\right)\operatorname{grad}_P \frac{dr^2}{dn};$$

e poichè:

$$\operatorname{grad}_P \frac{dr^2}{dn} = 2\frac{d(P-M)}{dn} = -2\mathbf{N},$$

si conclude:

$$\Delta'_P \mathbf{s} = -4\lambda\left(\frac{d}{dM}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r}\right)\mathbf{N} = -4\lambda \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right). \quad (3)$$

Dalla (2) si trae ancora, mediante un'altra formola (*O. v.*, pag. 57, [8]):

$$\operatorname{div}_P \mathbf{s} = 2\operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) - \lambda\left(\operatorname{grad}_P \frac{dr^2}{dn}\right)\times \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r},$$

e poichè l'ultimo termine vale:

$$2\lambda\mathbf{N}\times \operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r} = -2\lambda\mathbf{N}\times \operatorname{grad}_M \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r},$$

risulta:

$$\operatorname{div}_P \mathbf{s} = 2\operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) - 2\lambda\frac{d}{dn}\operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r},$$

[1] Si è messo l'indice P alle operazioni grad e div per indicare che negli enti su cui esse operano, s'intende che P è la variabile indipendente.

e perciò:

$$\mathrm{div}_P\, \mathbf{s} = 2(1-\lambda)\, \mathrm{div}_P \left(\mathbf{a} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right). \tag{4}$$

Dalle (3), (4), e dall'espressione di λ, segue senz'altro la (1); c. d. d.

Se u è un numero funzione di P, si ha:

$$\mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, (u\mathbf{a}) = \frac{d\, \mathrm{grad}\, u}{dP} \mathbf{a} ;$$

infatti il primo membro vale grad ($\mathbf{a} \times \mathrm{grad}\, u$) e trasformando mediante due note formole (*O. v.*, pag. 51, [5], e pag. 54, [15]), si ottiene il secondo membro.

Si conclude quindi, che la (2) può ancora scriversi:

$$\mathbf{s} = 2\mathbf{a} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \lambda \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}}{dP} \mathbf{a} . \tag{2'}$$

Se si indica con $\mathbf{s}_0$ un vettore funzione finita e continua dei punti M di σ, è chiaro che l'espressione:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mathbf{s}_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi} \int_\sigma \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}}{dP} \mathbf{s}_0\, d\sigma \tag{5}$$

è ancora una soluzione della (1).

Supponiamo ora che il punto P appartenga allo spazio S, e che muovendosi in S tenda verso un punto Q del contorno. È noto dalle proprietà della funzione potenziale di strato semplice, che, per condizioni molto generali relative al contorno σ, si ha dalla (5), al limite:

$$\mathbf{s}(Q) = \mathbf{s}_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mathbf{s}_0(M) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{\lambda}{4\pi} \int_\sigma \frac{dr^2}{dn} \frac{d\, \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}}{dQ} \mathbf{s}_0(M)\, d\sigma \tag{6}$$ [1],

[1] Se u, v, w sono le coordinate di $\mathbf{s}$ rispetto ad una terna di assi ortogonali, u_0, v_0, w_0 sono le coordinate di $\mathbf{s}_0$, ed x, y, z quelle di Q, si deduce dalla (6):

$$u(Q) = u_0(Q) + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma u_0(M) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma -$$
$$- \frac{\lambda}{4\pi} \int_\sigma \frac{dr^2}{dn} \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} u_0(M) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} v_0(M) + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} w_0(M) \right] d\sigma ,$$

e due analoghe per $v(Q), w(Q)$. Questo sistema di equazioni integrali è stato dato la prima volta dal Fredholm, che lo ottenne con metodo del tutto diverso.

che può scriversi:

$$(6') \qquad \mathbf{s}(Q) = \mathbf{s}_0(Q) + \int_\sigma \alpha(Q\,,M)\,\mathbf{s}_0(M)\,d\sigma\,,$$

ove $\alpha(Q\,,M)$ indica l'omografia vettoriale (funzione dei punti $Q\,,M$), che è più particolarmente una « dilatazione »:

$$\alpha(Q\,,M) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{\lambda}{4\pi}\frac{dr^2}{dn}\frac{d\,\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r}}{dQ}\,,$$

la quale, dopo qualche trasformazione, può ancora scriversi:

$$\alpha(Q\,,M) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\left[1 + 2\lambda + 3\lambda(\mathrm{grad}_Q\, r\wedge)^2\right].$$

Se ora, nel problema elastico, supponiamo noti gli spostamenti superficiali, nella (6') sarà noto $\mathbf{s}$, e si tratterà di cercare $\mathbf{s}_0$; la (6') è allora un'equazione integrale di seconda specie, il cui nucleo $\alpha(Q\,,M)$, col tendere di M a Q diventa infinito soltanto come $\frac{1}{r}$. Essa quindi può risolversi col noto metodo del Fredholm. Dopo aver così determinato $\mathbf{s}_0$, la (5) fornirà $\mathbf{s}$.

Lo stesso procedimento è applicabile alla risoluzione del problema elastico esterno [1].

2. *Equazioni del problema idrodinamico.* — Consideriamo un liquido viscoso, che occupi lo spazio S racchiuso da una superficie σ. Se diciamo $\mathbf{v}$ il vettore che rappresenta la velocità di una particella qualunque P di liquido, e p l'intensità della pressione, le equazioni del moto stazionario lento del liquido, nell'ipotesi che le forze di massa derivino da un potenziale U [2], sono:

$$(7) \qquad \Delta'\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,p_1\,,$$

$$(8) \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,,$$

ove $p_1 = (p - U)/h$, h essendo una costante.

(1) Cfr. Marcolongo, Nota citata.

(2) Si potrebbe addirittura supporre $U = 0$, giacchè il caso dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa sono nulle. Cfr. a questo proposito la mia Nota: *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso,* n. 2, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, in corso di stampa.

Orbene, se $\mathbf{a}$ è un vettore costante, e si conservano le notazioni precedenti, si soddisfa alle (7), (8) assumendo:

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dr^2}{dn}\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P \frac{\mathbf{a}}{r}, \tag{9}$$

$$p_1 = -4\operatorname{div}_P\left(\mathbf{a}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right). \tag{10}$$

Infatti, la (9) si ottiene dalla (2) per $\lambda = 1$; perciò dalle (3), (10) segue evidentemente la (7), e dalla (4) la (8); c. d. d.

Se $\mathbf{v}_0$ è un vettore funzione finita e continua dei punti M di σ, è chiaro che le espressioni

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mathbf{v}_0 \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{dr^2}{dn}\frac{d\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}}{dP}\mathbf{v}_0\, d\sigma, \tag{11}$$

$$p_1 = -\frac{1}{\pi}\operatorname{div}_P\int_\sigma \mathbf{v}_0\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma, \tag{12}$$

soddisfano pure alle (7), (8) [1].

La (11) è un caso particolare della (5), perchè si deduce dalla (5) per $\lambda = 1$, perciò si conclude pure che sussiste per $\mathbf{v}$ ancora la (6) ove $\lambda = 1$, quindi *la soluzione* $\mathbf{v}$ *delle* (7), (8) *che nei punti* Q *di* σ *coincide con un vettore dato* $\mathbf{v}(Q)$ [2], *si deduce dalla soluzione* $\mathbf{s}$ *del problema dell'equilibrio elastico per dati spostamenti superficiali, ponendo in essa* $\lambda = 1$ [3]. Tale valore di λ non è, com'è noto, un autovalore per la (6).

Essendo così determinato $\mathbf{v}$, si potrà ricavare p_1 dalla (7), perchè è verificata la condizione d'integrabilità espressa da $\operatorname{rot}\Delta'\mathbf{v} = 0$; ovvero, dopo aver ricavato $\mathbf{v}_0(Q)$ dalla (6) per $\lambda = 1$, si otterrà poi p_1 dalla (12). Più semplicemente ancora, basterà applicare la formola:

$$p_1 = -\lim_{k=\infty}(k \operatorname{div}\mathbf{s}),$$

che si desume dal confronto delle (7), (8), (1).

[1] Ciò si desume anche dalle ultime due formole della mia Nota citata.

[2] Trattandosi di un campo finito S, il vettore $\mathbf{v}(Q)$ deve soddisfare alla condizione seguente, che si ricava dalla (8), mediante il teorema della divergenza:

$$\int_\sigma \mathbf{v}\times\mathbf{N}\,d\sigma = 0.$$

Invece per il problema esterno, questa condizione non occorre.

[3] Una verifica di questa proprietà si ha, nel caso della sfera, dalle formole stabilite nella mia Nota citata.

La stessa proprietà vale per il problema idrodinamico esterno.

Giova notare che — come mi fa gentilmente osservare il prof. Levi-Civita — se non si tenesse conto di condizioni ai limiti, si riconoscerebbe immediatamente che l'integrazione delle equazioni indefinite (7), (8) può farsi dipendere dall'integrazione dell'equazione indefinita (1). Basta infatti, per ogni integrale $\mathbf{s}$ della (1), introdurre una funzione φ tale che $\Delta\varphi = \operatorname{div}\mathbf{s}$, allora ponendo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} - \operatorname{grad}\varphi \quad , \quad p_1 = -(k+1)\,\Delta\varphi ,$$

le (7), (8) risultano soddisfatte.

Osservazione. — Anche la soluzione della doppia equazione di Laplace, che assume, colla sua derivata normale, dati valori al contorno, si può ottenere come caso particolare del problema elastico considerato nel n. 1: basta precisamente porre $\lambda = -1$, ovvero $k = -1$, come ho mostrato già una decina d'anni addietro [1]; in tal caso bisogna però aggiungere alla (1) la condizione $\Delta \operatorname{div}\mathbf{s} = 0$, che per $k \neq -1$ è conseguenza della (1). Infatti, ponendo $\mathbf{s} = \operatorname{grad} u$, ove u è una funzione da determinarsi, si ha $\operatorname{div}\mathbf{s} = \Delta u$, onde si conclude che u soddisfa alla doppia equazione di Laplace $\Delta\Delta u = 0$. Conoscendo poi $\mathbf{s}$ per i punti del contorno, risulterà nota (a meno di una costante) la u nei punti del contorno stesso, e poi anche la derivata normale di u, che vale $\mathbf{N} \times \mathbf{s}$.

Meccanica — *Sopra le correnti liquide spontanee* [2]. Nota di Umberto Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

Nella Nota precedente ho dato un esempio di effettiva esistenza di correnti liquide spontanee, immaginando che il moto liquido piano avvenga in una corona circolare e sia simmetrico rispetto al centro.

Nella presente Nota mi propongo di mostrare che l'esempio addotto rappresenta *l'unica soluzione* possibile che corrisponda ad una corrente spontanea *irrotazionale*, che si svolge in un campo anulare (del tipo « corona circolare » dal punto di vista della connessione).

1. Nel caso *irrotazionale* il problema è condotto alla ricerca di due linee libere λ e μ, e di una funzione $\Psi(x, y)$ (funzione di corrente), armonica nello spazio A compreso tra λ e μ (vedi la figura della Nota I), e tale che sia $\Psi = 0$ sopra λ e $\Psi = q$ sopra μ, e di più che il $\underset{1}{\Delta}\Psi$

[1] Boggio, *Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane*, n. 8, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV, 1899-1900. In questa Nota ho considerato solo il caso del piano, ma quelle considerazioni sono valide anche per lo spazio.

[2] Cfr. questi Rendiconti Nota I, pag. 10.

assuma un valore costante tanto su λ che su μ, eventualmente distinti tra loro.

Una tale funzione Ψ è legata alle componenti u e v della velocità, in un generico punto (x, y), dalla relazione differenziale

$$d\Psi = - v\,dx + u\,dy\,. \tag{1}$$

Essendo la Ψ armonica in A, si potrà definire (a meno di una costante additiva) la funzione associata φ (*potenziale di velocità*), mediante l'equazione ai differenziali totali

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy\,. \tag{2}$$

Posto

$$\left\{\begin{array}{l} x + iy = z\,, \\ u - iv = w\,, \\ \varphi + i\Psi = f, \end{array}\right. \tag{3}$$

w ed f riescono, com'è ben noto, funzioni della variabile complessa z, a causa delle (1) e (2); e le (1) e (2) stesse si compendiano nella relazione seguente:

$$\frac{df}{dz} = w\,. \tag{4}$$

Chiamando V il valore assoluto della velocità, avremo

$$V = |w| = \Delta_1 \Psi = \Delta_1 \varphi\,.$$

La V non va mai a zero e deve assumere valori costanti sopra λ e μ.

Prendiamo, ciò che è sempre lecito con opportuna scelta dell'unità di velocità,

$$V = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{sopra } \lambda\,, \\ e^{\beta} & \text{sopra } \mu\,, \end{array}\right. \tag{5}$$

designando β una costante.

2. Introduciamo ora una funzione

$$\omega(z) = \vartheta + i\tau\,,$$

con ϑ e τ funzioni reali degli argomenti x e y, legata alla velocità w dalla relazione

$$w = e^{-i\omega}. \tag{6}$$

Essendo

$$V = |w| = e^{\tau},$$

le (5) esigono che sia

$$(7) \qquad \tau = \begin{cases} 0 \text{ sopra } \lambda, \\ \beta \text{ sopra } \mu, \end{cases}$$

essendo $\tau(x, y)$ armonica e ovunque regolare nel campo A.

Ciò posto prendiamo in esame i coefficienti dell'unità immaginaria i nelle funzioni $f(z)$ e $\frac{q}{\beta}\omega(z)$, cioè le due funzioni $\Psi(x, y)$ e $\frac{q}{\beta}\tau(x, y)$: entrambi sono armoniche e regolari in A e prendono al contorno $\lambda + \mu$ i medesimi valori 0 e q, ne segue

$$\Psi = \frac{q}{\beta}\tau \quad , \text{ in A}.$$

La identità della parti immaginarie delle funzioni $f(z)$ e $\frac{q}{\beta}\omega(z)$ porta come conseguenza la identità (a meno di una costante additiva) delle parti reali e quindi, a meno di una inessenziale costante reale, la identità delle funzioni stesse.

Dovremo avere così

$$(8) \qquad \omega(z) = \frac{\beta}{q} f(z).$$

Quest'ultima unitamente alle (4) e (6), dà luogo all'equazione differenziale

$$\frac{dz}{df} = e^{\frac{\beta i}{q} f(z)},$$

che integrata porge

$$(9) \qquad z - z_0 = -i\frac{q}{\beta} e^{\frac{\beta i}{q} f(z)}.$$

Da questa scende che le linee di flusso $\Psi =$ costante, tra le quali vi sono appunto le linee libere λ e μ, sono circonferenze concentriche.

Il che prova il nostro asserto.

Osservazione. — In particolare per $\beta = 0$, le linee di flusso divengono rette parallele; e per le (8) e (6) si ha $w = 1$. In tal caso la corrente liquida si riduce ad una traslazione uniforme, e di velocità unitaria, della porzione indefinita A di piano.

Matematica. — *Su la continuità e la derivabilità di un integrale rispetto ad un parametro.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

Sia $f(x,y)$ una funzione di x e y data in un campo C, che dapprima, per semplicità, supporremo rettangolare e limitato dalle rette $x=a$, $x=b'$ $(a<b')$, $y=c$, $y=d$, $(c<d)$. Supponendo la $f(xy)$ linearmente integrabile [1] rispetto ad x in tutto C, l'integrale

$$(1) \qquad \int_a^b f(xy)\,dx = \mathrm{F}(y),$$

$(a \leq b \leq b')$ risulta funzione di y in tutto l'intervallo (c, d).

Ci domandiamo, allora: sotto quali condizioni per la $f(x,y)$ la $\mathrm{F}(y)$ risulta continua?

1. Una condizione sufficiente è quella ben nota della continuità di $f(xy)$ rispetto all'insieme delle variabili (x, y). Questa, però, è troppo restrittiva e già se ne conosce una più larga, data dal prof. Arzelà [2] il quale suppone la $f(x,y)$ limitata in tutto il campo C e continua rispetto ad y.

Relativamente alle ipotesi di questa seconda condizione, si possono fare due osservazioni. In primo luogo non è necessario supporre la continuità di $f(xy)$ rispetto ad y in tutto C: può benissimo, tale continuità, mancare completamente lungo le rette $x=m$, per tutti i valori di m $(a \leq m \leq b)$ di un insieme di misura lineare nulla (per es., per tutti i valori razionali di m). Ciò perchè il teorema sull'integrazione per serie, che entra in gioco nella dimostrazione, conserva ancora la sua piena validità. In secondo luogo, si può osservare che, alla condizione, per la $f(xy)$, di essere limitata in tutto C, possono sfuggire i punti di un insieme che sia di misura lineare nulla su ogni retta $y=$ cost. Anche qui la ragione sta nel fatto che il già accennato teorema sull'integrazione per serie continua a sussistere.

2. Ci si può domandare: per la continuità di $\mathrm{F}(y)$ è necessario supporre la continuità di $f(xy)$, rispetto ad y, su tutte le rette $x=m$, ad eccezione al più dei valori m di un insieme di misura nulla? La risposta è negativa. Si prenda, per es., per campo C il quadrato di vertici opposti

(1) Per la massima generalità dei risultati intenderemo di parlare sempre di integrabilità nel senso del Lebesgue.

(2) *Sugli integrali di funzioni che oltre alla variabile d'integrazione contengono altre variabili.* Rend. R. Acc. delle Sc. di Bologna, 1887; *Sulle serie di funzioni,* Parte seconda. Mem. R. Acc. Sc. di Bologna, 1900.

$(0, 0), (1, 1)$, e si definisca la $f(xy)$ nel seguente modo: essendo α un numero qualunque soddisfacente alla condizione $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, sia sulle rette $y = 1 - \alpha, \frac{1-\alpha}{2}, \frac{1-\alpha}{2^2}, \frac{1-\alpha}{2^3}, \ldots$, $f(xy) = 1$ per $x \neq 2\alpha$, $f(x, y) = 0$ per $x = 2\alpha$; sia, poi, $f(x, 0) = 1$. Sul lato $(0, 0), (1, 0)$ la $f(xy)$ è, allora, discontinua in tutti i punti, rispetto ad y; eppure la $F(y) = \int_0^b f(xy)\, dx$, $(0 \leq b \leq 1)$ è continua, perchè è sempre $F(y) = b$.

3. Relativamente al caso in cui esistano punti nell'interno dei quali la funzione $f(xy)$ non resta limitata, il prof. Arzelà [1] ha dimostrata la continuità di $F(y)$ per $y = \bar{y}$, nelle seguenti ipotesi: 1) sulla retta $y = \bar{y}$ l'insieme dei punti detti è numerabile; 2) sulla medesima retta la $f(xy)$ è continua rispetto ad y; 3) l'integrale $\int_a^b f(x, y)\, dx$ ammette limite, al tendere di y a $\bar{y}$, e questo limite è continuo rispetto all'estremo b. Ora, quest'ultima ipotesi, benchè necessaria, è, nella pratica, molto difficile a constatarsi; è, quindi, utile dare una proposizione la quale non abbia bisogno di supporla verificata.

Dimostreremo, perciò, che *se la $f(x, y)$ ammette su ogni retta $x = m$ — ad eccezione, al più, dei valori di m di un insieme di misura nulla — la derivata parziale rispetto ad y, soddisfacente alla condizione*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M_m, \tag{2}$$

dove M_m è un numero positivo che può variare con m; e se, inoltre, la $\frac{\partial f}{\partial y}$ è su C superficialmente integrabile, allora l'integrale (1) *è una funzione continna di y*. Si ha, infatti,

$$\int_a^b f(x, y+h)\, dx - \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b [f(x, y+h) - f(xy)]\, dx$$
$$= \int_a^b dx \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Ma, per essere $\frac{\partial f}{\partial y}$ superficialmente integrabile, è [2]

$$\int_a^b \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\, dx = \int_a^b dx \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \int_y^{y+h} dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx;$$

si ha, perciò,

$$\int_a^b f(x, y+h)\, dx - \int_a^b f(xy)\, dx = \int_y^{y+h} dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dy,$$

[1] Loc. cit.

[2] Fubini, *Sugli integrali multipli.* Rend. R. Acc. dei Lincei, 1907.

e quindi

$$\lim_{h=0} \int_a^b f(x, y+h)\, dx = \int_a^b f(xy)\, dx \, .$$

Osservazione I. — Invece della $\frac{\partial f}{\partial y}$, si può porre che alla (2) soddisfi il rapporto incrementale di $f(xy)$ rispetto ad y. Si vede, perciò, che la proposizione precedente vale anche quando la $\frac{\partial f}{\partial y}$ manca in tutti i punti della retta $y = \text{cost}$.

Osservazione II. — Alla prima delle condizioni poste nel precedente enunciato si può sostituire l'altra, più generale, che sulle rette $x = m$ la $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia solamente finita, purchè la $f(x, y)$ sia, ivi, a variazione limitata rispetto ad y; si può anche sostituire la condizione che sulle rette $x = m$ la $f(xy)$ sia, rispetto ad y, *assolutamente continua* (¹).

4. Relativamente alla continuità di (1) possiamo anche dire che *se* $f(x, y+h)$ *converge, sempre crescendo per tutti gli* x, *o sempre decrescendo, a* $f(x, y)$, *al tendere di* k *a zero per valori positivi, e parimenti per valori negativi, la* (1) *è funzione continua di* y. Ciò risulta dal fatto che, per l'ipotesi fatta, esiste il limite dell'integrale $\int_a^b f(x, y+h)\, dx$ per $k = +0$, ed anche per $k = -0$, e quindi che si può applicare un teorema di B. Levi (²) sull'integrazione delle serie a termini positivi.

La (1) *è ancora continua rispetto ad* y *se sono verificate le seguenti ipotesi:* 1) *il quadrato di* $f(xy)$ *è integrabile rispetto ad* x *ed è, in tutto* C,

$$\int_a^b f^2(xy)\, dx < \mathrm{M}$$

con M *numero positivo fisso*; 2) *la* $f(xy)$ *è continua rispetto ad* y, *eccettuate al più le rette* $x = m$, *per i valori di* m *di un insieme di misura nulla.* Questa proposizione risulta da un teorema sull'integrazione per serie dato da F. Riesz (³).

(¹) Una funzione $f(x)$ dicesi *assolutamente continua* in (a, b) se, preso un numero positivo σ piccolo a piacere, esiste poi sempre un corrispondente numero μ, maggiore di zero, tale che sia $|\Sigma\{f(\beta_i) - f(\alpha_i)\}| < \sigma$, dove la sommatoria è estesa ad un qualsiasi gruppo d'intervalli (α_i, β_i), due a due distinti di (a, b), avente una misura minore di μ (Cfr. Vitali, *Sulle funzioni integrali.* Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. XL).

(²) Rend. Istituto Lombardo, 1906.

(³) Comptes rendus, 18 marzo 1907.

5. Le proposizioni precedenti valgono, come si vede facilmente, anche se i limiti dell' integrale (1), invece di essere fissi, variano in modo continuo al variare di y. Esse, inoltre, dànno altrettante condizioni relative all' integrale

$$\int_a^\infty f(xy)\,dx\,.$$

Si potrà, infatti, asserire la continuità di quest' integrale ogni qualvolta si sappia che l'altro integrale $\int_a^b f(xy)\,dx$ è continuo, per ogni $b > a$, e converge al primo in modo *quasi uniforme* (¹).

Come caso particolare si ha la continuità di

$$(3) \qquad \int_a^\infty \varphi(x)\,k(xy)\,dx$$

nelle seguenti ipotesi: 1) la funzione $\varphi(x)$ data in $(a\,,\infty)$, è monotòna e tendente a zero per $x=\infty$; 2) la $k(xy)$, data per ogni x di $(a\,,\infty)$ e per ogni y di $(c\,,d)$, è continua rispetto ad y e *limitata in ogni campo limitato*; 3) per ogni p e q di $(a\,,\infty)$ e per ogni y di $(c\,,d)$ è

$$\left|\int_p^q k(xy)\,dx\right| < \mathrm{M}\,,$$

con M numero positivo fisso (²).

Si ha la continuità di 3) anche nelle seguenti ipotesi: 1) le funzioni $\varphi(x)$, $k(xy)$ sono limitate in tutto il campo $a \leq x < \infty$, $c \leq y \leq d$; 2) esiste $\int_a^\infty |\varphi(x)|\,dx$; 3) la $k(xy)$ è continua rispetto ad y.

6. Occupiamoci, ora, della derivabilità dell' integrale 1), rispetto ad y. L'Arzelà (luogo citato) ha dimostrato che, se la $f(xy)$ ammette la derivata parziali rispetto ad y limitata in tutto C, la $\mathrm{F}(y)$ è derivabile e vale la formola

$$(4) \qquad \frac{d\mathrm{F}(y)}{dy} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx \quad (^3).$$

(¹) Cfr. Arzelà, loc. cit.

(²) Cfr. Pierina Quintili, *Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro.* Rend. R. Acc. dei Lincei, novembre 1908 e maggio 1909.

(³) Veramente l'Arzelà aggiunge la condizione dell' integrabilità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto ad x. Per noi, che adottiamo la definizione di integrale del Lebesgue, questa integrabilità risulta dal fatto che la $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h=0} \frac{f(x\,,y+h) - f(x\,,y)}{h}$, come limite di funzione misurabile, è misurabile e perciò, essendo limitata, integrabile.

Inoltre ha anche dimostrato che, se la $\frac{\partial f}{\partial y}$ è integrabile rispetto ad x, e su ogni retta $y = \text{cost}$ è numerabile il gruppo dei punti negli intorni circolari dei quali la derivata detta non è limitata, allora esiste la $\frac{dF}{dy}$ e vale la (4) *tutte le volte che la* $F(y)$ *ammette le derivate destra e sinistra, e queste sono continue rispetto all'estremo* b *dell'integrale* (1).

Se la $\frac{\partial f}{\partial y}$ non è limitata in tutto C, cosa si potrà dire della derivabilità di $F(y)$ qualora non si sappia nulla circa l'esistenza e la continuità, rispetto a b, delle sue derivate destra e sinistra?

Supponiamo che in tutto C esista la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y}$, integrabile superficialmente ed anche linearmente rispetto ad x [1]. Inoltre, la $f(x, y)$ sia, rispetto ad y, una funzione *assolutamente continua*, per ogni x di (a, b') — ad eccezione al più di un insieme di misura nulla. È allora,

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \frac{1}{h}\int_a^b [f(x, y+h) - f(xy)]\, dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^b dx \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \frac{1}{h}\int_y^{y+h} dy \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx \quad [2].$$

E perciò: *condizione necessaria e sufficiente affinchè, nelle ipotesi poste, esista* $\frac{dF}{dy}$ *e valga la* (4), *è che* $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\, dx$ *sia la derivata del suo integrale, rispetto ad* y.

Possiamo, in particolare, dire che *esiste la* $\frac{dF}{dy}$ *e vale la* (4) *se la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *esiste, è superficialmente integrabile, e su ogni retta* $x = m$ *— eccettuati al più i valori di* m *di un insieme di misura nulla — soddisfa alla disuguaglianza*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < M_m;$$

ed inoltre è soddisfatta una delle due condizioni: 1) *la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *è continua rispetto ad* y, *ha il quadrato integrabile rispetto ad* x *ed è*

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 dx < M;$$

(1) L'ipotesi dell'integrabilità superficiale porta già con sè l'integrabilità rispetto ad x per tutti i valori di y di C, eccettuati quelli di un insieme di misura nulla.

(2) Ved. Fubini, loc. cit.

2) *la* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *è integrabile rispetto ad* x, *e ad essa tende la* $\frac{\partial f(x, y+h)}{\partial y}$, *sempre crescendo per tutti gli* x *(o sempre decrescendo), al tendere di* h *a* $+0$; *e parimenti al tendere di* h *a* -0.

Sia, poi, per ogni $b > a$, $\int_a^b f(xy)\,dx$ derivabile e valga la (4); l'integrale $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ tenda in modo *quasi uniforme* a $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$, rimanendo però sempre inferiore, in modulo, ad un numero fisso; allora $\int_a^\infty f(xy)\,dx$ sarà derivabile e varrà la formola

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(xy)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,dx .$$

Astronomia — *Sopra talune recenti osservazioni di Marte.* Nota del dott. VINCENZO CERULLI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Nella *grande opposizione* del 1909, Marte ha raggiunto il diametro apparente di 24″ ed è stato possibile, nel grande telescopio di 83 centimetri, dell'osservatorio di Meudon (Parigi) osservarlo con ingrandimenti che arrivarono agli 800 diametri. Il pianeta è venuto, per tal modo, a presentarsi come una palla di 23 millimetri di diametro, vista da 25 centimetri di distanza. È merito del prof. Deslandres, direttore dell'Osservatorio, l'aver pensato di dedicare a Marte, nelle notti dell'opposizione, quel magnifico refrattore che è fra i migliori usciti dall'officina dei celebri Henry. Ed è merito non minore l'averlo affidato al valente areografo Antoniadi, il quale ha potuto in poche notti rendersi conto della trasformazione che l'immagine di Marte, data dai piccoli telescopî, subiva nel telescopio gigantesco.

Mi sembrano degni di esser conservati alla storia dell'Areografia, e perciò ho l'onore di affidarli ai Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, taluni brani salienti delle lettere che l'Antoniadi ha avuto la cortesia di scrivermi durante il corso delle sue osservazioni:

In data 29 settembre 1909 egli mi segnalava che « Mars appears covered with *natural* spots, most irregular in outline and intensity. There was no trace whatever of geometrical patterns, although details much more delicate than the canal system were held quite steadily. Indeed, the amount of irregular markings visible was such that it would have been a titanic feat to represent it faithfully: hence my drawing does not give more than the two-thirds of the objects seen ».

4 ottobre. « Tous les prodigieux détails, révelés par la grande lunette, et que l'on voyait sans aucune difficulté, étaient tous excessivement irréguliers de forme et de ton, et je n'ai eu des sensations de lignes droites (visibles isolément chacune) que pendant une seconde en tout sur 4 heures ».

12 ottobre. « Quelle structure complexe que celle du Mare Sirenum, et quelle drôle de forme qu'a cette Thaumasia, vraiment **Θαυμασία**! L'aspect géométrique du Ganges et de sa bande claire à droite est un effet de mauvaises images. Hier soir au moment du calme relatif (car il y avait un vent faible de SW) mon attention était toute entière concentrée sur l'aspect du Solis lacus et lorsque j'ai commencé l'étude du Ganges, l'image était bien agitée. C'est alors que les taches affectaient une forme surnaturelle et géométrique ».

6 novembre. « Les canaux de Schiaparelli ont une base objective, mais il n'y a aucune géometrie dans tout cela. Comme vous le dites, c'est une intégration de taches éparses que l'on voit comme une ligne. C'est là un escamotage de l'oeil. Avec le 83^{cm} je vois Mars deux fois plus près de la Terre, qu'à Milan, et alors les grands canaux s'évanouissent en estompages informes, toujours irréguliers comme les taches de la Lune. Pendant quelques secondes le 6 octobre, j'ai vu sur Amazonis la véritable structure des taches désertiques martiennes. Il y avait une merveilleuse agglomération de taches faibles irrégulières agrémentées de marbrures ondoyantes...

...Tout cela avait un aspect *naturel* admirable, qu'aucun artiste ne saurait rendre ».

23 novembre. « Comme vous le savez, l'objectif de $0^{m}.83$ est *hostile* aux aspects géométriques. Son grand pouvoir séparateur tend à décomposer en taches irrégulières tous les canaux à base objective. Tous les canaux de la région du *Mare Cimmerium* se décomposent en masses irrégulières disjointes, ou bien en bords d'ombres diffuses ».

Ognuno vede l'importanza di queste osservazioni e come esse lascino sperare per un'epoca assai prossima un progresso essenziale dell'areografia. Esse ci dimostrano che i telescopî giganteschi dell'età presente sono già capaci di darci la topografia di Marte. Mentre però il Marte vero, il Marte preconizzato dalla teoria ottica, comincia ad apparire, comincia d'altra parte a rivelarsi insufficiente l'opera dell'areografo visuale, anche il più provetto. Se nella prima lettera l'Antoniadi dichiarava di aver potuto disegnare appena i due terzi delle cose viste, nelle altre lettere egli spiega meglio il suo pensiero dicendo che i particolari dell'immagine erano tanti da sfidare la facoltà comprensiva e rappresentativa di qualsiasi artista. Insomma, per usare un'altra frase dello stesso Antoniadi, il disegno del Marte naturale è un'opera titanica! Fortunatamente, l'abilità dell'osservatore, toccando al suo limite, trova un prezioso surrogato nella fotografia. Finora questa ha dato immagini di Marte troppo piccole (non escluse quelle

ottenute ultimamente dal prof. Hale), nelle quali la separazione dei particolari si fa con difficoltà non minore di quella che s'incontra visualmente nei piccoli telescopî. Ma da studî ed esperimenti che mi è riuscito di fare mediante una piccola camera di Barlow, applicata al refrattore di 39 cm. di Teramo (Collurania), io mi sento in grado di ritenere che in un telescopio di un metro e mezzo di apertura, come quello di M. Wilson, *debba* essere possibile prendere delle *istantanee* di Marte, con 20 millimetri di diametro.

Facciamo voti che questo desiderio si realizzi al più presto.

Mineralogia. — *Una varietà di calcite cobaltifera di Capo Calamita nell'isola d'Elba.* Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Struever.

Nel riordinamento a cui mi sono accinto delle importantissime collezioni Elbane di questo Museo Mineralogico di Firenze, mi si è data occasione di osservare un campione della collezione Foresi, classificato come eritrite, ma che già a prima vista mostra caratteri del tutto differenti da quelli del *flos cobalti*. Di questo ha soltanto il bel color roseo vivo, mentre per la struttura e l'apparenza esterna ricorda la sferocobaltite. Per questa ragione e per il fatto di trovarsi il mio minerale insieme con calcite biancastra, alla quale passa anche per varie sfumature di colore, mi sembrò che potesse trattarsi di una miscela di carbonati di calcio e di cobalto; e poichè miscele cobaltifere nella serie dei carbonati romboedrici non sono molto frequenti, parvemi valesse la pena di indagare più intimamente la costituzione del minerale in questione.

Esso proviene dalla località Francesche al Mare presso Capo Calamita, dalla quale provengono pure i noti campioni di eritrite. Si trova come questi sopra una roccia limonitica e in parte magnetitica assai compatta e lo accompagna una *calcite* opaca biancastra e lievemente rosea qua e là coperta di *limonite*, della quale calcite sembra essere di formazione posteriore. Non si presenta in cristalli distinti, ma in massa cristallina a struttura sferoidale lamellare. È abbastanza fragile con sfaldatura romboedrica. Il peso specifico è di 2,75, superiore cioè a quello della calcite. Durezza un po' superiore a quella della calcite normale (spato di Islanda).

Lucentezza vitrea; colore roseo vivo come il fiore di pesco, con lieve tendenza al violaceo. La colorazione non è assolutamente uniforme in tutta la massa: ma dove più, dove meno intensa.

Saggi chimici qualitativi dimostrano che il minerale è un carbonato contenente moltissimo ossido di calcio, poco ossido di cobalto, quantità minime di ossidi di ferro e di magnesio e tracce appena di ossido di manganese.

Infatti l'analisi quantitativa diede i seguenti risultati:

CaO . . .	54,41
CoO . . .	1,27
FeO . . .	0,15
MgO . . .	0,27
MnO . . .	tr.
CO_2 . . .	43,55
	99,65

Calcolando con la quantità di ciascun ossido trovata la corrispondente quantità di anidride carbonica, la composizione del minerale risulta la seguente:

$CaCO_3$ . .	97,16
$CoCO_3$ . .	2,02
$FeCo_3$ . .	0,24
$MgCO_3$ . .	0,56
	99,98

La costituzione chimica è quindi quella di una varietà di calcite cobaltifera che ben opportunamente si può chiamare, seguendo la nomenclatura più razionale adottata già per altre varietà del medesimo minerale, *cobalto-calcite.*

Non vorrei chiamare nuova tale varietà, sebbene questa mia, a quanto mi è dato conoscere, sia la prima analisi di una vera calcite cobaltifera, perchè nella letteratura mineralogica si trovano già cenni intorno a varietà di calciti cobaltifere, per quanto incompleti e non accompagnati da analisi. Così Breithaupt (1) fra i suoi *problematische Karbonite* cita quattro varietà di *pfirsichblütrothe Kohlensaures Kobaltoxyd enthaltende Karbonite*, una di Riechelsdorf, due di Schneeberg ed una di Przibram (quest' ultima contenente anche ossido manganoso e magnesia) nelle quali potè constatare, con saggi al cannello la presenza di ossido di cobalto.

Weisbach (2) parla della esistenza di calcite cobaltifera rosea cristallizzata di Schneeberg e di altre località, ma non ne dà analisi. Così Groth (3) ricorda semplicemente la medesima varietà di Schneeberg tinta in rosso da carbonato di cobalto.

Invece Gibbs (4) ci ha fatto conoscere la composizione della varietà di Przibram ricordata da Breithaupt che è, non una calcite, ma una vera dolomite cobaltifera con 5,17 % di ossido di cobalto.

(1) Breithaupt August. *Vollständiges Handbuch der Mineralogie,* II, Band 1841, pag. 243.

(2) Weisbach A., *Kobaltspath, ein neues Glied der Kalkspathgruppe.* Jahrbuch f. d. Berg. u. Hüttenwesen im Königreich Sachsen, 1877.

(3) Groth P, *Die Mineraliensammlung Strassburg,* 1878, pag. 122.

(4) Gibbs W., *Zerlegung eines Kobalthaltigen Braunspathes.* Pogg. Annalen, *71,* 361.

Biologia. — *Alcune osservazioni sulla presenza di Leishmanie nei cani.* Nota di C. BASILE, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH offre, a nome dell'autore dott. EREDIA, la pubblicazione intitolata: *I venti in Italia*, e ne parla.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario MILLOSEVICH comunica i seguenti elenchi di concorrenti ai premi scaduti col 31 dicembre 1909:

Elenco dei lavori presentati al concorso al Premio Reale per la *Fisiologia normale e patologica*.

(Scadenza 31 dicembre 1909. — Premio L. 10.000).

1. BARBIERI NICOLA ALBERTO. 1) « Le radici dorsali o posteriori dei nervi spinali sono motorie, centrifughe e trofiche » (ms.).

2. BOCCI BALDUINO. 1) « Il senso dei colori e la legge dell'ereditarietà » (st.). — 2) « Note ed appunti di tecnica fisiologica » (st.). — 3) « La immagine visiva cerebrale, ovvero i nuovi orizzonti dell'ottica fisiologica e i necessarî confini dell'ottica fisica » (st.). — 4) « L'immagine visiva cerebrale » (st.). — 5) « Le fibre ottiche e la cellula nervosa dei centri visivi » (st.). — 6) « La funzione del nervo simpatico nell'accomodazione ocutare » (st.). — 7) « Studî critici e sperimentali intorno ad alcune questioni controverse di Fisiologia. Parte I: Fisiologia del sistema nervoso. Parte II: La Vescica urinaria come organo espulsivo. La fibra muscolare liscia » (st.).

3. BOTTAZZI FILIPPO. 1) « La fisiologia del simpatico, secondo le ricerche di J. N. Langley e dei suoi collaboratori » (st.). — 2) « Trattato di Chimica fisiologica ». — 3) « Traduzione in italiano dall'inglese dell'opera: Trattato di fisiologia di M. Foster » (st.). — 4) « Sulle proprietà dei nucleoproteidi » (st.). — 5) (e CAPPELLI) « Il sodio e il potassio negli eritrociti del sangue di diverse specie animali e in varie condizioni fisio-patologiche » (st.). — 7) « Ricerche fisiologiche sul sistema nervoso viscerale delle Aplisie e di alcuni Cefalopodi » (st.). — 7) « Azione del vago e del simpatico sugli

atrii del cuore dell'*Emys europaea* » (st.). — 8) « Sull'azione fisiologica dei saponi » (st.). — 9) « Di una nuova nomenclatura nella fisiologia comparata del sistema nervoso » (st.). — 10) (e Enriques) « Sulle proprietà osmotiche delle ghiandole salivari posteriori dell'*Octopus macropus*, nel riposo e in seguito all'attività secretiva » (st.). — 11) « Ancòra dell'azione del vago e del simpatico sugli atrii del cuore dell'*Emys europaea* » (st.). — 12) « Contributi alla fisiologia comparata della digestione. I. La funzione digerente nell'*Aplysia limacina*. II. Composizione chimica dell'epato-pancreas » (st.). — 13) «Intorno all'origine dell'acetone nell'organismo » (st.). — 14) « Del tannino come mezzo per dealbuminizzare i liquidi organici » (st.). — 15) « L'innervazione viscerale nei Crostacei e negli Elasmobranchi » (st.) — 16) « Sulle proprietà osmotiche delle membrane viventi » (st.). — 17) (e Orefici) « Ricerche sull'acetonuria e sul metabolismo dei corpi azotati nei bambini difterici » (st.). — 18) (e Orefici) « Ricerche chimiche in due casi di leucemia » (st.). — 19) « Biologia e Filosofia » (st.). — 20) « Leonardo da Vinci filosofo-naturalista e fisiologo » (st.). — 21) « Un mezzo assai semplice per ottenere grandi masse di cellule epiteliali » (st.). — 22) « Gelatinificazione della soluzione di un proteide epatico operata dall'idrato potassico » (st.). — 23) « Proprietà di nucleoproteidi estratti dalla placenta muliebre » (st.). — 24) « Esperimenti di autodigestione in soluzioni di proteidi epatici » (st.). — 25) (e Onorato) « Presentazione di una cagna con fistola ureterale permanente » (st.) — 26) « Ricerche sulla composizione chimica della placenta muliebre » (st.). — 27) « Circa alla funzione biologica del calcio » (st.). — 28) (e Pierallini) « Contributi alla conoscenza della funzione dei reni. I. Di alcune modificazioni del sangue e dell'orina nei nefritici » (st.). — 29) « Azione della « Paraganglina Vassale » sull'esofago e sullo stomaco del *Bufo vulgaris* » (st.). — 30) (e Gaufini) « Ricerche istologiche sull'atrio del cuore di *Emys europaea* » (st.). — 31) « Nuove ricerche sulle « oscillazioni del tono » degli atrii cardiaci di *Emys europaea* » (st.). — 32) « Di un riflesso inibitorio nell'esofago del *Bufo vulgaris* » (st.). — 33) « Ricerche sul *sinus venosus* dell'*Emys europaea* » (st.). — 34) (e Torretta) « Azione dell' « adrenalina » sulla muscolatura longitudinale dell'esofago di *Bufo vulgaris* » (st.). — 35) (e Onorato) « Sulla funzione dei reni sperimentalmente alterati » (st.). — 36) « Proprietà chimiche e fisiologiche delle cellule epiteliali del tubo gastro-enterico » (st.). — 37) « Ricerche sulla genesi del tetano muscolare » (st.). — 38) « Le « curve di secondo e di terzo ordine » del tracciato della pressione arteriosa nei cani » (st.). — 39) « Sui movimenti automatici di certi muscoli striati » (st.). — 40) « La corrente dell'energia per gli organismi viventi » (st.). — 41) « Ancòra delle relazioni di Leonardo da Vinci con Marco Antonio della Torre e Andrea Vesalio » (st.). — 42) (e Costanzi) « Nuove ricerche sull'azione dell'adrenalina (Clin) e della paraganglina (Vas-

sale) » (st.). — 43) (e Sturchio) « Sull'origine della pressione osculare » (st.). — 44) « Sulla regolarizzazione della pressione osmotica negli organismi animali. I. Pressione osmotica e conduttività elettrica dei liquidi di animali acquatici » (st.). — 45) « Sulla regolarizzazione della pressione osmotica ecc. II. Resistenza dei corpuscoli rossi di *Scyllium* e di *Sipunculus* a cedere rispettivamente l'emoglobina e l'emeritrina » (st.). — 46) « Gli avvenimenti chimici nell'organismo animale e l'azione dei fermenti intracellulari » (st.). — 47) « Il metodo sperimentale nelle discipline biologiche » (st.). — 48) « Elementi di Chimica fisica » (st.). — 49) « La Stazione zoologica di Napoli e l'incremento della fisiologia comparata » (st.). — 50) « Sulla regolarizzazione della pressione osmotica ecc. III. Pressione osmotica e conduttività elettrica del succo muscolare, del siero del sangue e dell'orina dei pesci » (st.). — 51) « Leonardo da Vinci. Conferenza » (st.). — 52) « Leonardo da Vinci e la biologia moderna » (st.). — 53) « Rassegna scientifica » (st.). — 54) « Rassegna di Fisiologia » (st.). — 55) « Ricerche sulla muscolatura cardiale dell'*Emys europaea* » (st.). — 56) « Leonardo da Vinci naturalista » (st.). — 57) « Problemi di Biologia » (st.). — 58) « Grassi e glucogeno nel fegato dei Selacii » (st.). — 59) « Saggi su Leonardo da Vinci. I. Leonardo da Vinci anatomico » (st.). — 60) « Ricerche sulla regolarizzazione della pressione osmotica ecc. IV. Origine dell'urea nei Selacii » (st.). — 61) « Problemi di Biologia. II. Lo stato colloidale della materia nei suoi rapporti coi processi vitali » (st.). — 62) « La contrazione muscolare » (st.). — 63) « Teorie della funzione del cuore » (st.). — 64) « Lo stato colloidale della materia ecc. » (st.). — 65) « Proprietà chimiche e fisiologiche delle cellule epiteliali del tubo gastro-enterico » (st.). — 66) « Ricerche chimico-fisiche sui liquidi animali. I. Il « tempo di deflusso » del siero del sangue di alcuni animali marini e terrestri » (st.). — 67) « Ricerche ecc. II. Il contenuto in azoto proteico del siero del sangue di diversi animali » (st.). — 68) (e Buglia e Jappelli) « Ricerche ecc. III. Variazioni della conduttività elettrica, viscosità e tensione superficiale del siero del sangue durante la dialisi » (st.). — 69) (e Scalinci) « Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. I. Alcune osservazioni preliminari sui liquidi oculari » (st.). — 70) « Fisiologia della nutrizione » (st.). — 71) (e Scalinci) « Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. II. Le proteine della lente cristallina » (st.). — 72) (id.) « Ricerche ecc. III. Imbibizione della lente cristallina in acqua e in vapor d'acqua » (st.). — 73) (id.) « Ricerche ecc. IV. Disimbibizione della lente in aria secca e riimbibizione di essa in acqua e in vapor d'acqua » (st.). — 74) (id.) « Ricerche ecc. V. Imbibizione della lente nei liquidi oculari » (st.). — 75) (id.) « Ricerche ecc. VI. Imbibizione della lente in soluzioni di NaCl di diversa concentrazione » (st.). — 76) (id.) « Ricerche ecc. VII. Imbibizione della lente immersa per molte ore in due soluzioni di NaCl molto concentrate. — VIII. Imbibizione della lente

in vapor d'acqua a diversa tensione. — IX. Imbibizione della lente scapsulata in soluzioni 0,2 n e 1,709 n di NaCl e nel vapor d'acqua sopra queste soluzioni » (st.). — 77) « Sulla tecnica delle ricerche di trasporto elettrico (e di dialisi) dei colloidi organici » (st.). — 78) « Azione coagulante e peptolitica di estratti pancreatici » (st.). — 79) « La chimica fisica e la biologia animale » (st.). — 80) « Nuove ricerche sui muscoli lisci » (st.). — 81) « Sul trasporto elettrico del glicogeno e dell'amido » (st.). — 82) « Trasporto elettrico e scomposizione elettrolitica del cloroformio » (st.). — 83) « Leonardo fisiologo e anatomico » (st.). — 84) « Ricerche sulle soluzioni di colloidi organici » (st.). — 85) « Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina. XI. Imbibizione della lente in acqua a diverse temperature, in acidi e in alcali » (st.). — 86) « Ricerche ecc. XII. Influenza del NaCl sull'imbibizione della lente immersa in soluzioni acide e di NaOH » (st.).

4. Cirillo Nicola. 1) « Sulla struttura e meccanismo del corpo umano » (ms.).

5. Fichera Gaetano. 1) « Etiologia del cancro » (st.). — 2) « Sui processi di riparazione e di compenso per interventi sull'ovaia » (st.). — 3) « Sugli innesti di tessuti embrionali e fetali » (st.). — 4) « Sulla ipertrofia della ghiandola pituitaria consecutiva alla castrazione » (st.). — 5) « Sui poteri di difesa contro il diplococco pneumonico » (st.). — 6) « Batterioterapia e indice opsonico » (st.). — 7) « Sulla distruzione del glucogeno in varie specie di glicosuria sperimentale » (st.). — 8) « Sul circolo collaterale » (st.). — 9) « Sulla distruzione dell'ipofisi » (st.). — 10) « Contributo sperimentale allo studio della Fisio-patologia della mucosa gastrica » (st.). — 11) « Della meccanomorfosi in patologia. L'influenza dei fattori funzionali sui processi di riparazione » (st.). — 12) « Per lo studio della struttura normale e patologica del sistema nervoso. Nuovi metodi di indagine microscopica » (st.). — 13) « L'iperemia da stasi nelle infezioni acute » (st.).

6. Galeotti Gino. 1) (e Giampalmo) « Ricerche sulle lecitalbumine » (st.). — 2) « Sulle proprietà osmotiche delle cellule » (st.). — 3) « Ricerche fisico-chimiche sull'edema » (st.). — 4) « Sulla diffusione degli elettroliti nei colloidi » (st.). — 5) « Effetto dei narcotici sulla permeabilità della pelle di rana e sulle forze elettromotrici che da essa si sviluppano » (st.). — 6) « Sui fenomeni elettrici dello stomaco della rana » (st.). — 7) (e Todde) « Alterazioni istologiche provocate da soluzioni metalliche colloidali o elettroliticamente dissociate » (st.). — 8) « Catalizzatori e fermenti » (st.). — 9) « Sulle differenze fisico-chimiche tra i protoplasmi viventi e morti » (st.). — 10) « La fisico-chimica in patologia » (st.). — 11) « Sui fenomeni elettrici del cuore » (st.). — 12) « Sui fenomeni elettrici dello stomaco della rana » (st.). — 13) « Ricerche di elettrofisiologia secondo i criterî dell'elettrochi-

mica » (st.). — 14) « Fenomeni di polarizzazione nei muscoli » (st.). — 15) « Fenomeni elettrici dei muscoli degenerati » (st.). — 16) (e Di Cristina) « Correnti di demarcazione nei muscoli di rana in diverso modo alterati » (st.). — 17) (e Signorelli) « Influenza dell'anidride carbonica e dell'ossigeno sul cuore di rettili e di anfibii » (st.). — 18) « Sui fenomeni elettrici del cuore » (st.). — 19) « Sulla secrezione renale nelle nefriti sperimentali » (st.). — 20) « Sulle proprietà preventive e curative dei nucleoproteidi degli organi di animali immunizzati » (st.). — 21) « Sul potere vaccinante dei nucleoproteidi estratti dagli organi di animali immunizzati » (st.). — 22) « Sulle inoculazioni preventive contro la peste bubbonica » (st.). — 23) (e Polverini) « Sui primi 175 casi di peste bubbonica trattati nel 1898 in Bombay » (st.). — 24) « Il Laboratorio municipale di Bombay per la preparazione del siero contro la peste bubbonica » (st.). — 25) (e Polverini) « Osservazioni e note epidemiologiche sulla recrudescenza della epidemia di peste in Bombay » (st.). — 26) « Sulla diagnosi della peste in certe sue forme particolari » (st.). — 27) « Ricerche sui fenomeni dell'immunità in alcuni vertebrati inferiori » (st.). — 28) (e Lustig) « I nucleoproteidi bacterici » (st.). — 29) « Ricerche sulla setticemia emorragica dei bovini » (st.). — 30) « Le variazioni dell'alcalinità del sangue sulla vetta del Monte Rosa » (st.). — 31) (e Mosso) « Modificazioni del riflesso della deglutizione studiate nella capanna Regina Margherita » (st.). — 33) « Sulla trasmissione ereditaria dei caratteri acquisiti e delle malattie » (st.).

7. Lo Monaco Domenico. 1) « Sulla fisiologia di alcune delle parti più interne e meno aggredibili del cervello » (ms.).

8. Russo Achille. 1) « Prime ricerche dirette a determinare la permeabilità e le struttura istochimica della *Zona pellucida* dei mammiferi » (st.). — 2) « Differenti stati dei corpi cromatici nell'ooplasma dei mammiferi, e loro riproduzione sperimentale » (st.). — 3) « Sulla funzione di assorbimento dell'epitelio germinativo dell'ovaia dei mammiferi » (st.). — 4) « Ulteriori ricerche sulla funzione di assorbimento dell'epitelio germinativo dell'ovaia dei mammiferi » (st.). — 5) « Metodi adoperati per aumentare la produzione del sesso femminile nel coniglio, ecc. » (st.). — 6) « Modificazioni sperimentali dell'elemento epiteliale dell'ovaia dei mammiferi » (st.). — 7) « Sull'origine dei mitocondrî e sulla formazione del deutoplasma nell'oocite di alcuni mammiferi » (st.). — 8) « Sulla origine e sulla funzione dell'apparato mitocondriale nelle cellule sessuali dei mammiferi » (st.). — 9) « Per la costituzione della *Zona pellucida* e per la formazione del *liquido follicolare* nell'uovo dei mammiferi » (st.). — 10) « Azione di alcuni agenti chimici sulle cellule del tubo seminifero del coniglio » (st.). — 11) « Sopra alcuni problemi di Zoologia generale e sopra i mezzi più opportuni per risolverli » (st.). — 12) « I mitocondri ed i globuli vitellini dell'oocite di coniglio allo stato normale ed in condizioni sperimentali. Contri-

buto allo sviluppo del deutolecite ed alla differenziazione sessuale delle ova dei mammiferi » (st.). — 13) « Sulla cromolisi delle cellule della granulosa durante il digiuno, e sul suo significato nella differenziazione sessuale delle ova dei mammiferi » (st.).

ANONIMO (col motto « Debierre »). 1) « Sulla cura della tifoide » (ms.).

Elenco dei lavori presentati al concorso ai premî del Ministero della P. I. per le *Scienze matematiche*.

(Scadenza 31 dicembre 1909. — Premio L. 2000).

1. AMODEO FEDERICO. 1) « Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell'evo antico » (st.). — 2) « Albrecht Dûrer precursore di Monge » (st.). — 3) « Sul corso di storia delle matematiche fatto nella R. Università di Napoli nel biennio 1905-1907 » (st.). — 4) « Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nel rinascimento » (st.). — 5) « Il trattato delle coniche di Francesco Maurolico » (st.). — 6) « Nuovo elenco delle opere di Giuseppe Battaglini, con cenni riassuntivi » (st.). — 7) « Sulla necessità di formare un archivio di scienze matematiche » (st.). — 8) « Appunti su Biagio Pelicani da Parma » (st.). — 9) « Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche » (st.). — 10) « La regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei Massimi e Minimi » (st.). — 11) « Riproduzione delle questioni sul Trattato *De latitudinibus formorum* di Nicole Oresme, fatte da Biagio Pelicani » (st.). — 12) « Complementi di analisi algebrica elementare » (st.). — 13) « Aritmetica ed algebra » (st.). — 14) « Aritmetica razionale particolare e generale » (st.). — 15) Aritmetica generale ed Algebra » (st.). — 16) « Aritmetica complementare partic. e gener. » (st.). — 17) « Compendio di storia delle matematiche » (ms.).

2. BENEDETTI PIERO. 1) « Il concetto geometrico di linea » (ms.).

3. BONOLA ROBERTO. 1) « Traduzione ed aggiunte a: *Die Nichteuklidische Geometrie* » (ms.). — 2) « Saggio d'una esposizione dei principî delle Geometrie non euclidee » (ms.). — 3) « Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio » (st.). — 4) « Sistemi lineari d'omografie piane e spaziali che formano gruppo » (st.). — 5) « Die Nichteuklidische Geometrie » (st.).

4. CAMINATI PIETRO. 1) « Saggio di lezioni nuove di geometria piana elementare » (st.). — 2) « Terza aggiunta da farsi al saggio di lezioni nuove di geometria piana » (st.).

5. CARLINI LUIGI. 5) « Intorno alle soluzioni dell'equazione » (ms.).

6. CIPOLLA MICHELE. 1) « Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie. Note 1ª e 2ª » (st.). — 2) « Sulla teoria dei gruppi abeliani » (st.). — 3) « Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito. Nota 1ª e 2ª » (st.). —

4) « Specimen de calculo arithmetico-integrale » (st.). — 5) I numeri reali » (st.).

7. Cominotto Quintilio Emilio. 1) « Sistemi omociclici » (ms.).

8. Dell'Agnola Carlo Alberto. 1) « Sulla funzione limite di una successione di funzioni continue » (st.). — 2) « Le successioni di funzioni continue e il teorema di Arzelà » (st.). — 3) « Sopra alcune proporzioni fondamentali dell'analisi » (st.). — 4) « Le funzioni discontinue e il teorema di Baire » (st.). — 5) « Sul teorema di Borel » (st.). — 6) « Sulla convergenza uniforme di una successione di funzioni continue » (st.).

9. Gallucci Generoso. 1) « Geometria del tetraedro » (ms.).

10. Manfredini Giovanni. 1) « Sulla deformazione delle quadriche generali » (st.).

11. Marletta Giuseppe. 1) « Sui complessi di rette del primo ordine dello spazio a quattro dimensioni » (st.). — 2) « Sulle curve gobbe razionali dotate di quattro punti d'iperosculazione » (st.). — 3) « Sulla identità cremoniana di due curve piane » (st.). — 4) « Alcuni teoremi sulle curve razionali degli iperspazî » (st.). — 5) « Sulle curve ellittiche del quinto ordine » (st.). — 6) « Sopra i complessi di rette d'ordine uno dell'S_4 » (st.).

12. Minetola Silvio (¹). 1) Sopra alcune proprietà delle operazioni di polare » (st.). — 2) « Un'equazione di condizione per i numeri primi » (st.). — 3) « Principî di analisi combinatoria con applicazione ai problemi di decomposizione e di partizione dei numeri » (st.). — 4) « Sulle combinazioni con elementi non tutti distinti » (st.). — 5) « Sui numeri primi compresi fino ad un limite assegnato » (st.).

13. Pannelli Marino. 1) « Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme » (st.). — 2) « Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni » (ms.).

14. Pirondini Geminiano. 1) « Di un nuovo metodo per studiare le linee descritte sopra una superficie ecc. » (st.). — 2) « Contributo alla teoria delle caustiche ed anti-caustiche » (st.). — 3) « Una speciale trasformazione geometrica nel piano, con applicazioni » (st.). — 4) « Saggio di una teoria analitica delle linee e delle superficie non euclidee » (ms.).

15. Satta Antonio. 1) Descrizione avente per titolo: *Livello a cannocchiale con l'asse ottico collegato direttamente alla livella e con vite di elevazione* » (st.).

16. Sbrana Umberto. 1) « Sulle varietà ad $n-1$ dimensioni deformabili nelle spazio euclideo ad n dimensioni » (st.).

17. Scorza Gaetano. 1) « Intorno alle corrispondenze $(p\ p)$ sulle curve di genere p e ad alcune loro applicazioni » (st.). — 2) « Le uguaglianze e le similitudini nel piano e nello spazio » (st.). — 3) « Determinazione delle varietà a tre dimensioni di S_r $(r \geq 7)$ i cui S_3 tangenti si ta-

(¹) Ammesso con riserva.

gliano a due a due » (st.). — 4) « Sopra una certa classe di varietà razionali » (st.) — 5) « Sulle varietà a quattro dimensioni di S_r ($r \geq 9$) i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due » (st.). — 6) « Un problema sui sistemi lineari di curve appartenenti a una superficie algebrica » (st.). — 7) « Le varietà a curve sezioni ellittiche » (st.). — 8) « Le superficie a curve sezioni di genere 3 » (ms.). — 9)) « Sulle varietà di *Segre* » (ms). — 10) « Lezioni di algebra e trigonometria ecc. » (ms.).

18. Sforza Giuseppe. 1) « Corpi rotondi e baricentro nella metrica proiettiva » (st.). — 2) « Sull'estensione ipersferica di Luigi Schläfli » (st.). — 3) « Formula fondamentale pel calcolo dei volumi poliedrici non euclidei » (st.). — 4) « Sopra alcuni punti dell'estensionimetria non euclidea » (st.). — 6) « Ricerche di estensionimetria negli spazî metrico-proiettivi » (st.).

19. Suini Alessandro. 1) « Le teorie delle Serie, delle Quantità incommensurabili degli Irrazionali e dei Limiti » (st.).

20. Vitali Giuseppe. 1) « Sull'integrazione per serie » (st.). — « Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali » (st.).

Elenco dei lavori inviati per la Fondazione *Santoro*.

1. Gabrielli Alessandro. 1) « Sulle equazioni del 2° grado » (ms.). — 2) « Sulle equazioni del 3° grado » (ms.).

2. Gorini Costantino. 1) « Studî sui batterii del latte » (37 pubblizioni).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 16 gennaio 1910.

Boletin anual del Observatorio Meteorológico de Cartuja (Granada). Año de 1908. Granada, 1909. 4°.

Bourdariat A. e Johnston-Lavis H. J. — Note sur le remarquable Volcan de Tritriva au centre del'île de Madagascar, avec des Observations sur l'origine du Quartz dans les basaltes et autres roches basiques. (Extr. du « Bulletin de la Soc. Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie ». Bruxelles. T. XXII, Mémoires). Bruxelles, 1909. 8°.

Flores E. — Notizie sui depositi degli antichi laghi di Pianura (Napoli) e di Melfi (Basilicata) del prof. H. J. Johnston-Lavis, e sulle ossa di Mammiferi in essi rinvenute. (Estr. d. « Bollettino della Soc. Geologica Italiana », v. XIV, 1895). Roma, 1895. 8°.

Lavis Ant^a^. e Johnston-Lavis H. J. — Bibliography of the Geology and eruptive phenomena of the South italian volcanoes that were visited in 1889 as well as of the submarine volcano of A. B. 1831, from the South italian volcanoes etc. Naples, 1891. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — De la rélation existant entre l'activité du Vésuve et certains phénomènes météorologiques et astronomiques. (Extr. du « Bulletin de la Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie », t. XXI, 1907). Bruxelles, 1907. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Du Rôle des Mollusques Alimentaires dans la propagation des infections gastro-intestinales (Fièvre typhoïde, Choléra, etc.). Mésures prophylactiques. Lyon, 1895. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Eozoonal Structure of the ejected Blocks of Monte Somma. (The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society, vol. V er. II). Dublin 1894. 4°.

Johnston-Lavis H. J. — Excursion to the South italian Volcanoes. The round Trip in detail. Naples. 1891. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Fifty Conclusions relating to the eruptive phenomena of Monte Somma, Vesuvius and volcanic action in general. Napoli, 1896. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Il Pozzo artesiano di Ponticelli (1886). (Estr. dal Rend. della R. Accad. delle Scienze Fisiche e matemat. di Napoli, fasc. 6, giugno 1889). S. l. neque d. 4°.

Johnston-Lavis H. J. — L'eruzione del Vesuvio del 7 giugno 1891. (Estr. dalla « Rassegna di Scienze Geologiche in Italia », an. I). Roma, 1891. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Liste des Travaux-Scientifiques du D^r^ H. J. J.-L., 1876-1895. Lyon, 1895. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Note sur le remarquable Volcan de Tritriva au centre de l'île de Madagascar, avec des Observations sur l'origine du Quartz dans les basaltes et autres roches basiques. (Extr. du Bullettin de la Soc. Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie, Bruxelles. T. XXII, Mémoires). Bruxelles, 1909. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Notes on the Geography, Geology, Agriculture, and economics of Iceland. (Extr. « The Scottish Geographical Magazine, 1895). S. l. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Notes on the Pipernoid Structure of Igneous Rocks. (Extr. from « Natural Science », vol. III, 1893). London, s. d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — Notes on the Eruption of Vesuvius April 1906. (Estr. d. « Nature », v. 74). S. l. nec d. 8°.

Johnston-Lavis H. J. — On Chlormanganokalite, a new Vesuvian mineral; with notes on some of the associated

minerals. (Estr. d. « Mineralogical Magazine, 1908, v. XV). S. l. nec d. 8°.

JOHNSTON-LAVIS J. — Osservazioni geologiche lungo il tracciato del grande Emissario-Fognone di Napoli dalla Pietra fino a Pozzuoli. (Estr. d. « Bollettino del R. Comitato Geologico », 1890). Roma. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — Report of the Committee, consisting of Messrs. H. Bauerman, F. W. Rudler, and J. J. H. Teall, and Dr H. J. Johnston-Lavis appointed for the investigation of the Volcanic Phenomena of Vesuvius and its Neighbourhood. Report. 1980, '90, '92, '94. London, s. d. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — Some Truths about Vittel Contresseville and Martigny. Practical Hints to my Medical Brethren. (Estr. dal « Journal of Balneology and Climatology », 1906). London. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — Su una roccia contenente leucite trovata sull'Etna. (Estr. d. « Bollettino della Società italiana dei Microscopisti », Acireale, v. I). Napoli, 1888. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — Sulla inclusione di Quarzo nelle lave di Stromboli ecc. e sui cambiamenti da ciò causati nella composizione della lava. Roma, 1894. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — Sur une plateforme néolithique à Beaulieu (Alpes Maritimes). (Extr. du Compte Rendu de la XIIIe Session du Congrès intern. d'Anthropologie et d'Archéologie préhistoriques, Monaco, 1906). S. loco nec d. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — The Basic eruptive Rocks of Gran (Norway) and their interpretation. A Criticism. (Estr. dal « Geological Magazine », 1894). Hertford, 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — The ejected Blocks of Monte Somma. Part I. Stratified Limestones. (Estr. d. « Transactions » of the Edinburgh Geological Society, v. VI, 1893). S. l., 1893. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — The Highwood Mountains of Montana and Magmatic Differentiation. A Criticism. (Estr. d. « Report of the Liverpool Meeting », 1896). S. l. né d. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — The mechanism of Volcanic Action. Being the opening address to section III (Vulcanology) of the international geographical Congress). London, s. d. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — The prescribers Guide to the Harragate Mineral Waters. London, 1892. 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — The ttate of the active Sicilian Volcanoes in September 1889. (Estr. d. « The Scottish Geographical Magazine », 1890). S. l 8°.

JOHNSTON-LAVIS H. J. — Volcans et tremblement de terre. (Extr. de l' « Annuaire Géologique Universel », t. V. 1888; idem, v. VI, 1889). Paris, 1889-1901. 8°.

MELI R. — Breve Relazione sulla qualità delle roccie incontrate nella perforazione della Galleria di Montorso, (Ferrovia direttissima Roma-Napoli), dall'imbocco Napoli fino alla progressiva 1380 metri. Roma, 1909. 8°.

MELI R. — Sopra alcune vedute prospettiche della città di Narni dei secoli XVII e XVIII, con pochi cenni sulle notizie stampate intorno a questa città in talune opere geografiche della stessa epoca. (Estr. dal « Bollett. della Soc. Geogr. ital. », fasc. X, 1909). Roma, 1909. 8°.

PEROTTI R. — Sul ciclo biochimico dell'anidride fosforica nel terreno agrario. (Memorie della R. Stazione di Patologia vegetale. — Laboratorio di Bacteriologia agraria — Roma). Roma, 1909. 4°.

TOMMASINA T. — Nouveaux appareils et dispositifs pour l'étude des phénomènes séismiques. (Extr. de la « Revue Polytechnique », n. 236, 1909). Crêts de Champel près Genève, 1909. 4°.

TOMMASINA T. — Physique de la Gravitation universelle basée sur l'action exclusive des forces Maxwell-Bartoli. Notes I-XXV. Genève, 1908-09. 8°.

TURATI E. — Nuove forme di Lepidotteri. Note I-III. (Estr. dal « Naturalista Siciliano », anni XVIII, XX, XXI, 1909). Palermo, 1905-9. 8°

VALENTINI C. — Sulla sistemazione dei torrenti. (Estr. dal « Giornale del Genio civile », anno 1893). Roma, 1893. 8°.

VALENTINI C. — Del modo di determinare il profilo di compensazione e sua importanza nelle sistemazioni idrauliche. Milano, 1895. 8°.

VALENTINI C. — La Previsione delle piene del Po. Roma, 1903. 8°.

VALENTINI C. — Service hydrométrique des Crues et des Étiages. Rapport. (XI Congr. Pietroburgo, 1908). Bruxelles, 1907. 8°.

VALENTINI C. — Sistemazione dei fiumi a fondo mobile a scopo di navigazione. (XII Congresso degli Ingegneri e Architetti italiani, 1909). Roma, 1909. 8°.

VALENTINI C. — Sui fenomeni torrentizî. Conferenza. Roma, 1909. 8°.

VALENTINI C. — Conferenze tecniche. N. 3. Sulla navigazione interna nell'Europa centrale. (Scuola di Applicazione per gli Ingegneri, R. Univ. di Padova). Roma, 1909. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE

DELLA UNIVERSITÀ DI ROSTOCK.

ABRAHAM F. — Beiträge zur Kenntniss der 4-Amidopyrazole. Rostock, 1909. 8°.

ALTSTAEDT E. — Die Hämophilie im Lichte der genealogischen Forschung. Rostock, 1908. 8°.

BARFURTH W. — Ueber Hyperdaktylie, Rostock, 1909. 8°.

BARTELS W. — Die Gestalt der Deutschen Ostseeküste. Stuttgart, 1908. 8°.

BAUM H. — Ueber das 1 Phenyl-3 Essigsäure-5 Pyrazolon und dessen Derivate. Rostock, 1908. 8°.

BERNHEIM W. — Die Erysipeltherapie. Rostock, 1909. 8°.

BOSZ J. E. — Ueber die Pyrine des 1-Benzyl-3-Methyl-5 Pyrazolons. Rostock, 1908. 8°.

BREHMER K. — Beitrag zur atmosphärischen Refraktion über Wasserflächen. Berlin, 1909. 4°.

BULLY M. — Diagnostische Symptome bei 96 in der Rostocker Medizinischen Klinik beobachteten Typhusfällen. Rostock, 1909. 8°.

DEFFGE F. — Einige Beobachtungen über Bromural. Waren, 1908. 8°.

DIERLING H. — Beiträge zur Kenntnis der Schmerzen im Ohre und am Warzenfortsatze bei Hysterischen. Rostock, 1908. 8°.

ECKENBERG W. B. — Ueber in der Phenylgruppe substituierte 1-Phenyl-5-methyl-3-pyrazolone. Rostock, 1909. 8°.

EICHSTEDT K. — Zur Frage der Gemeingefährlichkeit bei Geisteskranken. Rostock, 1909. 8°.

FRANK A. — Beiträge zur Lehre von den Schädelsarkomen. Rostock, 1909. 8°.

FRANKE E. — Zur Bakteriologie der akuten und chronischen Appendizitis mit besonderer Berücksichtigung des peritonealen Exsudats. Leipzig, 1908. 8°.

FRIDERICI E. — Ueber stereoisomere β-Arylzimmtsäuren. Rostock, 1908. 8°.

GRAEF W. — Ueber die Ergebnisse der in dem Zeitraume vom 1. Juli 1906 bis 30. Juni 1908 zum Zwecke der Erforschung und Bekämpfung der übertragbaren Genickstarre ausgeführten Untersuchungen. Rostock, 1909. 8°.

GRONAU H. — Beitrag zur Frage der wirt-

schaftlichen Folgen nicht im Betriebe entstandener körperlicher Schädigungen. Rostock, 1908. 8°.

Grünberg K. — Beiträge zur Kenntnis der Labyrintherkrankungen. Wiesbaden, 1909. 8°.

Hadank E. — Untersuchungen über das 1-3-Dimethyl-5-Pyrazolon und andere Condensationsprodukte des Methylhydrazins. Rostock, 1908. 8°.

Himmelfarb G. — Ueber stereoisomere Verbindungen aus der Gruppe des Diphenylpropylens. Rostock, 1908. 8°.

Hofstaetter G. — Ein Fall von operativ behandeltem echinococcus cerebri. Rostock, 1909. 8°.

Jecke R. H. — Beiträge zur Geometrie der Bewegung. Berlin, 1909. 8°.

Johannsen D. — Ueber Thiopyrazolone. Esens. 1909. 8°.

Klewitz A. — Ueber die Einwirkung von Säurechloriden auf einige aromatische Säuren und deren Ester. Rostock, 1908. 8°.

Kluth K. — Beitrag zu einer allgemeinen Entwicklungstheorie. Rostock, 1908. 8°.

Kobert K. — Ueber 25-Phenyl-Hydrazino-Pyrine und über 1-Phenyl-3-Methyl-Pyrazol-5-Azo-Benzol. Rostock, 1909. 8°.

Koenig G. A. K. — Beiträge zur Kenntnis der Achylia gastrica nach den in der Rostocker medizinischen Klinik und Poliklinik in den letzten beiden Jahren gemachten Beobactungen. Kiel, 1909. 8°.

Lange M. — Vereinfachte Formeln für die trigonometrische Durchrechnung optischer Systeme. Leipzig, 1909. 8°.

Leo J. F. — Beiträge zur Kenntnis der Anhydride der Carboxylphenyl-5-Pyrazolone. Rostock. 1908. 8°.

Mahlow F. — Ueber Thioderivate des Chinolins und Chinaldins. Rostock, 1909. 8°.

Martini E. — Ueber Subcuticula und Seitenfelder einiger Nematoden nebst Bemerkungen über determinierte Entwicklung. Leipzig, 1908. 8°.

Meyer H. — Bericht über 90 Friedens-Schussverletzungen. Rostock, 1909. 8°.

Müller G. F. W. — Kasuistische Beiträge zur Unfalls-Hysterie. Rostock, 1909. 8°.

Nordalm K. — Beitrag zur allgemeinen progressiven Paralyse der Jrren im jugendlichen Alter. Rostock, 1909. 8°.

Pflaum H. — Versuche mit einer elektrischen Pfeife. Braunschweig, 1909. 8°.

Press U. — Ueber Neuronal und Proponal. Leipzig, 1908. 8°.

Quilitz W. — Die Entwicklung und der heutige Stand der Lehre von der Tetaniekatarackt. Rostock, 1908. 8°.

Rathenow E. — Ein seltener Fall von traumatischer Ureterverletzung mit Fistelbildung. Rostock, 1908. 8°.

Richartz A. — Ueber Dichlor- und Halogenamino-Chloracetylbenzole und deren Derivate. Rostock, 1908. 8°.

Rosenmüller M. — Ueber Emission und Absorption des Kohlelichtbogens. Rostock, 1909. 8°.

Schenk K. — Ueber eine neue allgemein anwendbare Synthese von 3-5-Pyrazolidonen sowie Untersuchung einiger in 4-Stellung alkylierter Verbindungen dieser Reihe. Rostock, 1908. 8°.

Schmidt G. L. — Ueber die Tagesschwankungen der Zahl der Leukozyten und deren Beeinflussung durch Phagocytin (nucleinsaures Natrium). Rostock, 1909. 8°.

Schmidt O. — Zur Kenntnis der Pyrazole und ihrer Stellung in der organischen Chemie. Rostock, 1908. 8°.

Schultze H. — Zur Frage der Erschöpfungszustände der Schuljugend. Rostock, 1908. 8°.

Sebba M. — Beiträge zur Kenntnis der Stimmbandlähmungen. Rostock, 1908. 8°.

Stahl W. — Ueber Fädchen-Keratitis nebst Mitteilung eines anatomisch untersuchten Falles. Rostock, 1908. 8°.

SYDOW H. (v.). — Ueber Eisenbahnfrevel durch Geisteskranke. Rostock, 1908. 8°.

THIERFELDER M. — Beiträge zur Lehre vom Trachom. — I. Das Trachom in Mecklenburg von 1902 bis 1907 inkl. — II. Untersuchungen über das Vorkommen der sog. Körperchenzellen bei Trachom. Rostock, 1909. 8°.

ULLMANN A. — Ueber primäres Netzsarkom. Rostock, 1909. 8°.

VOGT L. — Wanderniere (Ren mobilis). Rostock, 1909. 8°.

VOIGT A. — Versuche zum Aufbau einer Isocumarilsäure u. Isocumaranilsäure. Rostock, 1908. 8°.

VOSS U. — Die Parinaud'sche Conjunctivitis. Rostock, 1908. 8°.

WADA Y. — Ueber die Hypertrichosis sacro-lumbalis mit Spina bifida occulta. Rostock, 1908. 8°.

WEISE F. — Ueber die Osteomyelitis des Oberkiefers besonders im frühen Kindesalter. Rostock, 1907. 8°.

WITT E. — Ausbreitung der Stirnhöhlen und Siebbeinzellen über die Orbita. Wiesbaden, 1908. 8°.

WITTIG W. C. — Zur akuten infektiösen Osteomyelitis der kleinen Röhrenknochen, speziell der Phalangen. Rostock, 1909. 8°.

WULLE E. — Ueber Acetyl-Kylylcyanide und einige Glyoxyltolylessigsäuren. Rostock, 1909. 8°.

ZEHDEN A. — Ueber die relative Helligkeit der Farben elektrisch glühender Gase bei Wechsel von Druck und Stromstärke. Rostock, 1909. 8°.

ZSCHIESCHE A. — Untersuchungen über die Metamorphose von Alcyonidium mytili. Naumburg, 1909. 8°.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 2°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1909). Fasc. 6°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. Fasc. 12°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

RENDICONTI — Gennaio 1910.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 gennaio 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CONCORSI A PREMI

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.
(**) Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 6 febbraio 1910.* **N. 3.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1910.

Volume XIX. — Fascicolo 3°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni **75** estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e **50** agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1910.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

§ 1. — La funzione intera $V(z|x, y)$.

Abbiasi la funzione continua $S_0(x, y)$ definita per i valori di x, y tali che

$$0 < x < y < a$$

e sia

$$|S_0(x, y)| < M.$$

Si costruiscano col processo iterativo che ho dato per la risoluzione delle equazioni integrali [1] le funzioni $S_i(x, y)$ definite da

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{j-1}(x, \xi)\, S_{i-j}(\xi, y)\, d\xi . \tag{1}$$

Avremo

$$|S_i(x, y)| < \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} ,$$

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti*, Rend. R. Acc. dei Lincei, volume V, 1° sem., 1896.

quindi la funzione

$$(I) \qquad V(z|x\,,y) = \sum_0^\infty{}_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} S_n(x\,,y)$$

sarà una funzione olomorfa di z in tutto il piano complesso.

TEOREMA I. *Qualunque sia il numero positivo α avremo*

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{V(z|x\,,y)}{e^{\alpha|z|}} = 0\,.$$

Infatti

$$|V(z|x\,,y)| \leq \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n+1}}{(m+n)!}\,.$$

Ora scelto ε comunque piccolo potremo determinare m in modo che si abbia

$$\frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n+1}}{(m+n)!} < \varepsilon\, \alpha^{m+n+1} \qquad (n = 0\,,1\,,2 \ldots \infty)$$

quindi

$$|V(z|x\,,y)| < \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \varepsilon \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \alpha^{m+n+1}\,,$$

d'altra parte

$$e^{\alpha|z|} = \sum_0^\infty{}_n \frac{|\alpha z|^n}{n!} > \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \alpha^{m+n+1}$$

e per conseguenza

$$\frac{|V(z|x\,,y)|}{e^{\alpha|z|}} < \varepsilon + \frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\sum_0^\infty \frac{|z|^{m+n+1}\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!}} <$$

$$< \varepsilon + \frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}}\,.$$

Ma noi possiamo prendere $|z|$ così grande che l'ultimo termine

$$\frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}} = \sum_0^{m-1} \frac{(m+1)!}{|z|^{m-n}} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!(n+1)!\,\alpha^{m+1}}$$

si riduca minore di una quantità piccola ad arbitrio e perciò col crescere indefinito di $|z|$ la quantità $\frac{V(z|x, y)}{e^{\alpha|z|}}$ tenderà a zero.

Corollario. — *Posto* $V\left(\log\frac{\varrho}{r}|x, y\right)$ *con* ϱ *e* r *reali e positivi, se* ϱ *cresce indefinitamente (oppure tende a* 0), V *si manterrà finita, oppure diverrà infinita di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di* ϱ $\left(\textit{oppure di } \frac{1}{\varrho}\right)$.

§ 2. — Il teorema d'addizione della funzione $V(z|x, y)$.

Si eseguisca il prodotto

$$V(z|x, \xi)\, V(u|\xi, y)$$

avremo

$$=\sum_0^\infty {}_n \sum_0^n {}_i \frac{z^{i+1}\, u^{n+1-i}}{(i+1)!\,(n+1-i)!} S_i(x, \xi)\, S_{n-i}(\xi, y)$$

quindi

$$\int_x^y V(z|x, \xi)\, V(u|\xi, y)\, d\xi = \sum_0^\infty S_{n+1}(x, y) \sum_0^n \frac{z^{i+1}\, u^{n+1-i}}{(i+1)!\,(n+1-i)!} =$$

$$=\sum_0^\infty {}_n S_n(x, y) \frac{(z+u)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_0^\infty {}_n S_n(x,y) \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_0^\infty {}_n S_n(x, y) \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tenendo dunque presente la (I) avremo il

Teorema II. *La funzione olomorfa* $V(z|x, y)$ *gode del seguente teorema di addizione*

$$\text{(A)}\quad V(z+u|x, y) - V(z|x, y) - V(u|x, y) = \int_x^y V(z|x, \xi)\, V(u|\xi, y)\, d\xi.$$

Posto

$$\frac{\partial V(z|x, y)}{\partial z} = V'(z|x, y) \quad , \quad \frac{\partial^2 V(z|x, y)}{\partial z^2} = V''(z|x, y), \ldots$$

si hanno le formule che si deducono facilmente dalla (A)

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} &V'(z+u|x, y) - V'(z|x, y) = \\ &\quad = \int_x^y V'(z|x, \xi)\, V(u|\xi, y)\, d\xi = \int_x^y V'(z|\xi, y)\, V(u|x, \xi)\, d\xi \end{aligned}$$

$$(3)\qquad V^{(i+h+1)}(z+u|x,y)=\int_x^y V^{(i)}(z|x,\xi)\,V^{(h)}(u|\xi,y)\,d\xi \qquad (i,h=1,2,3\ldots)$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} &V'(z|x,y)-V'(0|x,y)=\\ &=\int_x^y V(z|x,\xi)\,V'(0|\xi,y)\,d\xi=\int_x^y V(z|\xi,y)\,V'(0|x,\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

$$(4')\qquad \begin{aligned} &V'(z|x,y)-S_0(x,y)=\\ &=\int_x^y V(z|x,\xi)\,S_0(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y V(z|\xi,y)\,S_0(x,\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Reciprocamente può dimostrarsi che il teorema d'addizione (A) individua le funzioni del tipo (I).

§ 3. — Soluzione di una equazione integro-differenziale ausiliaria.

Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$(B)\qquad y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)+\int_0^x S_0(\xi,x)\,f(\xi,y)\,d\xi=\varphi(x,y)$$

in cui f è la funzione incognita, finita e continua per x compreso fra 0 ed a ed y compreso fra 0 e b; c è un coefficiente costante positivo, $S_0(\xi,x)$ e $\varphi(x,y)$ sono funzioni note, finite e continue. Moltiplicando ambo i membri per $V(z|x,x_1)$ e integrando fra 0 e x_1 resulterà

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_1}\left[y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)\right]V(z|x,x_1)\,dx+\\ &+\int_0^{x_1}V(z|x,x_1)\,dx\int_0^x S_0(\xi,x)\,f(\xi,y)\,d\xi=\int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z|x,x_1)\,dx. \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_1}V(z|x,x_1)\,dx\int_0^x S_0(\xi,x)\,f(\xi,y)\,d\xi=\\ &\qquad=\int_0^{x_1}f(\xi,y)\,d\xi\int_\xi^{x_1}V(z|x,x_1)\,S_0(\xi,x)\,dx \end{aligned}$$

quindi, tenendo conto della (4'),

$$\begin{aligned} &\int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+cf(x,y)\right)V(z|x,x_1)+f(x,y)\,V'(z|x,x_1)\right]dx\\ &\qquad-\int_0^{x_1}S_0(x,x_1)\,f(x,y)\,dx=\int_0^{x_1}\varphi(x,y)\,V(z|x,x_1)\,dx. \end{aligned}$$

Il secondo integrale del primo membro si potrà ricavare dalla (B), onde la equazione precedente potrà scriversi

$$y\frac{\partial f(x_1, y)}{\partial y} + cf(x_1, y) + \int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + cf(x, y)\right)\mathrm{V}(z|x, x_1) + \right.$$
$$\left. + f(x, y)\,\mathrm{V}'(z|x, x_1)\right]dx = \varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x, y)\,\mathrm{V}(z|x, x_1)\,dx\,.$$

Posto $z = \log\frac{y}{y_1}$ sarà $\mathrm{V}'(z|x, x_1) = y\frac{\partial \mathrm{V}(z|x, x_1)}{\partial y}$, perciò moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per y^{c-1} essa si scriverà

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^c f(x_1, y)) + \int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial y}(y^c\,\mathrm{V}(z|x, x_1)\,f(x, y))\,dx =$$
$$= \left[\varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x, y)\,\mathrm{V}(z\,|x, x_1)\,dx\right]y^{c-1}\,.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della equazione precedente per dy ed integriamo fra 0 ed y_1. Tenendo conto del corollario stabilito nel § 1, avremo

$$y_1^c f(x_1, y_1) = \int_0^{y_1} y^{c-1}\left[\varphi(x, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x, y)\,\mathrm{V}(z|x, x_1)\,dx\right]dy$$

o anche

$$\text{(C)}\quad f(x, y) = \frac{1}{y^c}\int_0^{y}\eta^{c-1}\left[\varphi(x, \eta) + \int_0^{x}\varphi(\xi, \eta)\,\mathrm{V}\left(\log\frac{\eta}{y}\,|\,\xi, x\right)d\xi\right]d\eta\,.$$

Dunque, se la (B) ammette una soluzione finita e continua, questa sarà data dalla (C) e reciprocamente può facilmente riconoscersi che la (C) è finita e continua e soddisfa la (B). Però se togliamo la condizione alla f di esser finita per $y = 0$, la soluzione generale della (B) sarà la somma di due termini, il primo dei quali sarà la espressione (C), ed il secondo sarà

$$\mathrm{F}(x, y) = \left(\frac{y_0}{y}\right)^c\left[\psi(x) + \int_0^{x}\psi(\xi)\,\mathrm{V}\left(\log\frac{y_0}{y}\,|\,\xi, x\right)d\xi\right],$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione arbitraria, mentre si ha

$$\mathrm{F}(x, y_0) = \psi(x).$$

Per le applicazioni che dovremo fare basterà valerci della espressione (C).

§ 4. — Problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

In una Nota testè pubblicata (¹) ho espresso, nel caso ereditario, le componenti degli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo mediante le forze di massa, le tensioni superficiali, e gli spostamenti superficiali.

Noi vogliamo ora, pel caso della sfera, eliminare nella soluzione le tensioni superficiali, esprimendo la soluzione stessa mediante gli spostamenti superficiali (²). Quanto alle forze di massa le supporremo nulle, giacchè sarà facile ricondurre il caso generale a questo caso particolare. La eliminazione potrà farsi anche senza ricorrere alle formule suddette, ma direttamente.

Supposte nulle le forze di massa, le (3) della Nota citata al principio di questo paragrafo, si scriveranno

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \Delta^2 v = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ \Delta^2 w = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial z}, \end{cases}$$

avendo posto, secondo le notazioni adoperate nella Nota suddetta,

$$\vartheta = (1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\,\theta.$$

Avremo poi

$$\Delta^2 \vartheta = 0.$$

In conseguenza di un teorema del prof. Almansi (³), da lui impiegato per la soluzione del problema ordinario della sfera elastica, sarà dunque

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ v = \mathrm{V} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ w = \mathrm{W} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

(¹) *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia*, Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 19 dicembre 1909.

(²) *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità*, § 4, Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 7 novembre 1909.

(³) *Sulla deformazione della sfera elastica*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, anno 1896-97.

ove U, V, W, f sono funzioni armoniche, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante, e

$$\frac{1}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4} \vartheta. \tag{6}$$

Posta l'origine nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U, V, W saranno determinate entro la sfera quando si conosceranno gli spostamenti al contorno.

Scriviamo

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Theta,$$

avremo allora, in virtù delle (5),

$$\theta = \Theta + 2r \frac{\partial f}{\partial r},$$

quindi

$$\vartheta = (1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\left(\Theta + 2r \frac{\partial f}{\partial r}\right) \tag{7}$$

ed eliminando ϑ fra la (6) e la (7), resulterà

$$f + (1 + \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\, r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\, \Theta,$$

da cui segue

$$r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1} f = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\, \Theta. \tag{8}$$

Poniamo, supponendo per semplicità $t_0 = 0$,

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1} f = c f(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f(\tau, r)\, d\tau$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)^{-1}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\, \Theta = \Phi(t, r).$$

$S_0(\tau, t)$ e $\Phi(t, r)$ saranno funzioni che si calcolano facilmente e che quindi possono supporsi note e inoltre sarà

$$c = \frac{K}{L + 3K}.$$

Nelle formule precedenti f e Φ vanno considerate come funzioni di t, del raggio vettore r e dei due angoli polari, avendo cambiato le coordinate

cartesiane x, y, z in quelle polari. Però, per semplicità, sono state scritte solo esplicitamente le due variabili t e r.

La (8) si scriverà dunque

$$r \frac{\partial f(t, r)}{\partial r} + cf(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f(\tau, r) d\tau = \Phi(t, r).$$

Posto poi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = f_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \varphi_1 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \varphi_2 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \varphi_3 \end{cases}$$

per una formula del prof. Almansi (¹) avremo

$$r \frac{\partial f_i(t, r)}{\partial r} + (c+1) f_i(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t) f_i(\tau, r) d\tau = \varphi_i(t, r)$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Applichiamo ora la (C). Si avrà

$$f_i = \frac{1}{r^{c+1}} \int_0^r \varrho^c \left[\varphi_i(t, \varrho) + \int_0^t \varphi_i(\tau, \varrho) V\left(\log \frac{\varrho}{r} \mid \tau, t\right) d\tau \right] d\varrho$$
$$(i = 1, 2, 3),$$

e quindi

(III) $u = U + (r^2 - R^2) f_1$, $v = V + (r^2 - R^2) f_2$, $w = W + (r^2 - R^2) f_3$

saranno determinate completamente.

Astronomia. — *Osservazioni della cometa 1910 a fatte all'Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. MILLOSEVICH.

La cometa fu veduta, sembra per la prima volta, all'alba nello Stato libero d'Orange; in ogni modo fu segnalata telegraficamente alle Astronomische Nachrichten di Kiel il 17 gennaio (t. civile) al mattino dai signori Worssell e Innes da Johannesburg. La prima esatta posizione è in data 17 gennaio $0^h 8^m.6$ di Johannesburg. Io ebbi la ventura di trovare l'astro il 17 gennaio a $23^h 24^m$ R.C.R a $2^\circ.7$ di distanza dal lembo solare. Nucleo e testa della cometa misuravano un diametro di 15″ e vi erano indizi di coda. La prima osservazione in Europa, dopo la mia, spetta all'Osservatorio di Vienna.

(¹) Loco cit. § 2.

Al momento del tramonto del sole, e per qualche istante dopo, l'astro fu visto il 18 gennaio ad occhio nudo dal dott. Tringali, astronomo di questo R. Osservatorio. Osservazioni spettrali fatte da Aitken e comunicate alle A. N.[e] accennano, in data 19 gennaio, a spettro continuo in crepuscolo (probabilmente del 18) colla riga lucente del sodio; in data poi dell'1 febbraio Albrecht comunica pure alle A. N. che lo spostamento delle linee del sodio conduce ad un allontanamento della cometa di 66 chilometri nella direzione della visione in un secondo; ed in verità oggidì la cometa si allontana rapidamente e dal sole e dalla terra, e, come astro visibile ad occhio nudo, non presenta più alcun interesse. Io ho misurato col sestante la massima lunghezza apparente della coda, non rettilinea ma arcuata specialmente verso la fine, ed ebbi circa 30°. Do qui le osservazioni fatte agli equatoriali di questo R. Osservatorio.

Data			t. m. Roma (C. R.)	α apparente	δ apparente	Osservatore	Equatoriale
1910	gennaio	17	23^h24^m	$20^h10^m,8$	— 21°30′	M	S Ca.
»	»	18	3 55 18^s	20 14 9^s.70 (9.569)	— 20 53 40″.8 (0.838)	Z	S Ca.
»	»	18	4 1 25	20 14 13. 20 (9.578)	— 20 52 53. 4 (0.835)	B	Cau.
»	»	23	6 3 17	21 6 27. 91 (9.631)	— 6 47 11. 5 (0.777)	B	Cau.
»	»	23	6 9 59	21 6 29. 47 (9.634)	— 6 46 35. 6 (0.776)	M	S Ca.
»	»	24	5 40 13	21 11 46. 36 (9.616)	— 5 6 28. 6 (0.780)	Z	S Ca.
»	»	25	5 25 0	21 16 24. 21 (9.603)	— 3 38 29. 5 (0.778)	Z	S Ca.
»	»	25	5 40 42	21 16 27. 00 (9.615)	— 3 37 36. 7 (0.776)	B	Cau.
»	»	25	5 41 7	21 16 27. 08 (9.616)	— 3 37 37. 1 (0.776)	T	S Ca.
»	»	25	6 22 14	21 16 33. 87 (9.636)	— 3 35 18. 3 (0.771)	Z	S Ca.
»	»	27	5 44 33	21 24 9. 03 (9.617)	— 1 10 49. 4 (0.770)	B	Cau.
»	»	27	6 16 55	21 24 13. 68 (9.633)	— 1 9 28. 1 (0.769)	T	Cau.
»	»	27	6 20 30	21 24 14. 14 (9.634)	— 1 9 13. 4 (0.769)	Z	S Ca.
»	»	28	5 48 45	21 26 25. 47 (9.621)	— 0 9 17. 1 (0.767)	Z	S Ca.
»	»	28	5 57 36	21 27 26. 67 (9.625)	— 0 8 57. 4 (0.767)	B	Cau.
»	febbraio	1	6 11 4	21 37 58. 92 (9.634)	+ 3 4 7. 3 (0.761)	B	Cau.
»	»	1	6 27 27	21 38 0. 52 (9.638)	+ 3 4 28. 0 (0.763)	T	S Ca.
»	»	4	6 20 27	21 44 9. 45 (9.639)	+ 4 52 8. 2 (0.760)	M	Cau.
»	»	5	6 10 20	21 45 59. 21 (9.637)	+ 5 23 8. 0 (0.758)	B	S Ca.
»	»	5	6 40 53	21 46 1. 38 (9.642)	+ 5 23 52. 5 (0.764)	Z	Cau.

La prima posizione è strumentale, le altre 19 sono rigorose. L'osservazione del 20 gennaio domanda l'esatta conoscenza della stella di riferimento e perciò non è qua inserita. S Ca ≡ Eq: Steinheil-Cavignato; Cau ≡ Eq: Cauchoix. M = Millosevich; Z = Zappa; B = Bianchi e T = Tringali.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota III del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Dell'azione A esercitata da una massa liquida in moto, sopra un corpo fisso, ho dato, nella prima di queste Note, una espressione, in cui l'azione stessa si presenta come somma di tre termini, rappresentati da tre integrali estesi rispettivamente alla superficie σ che limita il corpo fisso S_0, allo spazio S occupato dal liquido, e all'insieme ω delle superficie sulle quali il movimento è discontinuo.

La formula ottenuta si presta, meglio di ogni altra, al calcolo di A, in casi particolari: quando, per esempio, il movimento è irrotazionale in ciascuna delle regioni in cui esso è continuo; o quando il movimento è stazionario.

Ma si può anche esprimere A mediante *un unico integrale esteso ad* S. In questa Nota io stabilisco la formula

$$\text{A} = \varrho \int_{\text{S}} a \, d\text{S}, \tag{1}$$

ove a contiene la funzione φ (precisamente le sue derivate seconde), e le componenti di velocità u, v, w, ma non le loro derivate rispetto ad x, y, z (nè le derivate rispetto al tempo).

Questa formula permette di considerare l'azione A come risultante di infinite azioni elementari $a.\varrho d\text{S}$ dovute alle singole particelle liquide $\varrho d\text{S}$. L'azione di una particella dipende dalla posizione che essa occupa nello spazio S (in quanto a contiene la φ), e dalla sua velocità, nell'istante che si considera.

2. Mi riferisco ai primi paragrafi della Nota I. Diviso lo spazio S in un certo numero di spazî T, in ciascuno dei quali il movimento al tempo t, sia continuo, e introdotti gli integrali L, si ha $\text{A} = \Sigma \text{L}$. Ma (§ 2)

$$\text{L} = -\int_{\text{T}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\text{T};$$

quindi:

$$\text{A} = -\int_{\text{S}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\text{S}. \tag{2}$$

Scriverò le equazioni dell'idrodinamica sotto la forma

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + f'\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + f''\right),$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + f'''\right),$$

ove

$$f' = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \text{ ecc.}$$

Sostituendo, nella formula (2), a $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ queste loro espressioni, avremo

$$A = \varrho(B + C),$$

in cui:

$$B = \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dS,$$

$$C = \int_S \left(f'\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f''\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f'''\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dS.$$

Posto, come nella Nota I,

$$Q = u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{3}$$

sarà:

$$B = \int_S \frac{\partial Q}{\partial t} dS = \int_S \frac{dQ}{dt} dS - \int_S \left(u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dS.$$

Ma $\int_S \frac{dQ}{dt} dS = \Sigma \int_T \frac{dQ}{dt} dT = 0$ (I, § 5). Dunque:

$$B = -\int_S \left(u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dS.$$

Se ora a Q sostituiamo la sua espressione (3), ed eseguiamo le derivate, troveremo

$$u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z} = f'\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f''\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f'''\frac{\partial \varphi}{\partial z} + [Q]^2,$$

ove $[Q]^2$ denota la quantità

$$u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2vw \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + 2wu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} + 2uv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

vale a dire il quadrato di Q in cui ai quadrati e prodotti di derivate prime $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, ecc., siano sostituite le derivate seconde $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$, ecc. Perciò avremo

$$B = -\int_S \left(f' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f''' \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) dS - \int_S [Q]^2 \, dS,$$

ossia

$$B = -C - \int_S [Q]^2 \, dS;$$

da cui

$$B + C = -\int_S [Q]^2 \, dS;$$

e finalmente:

$$A = -\varrho \int_S [Q]^2 \, dS;$$

formula che si riduce alla (1) se si pone:

$$a = -[Q]^2.$$

Da questa espressione di A apparisce immediatamente la proprietà, già osservata nella Nota II, che per movimenti *simili* i valori di A sono proporzionali ai quadrati della velocità in un medesimo punto dello spazio; e, in particolare, che, invertendo il movimento, A rimane inalterata.

Geologia. — *Il profilo geologico del Sempione. I. La Val Devero* (figg. 1, 2 e 8)[1]. Nota del Socio CARLO DE STEFANI.

Avendo già esposto le mie idee, non conformi a quelle dominanti, sulla sezione geologica di Val Devero nelle Alpi Pennine e del prossimo Sempione [2], l'ing. Stella annunciò che mi avrebbe risposto. Perciò, ond'egli abbia modo di meglio discutere le mie idee, anticipo la trattazione di questo argomento [3], che riguarda uno dei problemi stratigrafici ritenuto dei più complicati e certo dei più trattati oggigiorno.

[1] È questa la seconda parte della Nota *Di alcuni carreggiamenti recentemente supposti in Italia*. I. *Gli strati delle Mulina nel Monte Pisano*, pubblicata nei Rendiconti. Vol. XVII, fasc. 5. Seduta 26 aprile 1908.

[2] Cfr. De Stefani, *La Valle Devero e il profilo del Sempione* (Boll. Soc. geol. ital. 1906).

[3] A. Stella, *Presentazione della Carta geologica delle regione del Sempione e rettifiche* (Boll. Soc. geol. ital. XXVII, 1908).

Premetto la serie dei terreni della regione, quale dovrà risultare a mio avviso dalle conclusioni di questa mia Nota, cominciando dai terreni più antichi.

Non mi dilungo in cenni litologici, perchè chi si occupa di quelle regioni riconosce i nomi locali che celano le varie rocce.

1. *Gneiss* o Granito di Crodo o di Verampio.

2. Micaschisti biotitici, granatiferi, a staurotide; Cipollini, Calceschisti, Marmi bianchi; Anidrite; Gesso (zona di Baceno).

3. *Gneiss* d'Antigorio.

4. Micaschisti biotitici e a due Miche; Calceschisti; Cipollini; Marmi, Anidrite; Schisti nodulosi sericitici; Cloritoschisti; *Gneiss* nodulosi e schistosi detti di Vallè e di Lebendun (Calceschisti di Devero).

5. *Gneiss* a sottili strati, a due miche, (zone di Monteleone, di Valgrande, dell'Ofenhorn) con alcuni strati schistosi e con Anidrite intercalati.

6. Dioriti, Antigorite [1], Gabbri, Rocce verdi.

È però da notare che se certe rocce sono sempre ben distinte, (*Gneiss* di Crodo, d'Antigorio, di Monteleone, Rocce verdi) altre, come i Calcari, i Cipollini, le Anidriti, i Micaschisti, e talora gli *Gneiss* schistosi si trovano ripetute ad ognuno dei livelli intermedî 2 e 4: Micaschisti biotitici si trovano, benchè rarissimi, in mezzo al *Gneiss* d'Antigorio; Micaschisti e *Gneiss* a due miche trovansi a volte alla base ed alla sommità del *Gneiss* predetto. *Gneiss* svariati si alternano insomma in mezzo ad una lunga serie di Micaschisti e di Calceschisti.

Nell'insieme io non potrei affermare l'idea già antica che i calcari, i cipollini e l'anidrite si trovino nelle zone a confine coi *Gneiss*, mentre osservando con minuta analisi le trovai per tutto. È possibile e pur geologicamente assai verosimile che l'Anidrite sia una trasformazione endotermica dei calcari a contatto dei solfuri. Non forse in modo costante ed assoluto ma certo quasi generalmente notasi che le rocce sono prettamente silicee o siliceo-calcarifere. I lunghi metamorfismi trasformarono le prime in *Gneiss*, le seconde in Calceschisti, quando non furono dall'origine prettamente calcaree o quasi, nella qual circostanza furono cambiate in Marmi od in Cipollini marmorei e conseguentemente in Anidrite. I metamorfismi più intensi prevalentemente esercitatisi nelle rocce delle zone più profonde, come la zona 2, cambiarono i Calceschisti in Micaschisti a Granati e ad altri minerali calcici. E possibile dunque che la cagione prima delle differenze fra le rocce di quelle antichissime età sia l'origine loro calcitica o silicica quale è pur cagione delle differenze fra rocce moderne.

[1] L'Antigorite diffusa per Valle Antigorio a valle di Premia, recentemente studiata dal Bonney, proviene dalla Rossa in Val Devero.

Queste rocce contribuiscono a formare una ellissoide allungata da S. O. a N. E. fra la Valle Diveria a S. del Sempione ed il Toce, parallelamente alla Valle del Rodano, al Lago Maggiore, ed alla linea direttrice delle Alpi Pennine ed un poco inclinata sulla direzione del Toce.

Gli strati della vôlta sono quasi orizzontali o poco inclinati; però quando scendono avvicinandosi al livello del mare, per effetto di compressioni tangenziali diventano assai ripidi, ad ambedue le parti dell'asse maggiore verticali, e quelli più esterni si rovesciano anche.

Perciò l'andamento delle rocce è singolarmente semplice e regolare; specialmente quando lo si paragoni a quello delle rocce nelle Alpi Orientali, nell'Appennino settentrionale ed in altri luoghi delle stesse Alpi Occidentali; e ciò forse deriva dalla compattezza e dalla plasticità relativamente uniforme di varie rocce, specialmente dei *Gneiss* di Crodo e d'Antigorio, e molto probabilmente dall'essersi manifestati i movimenti quando la generale compattezza era già stata originata dai metamorfismi. Però non mancano spostamenti e parziali discordanze, p. es. fra il *Gneiss* d'Antigorio e le rocce adiacenti; ma specialmente fra il *Gneiss* di Crodo (n. 1) ed i Micaschisti (n. 2).

Per effetto di tali spostamenti differenti zone variano molto di dimensioni da un luogo all'altro; p. es. i Micaschisti (n. 2) sono molto alti sul Toce e lungo la Cairasca; i *Gneiss* (n. 3) lo sono lungo il Devero, la Diveria e la valle Antigorio; i Calceschisti (n. 4) nelle Alpi di Devero e di Veglia, mentre son poco potenti in alto e nel lato S. E. dell'ellissoide. In luoghi più lontani serie diversissime di terreni vengono a contatto con iscomparsa dei terreni di età intermedia. Non mancano delle frane all'esterno delle pendici, p. es. sulla destra del Rio d'Ausone all'entrata nel Devero e specialmente lungo la sinistra della Cairasca fra il Rio di Varzo e il Rio Fresaia e in basso fra Chioso e Gebbo, le quali frane, avendo spostato talora masse ragguardevoli, fanno l'effetto di vere faglie. Non mancano sottili scontorcimenti di strati specialmente visibili nei fini straterelli di scisti nodulosi e dei Calceschisti dei numeri 2 e 4. Non mancano poi varie curve secondarie, anche ortogonali fra loro, tanto a raggio assai ristretto, quanto a raggio assai ampio.

La più grandiosa curva, appunto quasi normale all'asse maggiore dell'ellissoide, manifestatasi nello spartiacque fra la Val Devero e la Cairasca, e gli strati implicati scendono piuttosto rapidamente dalla cresta del Cistella verso il pendìo sinistro della Cairasca indi verso il Sempione sulla destra di questo torrente (fig. 7, 8).

Nell'ellissoide soprà detto il *Gneiss* più antico (n. 1) comparisce, appunto nelle vicinanze di Crodo e di Verampio sul Toce, in banchi orizzontali (fig. 1, 2) visibili per altezza di almeno m. 100.

I Micaschisti (n. 2), detti pure Micaschisti di Baceno, compaiono lungo il Toce per grande altezza ed estensione, e di qui s' internano più bassi ma

per assai lungo tratto nella Val Devero verso Baceno e fino quasi a Goglio (fig. 1, 2, 8). Ricompariscono poi nella diretta continuazione sotterranea della Val Devero, cioè nella parallela valle della Cairasca affluente alla Diveria (fig. 4, 6, 7, 8), dove acquistano una grande estensione ad ambedue i lati della valle da Varzo a Croso parallelamente alla galleria del Sempione che prolungasi 2600 m. a S. O. e più di 500 m. in basso.

Cominciamo ad esaminare il profilo di Val Devero lungo l'ala N. O. dell'ellissoide (fig. 1), dove compaiono tutte le rocce prima indicate, cioè il *Gneiss* di Crodo (n. 1) all'entrata nel Toce; i Micascisti granatiferi (n. 2) detti di Baceno, massimamente sviluppati ed accompagnati da marmi presso Baceno, da Calceschisti in vari punti, da scisti nodulosi in alto; il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3), coperto talora da *Gneiss* a mica verde; i Calceschisti (n. 4) detti di Devero accompagnati da Scisti nodulosi, da Micascisti gneissici a due miche, e finalmente nell'alto nuovi *Gneiss* scistosi, gli *Gneiss* di Monteleone, (n. 5) coperti dall'Antigorite o Serpentino antigoritico (n. 6), della Rossa.

Le carte relative del Gerlach [1] e quella recentissima svizzera (*Geologische Karte der Simplon Gruppe* 1898-1906) dal punto di vista topografico e salvo lievissime rettificazioni sono sostanzialmente esatte.

Da Verampio a Goglio le rocce n. 2 e 3 costeggiano il pendio della valle non però in modo continuo; bensì i Micascisti (n. 2) rimangono interrotti non solo a sinistra ma pur sulla destra del torrente di Ausone fino circa al Ponte, il quale tratto è occupato solo dal *Gneiss* d'Antigorio (n. 3). Anzi il *Gneiss* scende per un certo tratto, parmi per semplice frana esterna e conseguente faglia, anche a destra del torrente d'Ausone.

Lo stesso *Gneiss* occupa anche il tratto alla foce del Rio di Brumei che nella carta è assegnato al Micaschisto.

Il micàscisto n. 2 è soggetto a lievi ondulazioni secondarie, per le quali lungo il Devero sparisce e riapparisce con pendenze leggermente variate; ma non è quasi affatto orizzontale come il Gerlach riteneva.

Le interpretazioni della stratigrafia date dai differenti autori sono però svariate. Eran prima due ed ora si potrebbero dire tre.

Il Gerlach supponeva che il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3) formasse un'anticlinale completamente sdraiato, perciò orizzontale, dal Toce fino a Goglio con radice dalla parte del Toce. Gli schisti sovrastanti (n. 4) e quelli sottostanti (n. 2) riuniti con la qualifica di Micascisti, secondo lui ravvolgevano completamente il *Gneiss* ed incurvandosi si congiungevano insieme a Goglio. Il Traverso suppose invece che Micascisti (n. 2) e *Gneiss* (n. 3) a Goglio fossero troncati da una faglia, di fronte alla quale puntava a N. O. il Calceschisto più recente di Devero.

[1] H. Gerlach, *Die Penninischen Alpen*, Zürich (N. Denkschr. d. allg. schw. Gesellsch. Bd. XXIII).

La Carta Svizzera, per la parte italiana completata dallo Stella, ammette topograficamente la distinzione, ivi assai legittima, fra Micaschisti (n. 2) e Calceschisti (n. 4) ben riconosciuta per primo dal Traverso, ma stratigraficamente mantiene la supposizione che gli uni sieno sotterra uniti agli altri cambiando carattere litologico entro brevissimo spazio.

Io proposi con riserva una quarta interpretazione e questa la mantengo ora senza riserva. Il Micascisto (n. 2) da Verampio a Baceno sulla sinistra del Devero, ed un poco più a monte sulla destra, mantiene, come il sovrastante *Gneiss* una pendenza che sale fino a 30° verso N. O.; ma più oltre, mantenendosi pur sempre la pendenza verso N. O., il grado di essa va diminuendo. A Rivera il Cipollino, che assume talora la forma di calcare Bardiglio, ed il calcare bianco, ambedue marmorei, che si alternano nel Micaschisto, sono inclinati di 18°; più a monte, a Bevola, dove pur alcuni strati di *Gneiss* schistoso si alternano nel Micascisto, la pendenza si riduce a 10° a N. O.: da Croveo, dove il Micascisto apparisce sotto la chiesa, al Ponte essa è di 8° a N. N. O. Dopo il Ponte il Micascisto scompare per breve tratto cedendo il luogo al *Gneiss* d'Antigorio, però ritorna sulla destra del Devero rimpetto alla cascata del Rio di Agaro formando una piccola piega isolata alta una trentina di metri.

Fino al Passo rimane anche in fondo al torrente il *Gneiss* d'Antigorio, i cui strati pendono circa 10° a N. N. E. con tendenza verso la cresta del Cistella (fig. 8).

Il micascisto, granatifero e staurolitico, talora gneissico e cloritico, molto pieghettato, ricomparisce, ma soltanto sulla sinistra del Devero, a monte del torrente di Ausone, alzandosi una settantina di metri, con nuova piega lievemente pendente all'incontrario di quella precedente, cioè di 15° a E. S. E.; mentre a destra del Devero salvo un brevissimo tratto micascistoso un poco a monte del Ponte, rimane il *Gneiss* d'Antigorio. Poco più a monte pende 25° ad E. cioè sempre a ridosso alla cresta del Cistella, e poche centinaia di metri avanti al Ponte di Goglio scende da 18° a 27° verso N. 20 E. quasi a chiudere verso quella parte la nuova piccola piega scistosa.

Ivi il Micaschisto termina, interrotto dalle alte morene di uno degli ultimi periodi del ghiacciaio di Rio Bondolero.

Il *Gneiss* sovrastante (n. 3) lo ricopre regolarmente, e sotto Ausone verso il Devero, sempre sulla sinistra, chiude la breve piega dei Micaschisti (n. 2) del Ponte di Goglio con pendenza a N. N. O. Lungo il Devero è però interrotto anch'esso dall'alta morena con colossali trovanti di Calceschisto, specie intorno e sopra Cugnesco. Ritengo che continui anche fino all'alveo ed in profondità; però i banchi si trovano gradatamente molto assottigliati, ed alquanto scontorti, benchè senza che vi sia traccia di un ritorno di anticlinale ossia di una cupola sdraiata, ed in questo forse il concetto del Traverso è quello che meno si allontanava dai fatti.

Certo si è che i Calceschisti (n. 4) a loro volta coprono regolarmente il *Gneiss* (n. 3) e se in qualche punto localmente sopra Cugnesco hanno limitati scontorcimenti e pendenze forti fin di 30° e 40°; però quasi universalmente e regolarmente pendono a N. O. di circa 10° sopra il *Gneiss*. Ivi i Calceschisti (n. 4) sono abbastanza diversi dai Micascisti sottostanti (n. 3); niuna continuità passa fra gli uni e gli altri; niun indizio vi è di curve che li colleghino: anzi i calcari e calceschisti che in talune carte recenti sono indicati in posto sotto il *Gneiss* alle case di Cugnesco sono semplici grandiosi trovanti del ghiacciaio di Rio Bondolero.

Se, come è possibile, sotto le morene e le frane di Goglio il *Gneiss* si assottiglia o eventualmente scomparisce per un certo tratto, come potrebbe verificarsi là dove una roccia così salda trovisi in mezzo ad altre disposte a lamina ed a strati sottilissimi, però è certo che in tal caso il Calceschisto (n. 4) ricopre direttamente il Micaschisto (n. 2) con salto di età, ma regolarmente chiudendo l'ala N. O. dell'Ellissoide Toce-Sempione [1].

[1] Schmidt e Preiswerk, *Erläuterungen zur geologischen Karte der Simplongruppe* (Geol. Karte d. Schweiz, Zürich, 1908), Profilserie Taf. II, fig. 8); e Preiswerk, *Die Grünschiefer in Jura und Trias des Simplongebietes* (Beitr. z. Geolog. Karte d. Schweiz Bern, 1907, pag. 6, fig. 2) pubblicano una sezione quasi perfettamente parallela alla mia fig. 1, ma più orientale, che dalla valle di Binn pel Geisspfad passa pel Monte Orfano, per Àgaro, pel Monte Forno e per la Tosa fin verso il Toce.

Essa traversa la zona di Antigoriti della Rossa, il *Gneiss* schistoso della zona di Monteleone e dell'Ofenhorn, i Calceschisti di Devero con la piccola zona di schisti anfibolici che io indicai a levante del Monte Orfano (C. De Stefani, *Sulla possibilità geologica di un solido sbarramento del Lago di Codelago*, Torino, Unione tip. editrice, pag. 4), il *Gneiss* di Antigorio, e la piccola serie di Calcari e Calceschisti che forma la cima del M. Forno in continuazione alla zona dei Calceschisti di Devero. Gli strati superficiali sono rappresentati secondo le inclinazioni che si vedono sul posto, cioè quelli a N. O. del Geisspfad pendono verso S. Est, quelli a S. Est pendono a N. Ovest. Gli strati interni, che non si vedono, sono raffigurati secondo le idee del Preiswerk e degli altri, cioè secondo l'ipotesi dell'unicità degli *Gneiss*, dell'età recente dei Calceschisti, dei Micascisti e degli scisti anfibolici inclusivi, e secondo l'ipotesi del carreggiamento. Secondo me invece lo spaccato va inteso come tutti gli spaccati 1, 2, 3, 4, 5, 6, da me presentati. Invero il *Gneiss* d'Antigorio, coi sottostanti Micascisti di Baceno forma un anticlinale regolarissimo quale si vede continuando lo spaccato a S. Est oltre il Toce. I Calceschisti di Devero e di M. Forno, quantunque assai ridotti come in tutta la zona meridionale, coprono regolarmente l'anticlinale, passando oltre il Toce insieme con i pochi scisti anfibolici inclusivi, quali si trovano al Monte Lavone, all'Agarina e a N. dell'Alpe Colmine. Sopra regolarmente sta il *Gneiss* schistoso, e più lontano si ritroverebbe ancora la zona delle Rocce verdi, che ritengo possibile rappresentante della così detta zona di Ivrea, che secondo me corrisponde alla Antigorite della Rossa. A N. Ovest del Geisspfad nella Conca di Binn gli strati schistosi e gneissici pendono all'incontrario per effetto del rovesciamento generale verso la valle del Rodano. Accostandosi alla valle del Rodano i Micascisti ed i Calceschisti, che seguitano a contenere strati anfibolici, acquistano caratteri

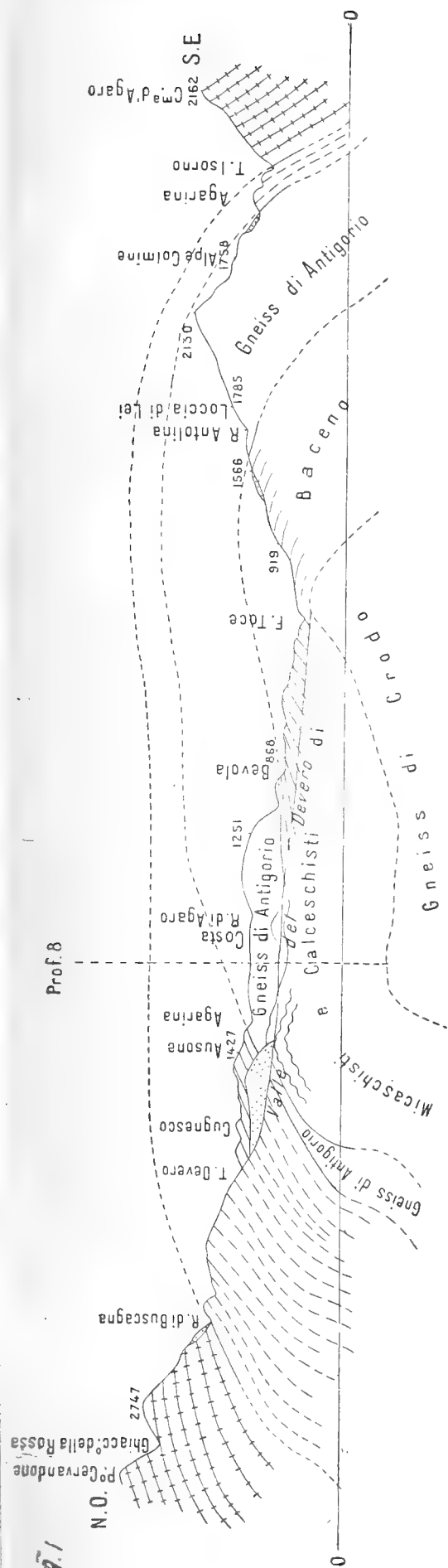
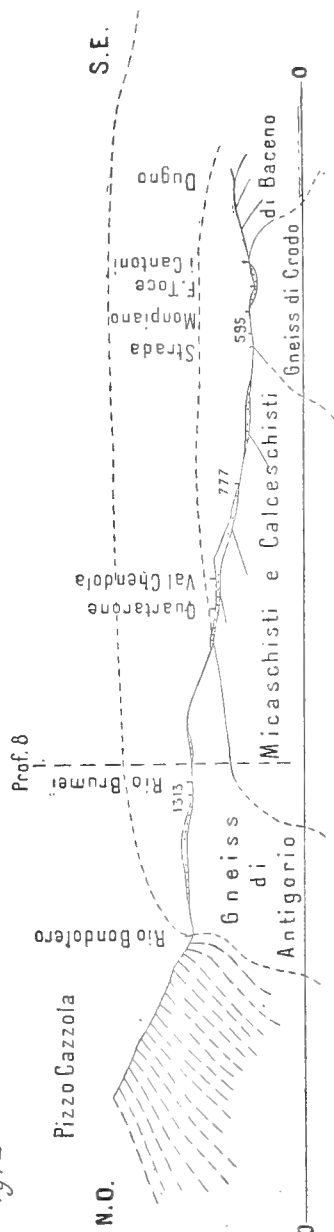
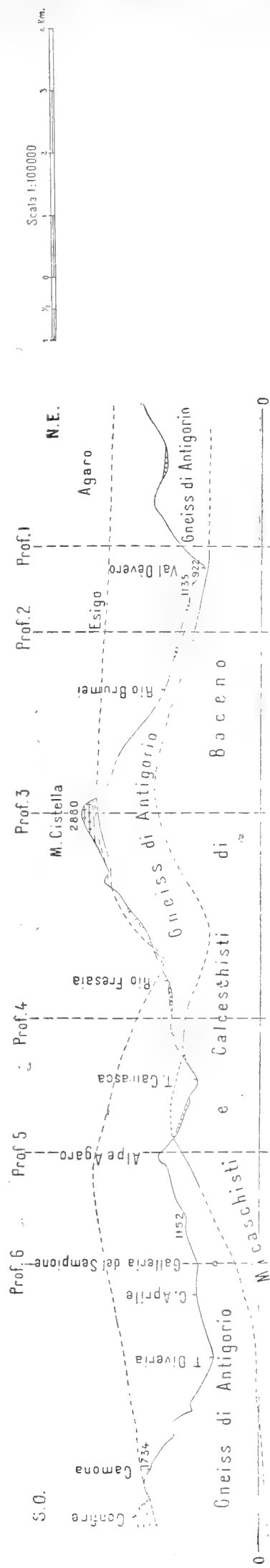
La chiusura dell'ellissoide e la non continuazione delle rocce n. 4 con quelle n. 2 è anche più evidente sulla destra del Devero. Ivi il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3) coperto da qualche strato di *Gneiss* a mica verde si nasconde ampiamente sotto la valle e separa nettamente i sottostanti Micascisti (n. 2) dai sovrastanti calcari del Rio Bondolero e dai Calceschisti (n. 4) (fig. 1).

Il Gerlach accennò come riprova dell'esistenza dell'anticlinale sdraiato i calcari inferiori della zona n. 4 sulla destra del Bondolero a Goglio presso la foce nel Devero, i quali calcari (n. 4) avrebbero avuto pendenza sottostante ai *Gneiss* di Antigorio; anzi lo spaccato che egli dà lungo il Devero è una combinazione di due cioè di quello della ripa destra e di quello della ripa sinistra, nella quale combinazione i calcari bassi del Bondolero girano sotto agli *Gneiss*. Nella realtà però quei cipollini e calcari marmorei, talora bardigliacei e molto quarzosi, hanno pendenza di 22° a E. N. E., quindi rimangono nettamente sovrastanti allo *Gneiss*; solo per una ripiegatura degli strati facilissima a verificarsi hanno direzione e pendenza locali alquanto diverse da quelle della massa dei Calceschisti (n. 4). Un poco più a monte e sempre sulla destra del Bondolero gli stessi calcari, talora alquanto scontorti, si voltano schiettamente a N. N. E. con una pendenza piuttosto forte (fig. 2) mentre i micaschisti quarzosi, cloritici ed i calceschisti della stessa zona (n. 4) che succedono al di sopra acquistano rapidamente la inclinazione normale di N. N. O.

Dunque nemmeno la destra della Val Devero presenta indizî di anticlinali sdraiati.

---

sufficientemente diversi da quelli interni di Val Devero e terminano con scisti veramente Carboniferi e più recenti.

Lo stesso è a dire dei Profili 9, 10, 11, 12 dei citati Schmidt e Preiswerk, i quali rispettivamente si avvicinano ai miei 2, 3, 4, 5, 6; anzi i Profili 10, 11, 12 sono in parte paralleli ai miei, in parte, come gli altri, formano con essi un piccolo angolo. In questi profili dei due geologi tutti gli *Gneiss* a sinistra del Toce sono inopportunamente segnati come *Gneiss* d'Antigorio ed i Micascisti di Baceno figurano connessi come effetto di metamorfismo regionale coi Calceschisti di Devero e sono inopportunamente colorati nello stesso modo.

N.B. — Gli spaccati 1-6 sono paralleli fra loro e normali alla direzione degli strati. Lo spaccato 8 è normale agli altri. Il piano d'intersezione dei vari spaccati è segnato via via.

Matematica. — *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Nota del Corrisp. G. Ricci.

Fisica. — *Sulla determinazione dell'indice di rifrazione al microscopio.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Chimica. — *Ricerche nel gruppo della colesterina. — La Fitosterina dell'olio della noce comune (Inglans regia).* Nota del Socio A. Menozzi e di A. Moreschi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche nel gruppo della colesterina.* Nota VI. *Ulteriori osservazioni sulla bombicesterina e sulla presenza di colesterina nelle crisalidi del baco da seta.* Nota del Socio A. Menozzi e di A. Moreschi [1].

In una Nota pubblicata nei Rendiconti di questa Accademia (Rendiconti, vol. XVII, 5ª serie, 1° sem. 1908, pag. 95), abbiamo esposti i risultati di ricerche compiute sul grasso delle crisalidi del baco da seta, e precisamente sulla parte non saponificabile del grasso medesimo.

I risultati delle nostre ricerche ci portavano a segnalare, nella parte non saponificabile di quel grasso, un prodotto del gruppo della colesterina, che si avvicina alla colesterina ordinaria per molti riguardi, ma che è sicuramente differente, come emerge dalle indagini fatte ed esposte nella Nota ricordata, prodotto a cui abbiamo dato il nome di bombicesterina; ed inoltre due idrocarburi della paraffina, di uno dei quali si è data la composizione ed il punto di fusione, e dell'altro il punto di fusione solamente. Si accennò inoltre alla presenza di altre sostanze non ancora ben definite.

Quella Nota si chiudeva con l'affermare che ciò che forma la maggior parte del prodotto colesterinico è sicuramente differente, per quanto vicino, dalla colesterina biliare; che d'altra parte alcuni risultati, e precisamente quelli ottenuti nella bromurazione di prodotto non perfettamente puro, indi-

[1] Ricerche eseguite nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

cavano che probabilmente, a fianco della bombicesterina vi sia anche, in quantità minore, la colesterina comune.

Abbiamo creduto necessario di chiarire questo punto, come allora promettevamo, ed ecco i risultati delle nostre ulteriori osservazioni, le quali ci hanno dimostrato in modo indubbio, che effettivamente a fianco della bombicesterina si contiene anche, in detto olio, in quantità minore, la colesterina ordinaria.

La parte non saponificabile del grasso greggio di crisalidi, la quale, ottenuta in seguito ad una prima saponificazione, rappresenta circa il 10 %, come abbiamo già indicato in altra Nota, dopo una seconda saponificazione si riduce a circa il 2,5 %. Questa parte non saponificabile, oltre a piccole quantità di prodotti non ben definiti, risulta da idrocarburi e da prodotti colesterinici.

Per separare rapidamente gli idrocarburi dal prodotto colesterinico, il migliore procedimento consiste nel trattare con alcool caldo acquoso (a 70° centesimali circa) nel quale gli idrocarburi non si disciolgono che in tracce, mentre il prodotto colesterinico si discioglie facilmente.

Separato dagli idrocarburi il prodotto colesterinico, se questo si sottopone a ripetute cristallizzazioni da alcool ed etere, si arriva dopo molto lavoro a separare la bombicesterina pura, fusibile a 148°, e da noi descritta.

Ma se il prodotto colesterinico greggio si trasforma in acetato e se questo si sottopone a cristallizzazione frazionata, si riesce ad ottenere due acetati, di cui uno fusibile a 113°-114° e l'altro fusibile a 129° C. Da quest'ultimo, per saponificazione, si ottiene la bombicesterina da noi descritta, fusibile senz'altro a 148° C.; dal primo si ha la colesterina ordinaria.

Un altro modo di separare i due prodotti consiste nell'addizionare bromo alla miscela degli acetati. Il bibromoacetato della colesterina ordinaria cristallizza facilmente e presto si purifica: la sua identità col bibromoacetato di colesterina è stata riconosciuta anche cristallograficamente [1].

[1] Ecco le osservazioni cristallografiche compiute dal prof. Artini e gentilmente comunicateci.

Bibromoacetato di colesterina

	crisalidi Osserv. Artini	bile Osserv. Zepharovich
(100) . (001)	82.36	82.9
(100) . (10$\bar{1}$)	29.14	29.4
(001) . ($\bar{1}$01)	68.10	68.47
(001) . (011)	68.7	68.17
($\bar{1}$12) . (001)	60.51	61.10
($\bar{1}$11) . ($\bar{1}$12)	15.25	15.23
($\bar{1}$00) . ($\bar{1}$11)	56.53	56.43
(100) . (011)	87.29	87.5
($\bar{1}$00) . ($\bar{1}$12)	62.28	62.47

Riguardo alla proporzione precisa in cui i due composti sono presenti nel grasso delle crisalidi del baco da seta, si comprende come sia difficile stabilirla.

Dalle nostre osservazioni crediamo di poter ammettere che la colesterina comune rappresenti dal 13 al 14 % della miscela.

Risulta così dimostrato che nell'insetto da cui proviene il nostro materiale di studio, e precisamente nella crisalide del *Bombyx mori*, vi hanno due termini del gruppo della colesterina, e cioè la colesterina comune in piccola quantità, ed in quantità maggiore il nuovo termine, la bombicesterina.

Questi fatti sono in rapporto con quelli che altri ha rilevato dopo di noi e per altri insetti. Così il dott. Welsch [1] dal grasso della *melolonta vulgaris* ha separato, oltre l'acetato della colesterina ordinaria, anche quello di un altro termine di questo gruppo, fondente a 124-125°, da cui una sterina fondente a 141-142°. Mentre in altri insetti (*Lytta vescicatoria*, *Octopus vulgaris* non ha riscontrato che la colesterina ordinaria.

Abbiamo preparato alcuni altri derivati della bombicesterina, che ora descriviamo.

Biidrobombicesterina. — Facendo passare idrogeno a lungo a traverso una soluzione di bombicesterina (dall'acetato f. 129) in etere etilico, in presenza di nero di platino, si giunge ad un prodotto che fonde a 134° e che risulta dall'addizione di due atomi di idrogeno: è quindi *biidrobombicesterina*. La sua soluzione cloroformica non dà con acido solforico la nota reazione di colore; non decolora la soluzione di bromo.

La sostanza ruota a destra il piano di polarizzazione della luce; per la soluzione cloroformica si ha:

$$[\alpha]\,D^{19^\circ C} = +19{,}11$$

Forme osservate:

$\{100\}$, $\{001\}$, $\{\bar{1}01\}$, $\{011\}$, $\{\bar{1}11\}$, $\{\bar{1}12\}$.

Cristalli allungati secondo l'asse *y*.

I cristalli corrispondono perfettamente alla modificazione monoclina del bibromoacetato della colesterina dalla bile preparato da Reinitzer e descritto da Zepharovich nella Zeitschrift für Krystallographie XV, 225.

[1] Dott. August Welsch, *Ueber das Vorkommen und die Verbreitung der Sterine in Tier- und Pflanzenreich.* Inaugural Dissertation Buchdrucherei I. Scherz. Offenbach a/M. 1909.

Con anidride acetica dà l'*acetato di biidrobombicesterina* fondente a 128° e la cui rotazione specifica è, in soluzione cloroformica,

$$[\alpha]\, D^{17^\circ C} = +13{,}45$$

Una determinazione dell'acetile, che conferma la natura dell'etere, permette di separare un prodotto che viene purificato per ricristallizzazione da alcool ed etere e che si identifica per il punto di fusione (133°-134° C) con la biidrobombicesterina.

Patologia — *Sopra un'alterazione sistemica delle vie commissurali dell'encefalo nell'alcoolismo cronico.* Nota del Socio E. Marchiafava e del prof. A. Bignami.

Nel 1903 pubblicammo le osservazioni da noi eseguite in tre autopsie di alcoolisti, sui quali riscontrammo un'alterazione del corpo calloso presentantesi con tale costanza di caratteri che la stessa descrizione, quasi negli identici termini, poteva valere pei tre casi.

Richiamata l'attenzione nostra su tale lesione, che non era stata descritta prima di noi per quanto ci consta, nè è stata oggetto di altre pubblicazioni dopo la nostra, abbiamo potuto osservarla di nuovo con una certa frequenza, tanto che oggi disponiamo complessivamente di 12 casi dei quali alcuni sono stati raccolti dal prof. Nazari e dal dott. Ugolini, che ne fanno ora con noi oggetto di studio.

Lo studio di questo ricco materiale, sebbene non sia ancora completo, ci permette di aggiungere importanti nozioni a quanto abbiamo già scritto sull'argomento, nozioni le quali ci portano a ritenere che al quadro morboso in questione spetti una propria individualità così dal punto di vista clinico come da quello anatomo-patologico.

Innanzi tutto, considerando i dati etiologici, possiamo confermare che l'alterazione descritta è in rapporto con l'alcoolismo. In qualche caso l'anamnesi parla anche di malattie veneree, le quali però si possono escludere in altri. Alcuni dei soggetti erano forti fumatori. Ma tutti erano noti come strenui bevitori di vino e, in generale, anche di liquori. Alcuni erano figli di alcoolisti e bevitori fin da ragazzi, e per lo più abbrutiti dall'alcool.

Sebbene da molti anni la nostra attenzione in tutte le autopsie sia rivolta ad esaminare lo stato anatomico del corpo calloso, non abbiamo trovato l'alterazione da noi descritta in nessun cadavere — sino ad ora — che non fosse d'individuo notoriamente alcoolista:

Quanto al decorso clinico presentato dai nostri malati, l'esperienza degli ultimi sei anni c'induce a ritenere come molto probabile che col progredire delle nostre conoscenze si potrà forse riuscire a riconoscere e diagnosticare in vita l'alterazione delle commessure encefaliche su cui ora richiamiamo l'attenzione. Infatti, sebbene i nostri malati siano stati in generale portati negli ospedali in condizioni così gravi che non potevano da sè raccontare la storia della propria malattia, nelle notizie raccolte dai parenti si nota una certa uniformità di dati, la quale ci fa pensare con fondamento che alla tipica e costante alterazione anatomo-patologica corrispondano una sindrome od un decorso clinico ben determinato.

Si tratta d'individui venuti a morte tra i 40 e i 65 anni (uno solo di essi aveva 39 anni), generalmente molto denutriti e — i più giovani — con segni di vecchiezza precoce. I primi sintomi della malattia si fanno risalire ad un tempo variabile fra i tre ed i sei anni. È verosimile però che il decorso sia anche notevolmente più lungo, poichè è presumibile che i fenomeni psichici iniziali siano sfuggiti alle incolte persone della famiglia. In tutti si è notato un progressivo decadimento intellettuale sino ad uno stato di confusione mentale o di demenza; uno stato d'eccitabilità esagerata e di irascibilità con aggravamenti accessionali fino ad atti di violenza; un'alterazione dell'affettività per cui, pur avendo intervalli nei quali si mostravano affettuosi verso le persone della famiglia, in generale, specialmente sotto l'azione del vino, erano violenti e malvagi; un pervertimento morale fino a commettere atti impudichi, per esempio di esibizionismo, verso persone della propria famiglia. Spesso presentavano tremori, od un disturbo della parola che viene descritto come una disartria. In tutti i casi, si sono verificati fenomeni accessionali sotto forma di *ictus*. Qualche volta l'*ictus* era seguito da convulsioni cloniche unilaterali o generalizzate di breve durata, altre volte da un'emiparesi transitoria. Qualche volta si è trattato di lipotimia, o di stati transitori che ricordano le assenze epilettiche. In un solo caso abbiamo trovato all'autopsia una pachimeningite emorragica bilaterale, a cui potevano riferirsi gli accessi apoplettiformi sofferti. In tutti gli altri casi rinvenimmo soltanto l'alterazione caratteristica commessurale.

Per lo più con un *ictus* apoplettiforme o epilettiforme comincia l'aggravamento progressivo. Al decadimento intellettuale e morale si aggiunge una progressiva debolezza motoria per cui l'infermo è costretto ad abbandonare il suo lavoro.

Come abbiamo già detto i nostri infermi sono stati sempre portati all'ospedale in condizioni gravissime, qualche volta deliranti. Spesso si è osservato uno stato di rigidità, ipertonia, degli arti, più notevole da un lato, e grande debolezza motoria senza paralisi o paresi circoscritte; perdita di urina e di fecce; coscienza crepuscolare; quindi sopore e coma, nel quale, per lo più, è avvenuta la morte,

L'autopsia ci ha dimostrato che l'esito letale è avvenuto qualche volta per una malattia acuta, come una bronco-polmonite terminale, in un caso per un'enterocolite acuta: in due casi abbiamo trovato una nefrite cronica (rene granuloso ridotto di volume). In un caso la morte è avvenuta per soffocazione, in conseguenza dell'occlusione della laringe, prodotta da un pezzo di carne ingoiato pochi istanti prima dell'esito letale. Ma è degno di nota che, in varî dei nostri soggetti, le alterazioni dell'encefalo erano le sole lesioni anatomo-patologiche riconoscibili all'autopsia.

Restringendo quindi a queste la nostra attenzione, rileviamo innanzi tutto che in alcuni casi abbiamo riscontrato una sclerosi non grave delle arterie cerebrali, ma non sempre; le meningi lievemente iperemiche e qualche volta la Pia Madre un po' inspessita, ma senza aderenze patologiche alla corteccia sottostante. La lesione costante riguarda le vie commessurali.

Quanto al corpo calloso, non abbiamo che a riferirci, per quel che riguarda la sede e l'estensione dell'alterazione, a quanto ne abbiamo scritto nel 1903 (1). Risulta da quella descrizione che si tratta di un'alterazione essenzialmente degenerativa circoscritta alla parte media della grande commessura interemisferica.

Notiamo però che quella descrizione si riferisce principalmente ai casi più avanzati. In questi la zona degenerata della trave si presenta, all'esame a fresco, di color grigio, e il corpo calloso nell'insieme, specie nel suo terzo medio, è alquanto assottigliato ed atrofico. Nei casi meno avanzati il colorito della zona degenerata è grigio roseo, e lo spessore del corpo calloso è nei limiti normali.

Ma quel che ci preme di aggiungere alla nostra antica descrizione, si è che la lesione non è limitata alla grande commissura interemisferica, ma si trova anche nella commissura anteriore e nei peduncoli cerebellari medi. Sebbene non possiamo affermare che ciò si verifichi in tutti casi, pur tuttavia consideriamo tale fatto come di grande importanza e caratteristico.

Nella seduta del 24 marzo 1907 Bignami presentò all'Accademia Medica di Roma dei preparati, dai quali risultava che, oltre la nota lesione del corpo calloso un'alterazione perfettamente simile poteva mettersi in evidenza nella commissura anteriore.

La degenerazione, nella commissura anteriore, non colpisce tutte le fibre, ma ne risparmia un sottile strato dorsale ed uno ventrale. Sembrano risparmiate le fibre della commissura olfattiva. La localizzazione della lesione nella com. ant. è dunque perfettamente simile a quella descritta nel corpo calloso, dove, come è noto, uno strato dorsale ed uno ventrale di fibre è sostanzialmente risparmiato dall'alterazione degenerativa, la quale è quindi circoscritta ad una zona o lamina intermedia, compresa cioè tra le due prime.

(1) Rivista di Patologia nervosa e mentale, 1903, Firenze.

Aggiungiamo ora che una lesione simile abbiamo trovato in due casi nel peduncolo cerebellare medio. Ed in un caso un'alterazione iniziale della stessa natura abbiamo veduta in alcuni dei fasci lunghi di associazione intraemisferici, mentre le vie brevi di associazione presentano caratteri normali.

Anche per quel che riguarda i caratteri istologici dell'alterazione possiamo confermare nei punti fondamentali la descrizione già datane. I vasi non presentano alterazioni notevoli, salvo una degenerazione jalina delle pareti ed un'anormale tortuosità con formazione d'insenature e di anse. Mancano segni di alterazioni proliferative o flogistiche delle pareti vasali; si possono vedere invece dei vasellini precapillari atrofici ed obliterati. In alcuni casi si trovano quei fascetti vasali descritti dagli autori colla denominazione di *Gefässpackete*.

Nei preparati alla Unna-Pappenheim non abbiamo trovato « plasmazellen ».

L'alterazione fondamentale — limitäta alle zone descritte — riguarda le fibre nervose, nelle quali — come dimostra ad evidenza lo studio dei preparati alla Weigert-Pal —, manca la guaina midollare: i cilindrassi, invece, come si vede specialmente in preparati alla Bilkowski, sono conservati, almeno nei tratti di tessuto dove l'alterazione è meno grave ed avanzata.

Da per tutto si nota un aumento della nevroglia e la presenza di molte cellule granulose.

Quanto alla natura della lesione, ci riserbiamo di ritornarci sopra in seguito nel lavoro completo, tanto più che abbiamo già iniziato ricerche sperimentali in proposito, le quali ci permetteranno di studiare i primi stadî della detta altezione.

Per ora possiamo affermare, che negli alcoolisti cronici si trova con una certa frequenza una lesione tipica e caratteristica dell'encefalo, la quale si può mettere in rapporto col decorso e la sindrome clinica. Si tratta di una *alterazione degenerativa di origine tossica* che colpisce particolari segmenti o fasci di fibre delle vie commessurali dell'encefalo, e può essere quindi considerata come una malattia sistemica delle commissure.

Fisica. — *Oscillazioni termiche delle lampade a filamento sottile percorse da correnti alternate, e conseguente effetto raddrizzatore per la presenza di armoniche pari.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio Blaserna.

1. Dopo le ricerche teoriche preliminari di Cranzer sulle oscillazioni termiche di un filamento sottile percorso da correnti alternate, l'Ebeling [1] ne fece oggetto di un ampio e interessante studio teorico e sperimentale. Non sembra accettabile il criterio seguito dall'Ebeling di ritenere cioè trascurabile la quantità di calore assorbita dal filamento nelle sue variazioni di temperatura; questa ipotesi però è senza conseguenze nei risultati teorici, poichè l'equazione da lui posta, e che regge l'impiego della potenza istantanea dissipata nel filo, comprende un termine che può anche interpretarsi come rappresentante quella quantità; anzi corrisponde soltanto ad essa quando il filamento è sottratto, nel vuoto, all'azione raffreddatrice delle correnti di convezione.

Dal punto di vista teorico è ancora da osservare che non sembra lecito ritenere costante la resistenza del filo nel computo della potenza istantanea svolta dalla corrente, esprimendola con $e_0 i_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$ quando è $e_0 \operatorname{sen} \omega t$ la f. e. m. agente. Non è lecito, cioè, ritenere che le correnti restino sinusoidali malgrado la variazione periodica di resistenza del filamento. Sarebbe stato inoltre preferibile lasciare imprecisata, fin dove era possibile, la legge di emissione termica del filo, che non è certo nè quella di Newton supposta dal Cranz, nè quella di Dulong e Petit ammessa dall'Ebeling.

Infine la determinazione sperimentale delle temperature istantanee fatta col rilievo all'oscillografo della curva delle tensioni agli estremi del filamento e della curva dell'intensità (le quali due curve permettono di dedurre in ogni istante la resistenza vera del filamento e quindi la sua temperatura) sono, nel caso delle lampade a incandescenza, malsicure, come lo stesso A. dichiara; e ciò a causa della piccolezza della corrente che traversa la lampada. Ed è perciò che mentre egli non potè constatare in modo misurabile uno spostamento di fase tra le variazioni della potenza e quelle della temperatura, i valori ottenuti come limiti estremi di variazione della temperatura, con correnti alternate di diversa frequenza, farebbero ritenere che quel ritardo esisteva, cambiando di valore con la frequenza.

[1] Ebeling, Ann. d. Physik, 27, p. 391, 1908.

Per la importanza teorica e tecnica del problema mi è parso interessante assoggettarlo a una trattazione nuova, che mentre migliori notevolmente la teoria del fenomeno, ne permetta lo studio sperimentale in modo indipendente dai rilievi oscillografici. I primi risultati delle mie ricerche formano l'oggetto di questa Comunicazione.

2. Sia $f(T)$ la emissione totale del filo corrispondente alla temperatura assoluta T; c la sua capacità calorifica media (in unità meccaniche) nei limiti tra cui oscilla la temperatura e a il coefficiente di variazione termica della resistenza nei medesimi limiti; t il tempo; $e_0 \operatorname{sen} \omega t$ la f. e. m. sinusoidale agente agli estremi del filo; ϑ la temperatura del filo contata dalla sua temperatura media T_m, r_m la sua resistenza alla temperatura T_m — Si avrà allora evidentemente:

$$c\frac{dT}{dt} + f(T) = \frac{e^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}{r_m(1 + a\vartheta)}$$

Accetteremo per semplicità una delle ipotesi supposte da Ebeling; che cioè ϑ sia piccolo di fronte a T_m, cosicchè sia lecito tener conto solo delle grandezze di prim'ordine rispetto a $\frac{\vartheta}{T_m}$.

Si avrà allora sviluppando $f(T_m + \vartheta)$ in serie di Taylor limitata al secondo termine:

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + ca\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} + f(T_m) + a\vartheta f(T_m) + \vartheta f'(T_m) = \frac{e_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t}{r_m}$$

$$= \frac{e_0^2}{2r_m}(1 - \cos 2\,\omega t).$$

Supporremo inoltre, e l'ipotesi si giustifica facilmente, che entro i limiti d'approssimazione stabiliti il secondo termine sia trascurabile.

Si avrà, intanto,

$$f(T_m) = \frac{e_0^2}{2r_m} = W$$

ove W indica la potenza media spesa nel filo; e inoltre, posto;

$$Q = af(T_m) + f'(T_m)$$

sarà:

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + Q\vartheta = -\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega t.$$

Siamo condotti, per la forma, alla equazione differenziale che regge l'intensità d'una corrente in un circuito induttivo di resistenza Q, e autoinduzione c, ai cui estremi agisca una f. e. m. sinusoidale; quindi ϑ oscil-

lerà sinusoidalmente con pulsazione 2ω e con un ritardo φ rispetto alla grandezza $-\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega$; si potrà porre cioè:

$$\vartheta = \Theta \cos(2\,\omega t - \varphi) \qquad (1)$$

con

$$\Theta = -\frac{e_0^2}{2r_m}\frac{\cos\varphi}{Q} \qquad (2)$$

e

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\,c\omega}{Q} \qquad (3)$$

In particolare se l'emissione seguisse una legge analoga a quella di Stefan, con un esponente β:

$$f(T) = sT^{\beta}$$

si avrebbe:

$$\Theta = -\frac{\cos\varphi}{a + \frac{\beta}{T_m}}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2c\omega}{W\left(a + \frac{\beta}{T_m}\right)}$$

Queste ultime formole si identificano con quelle di Ebeling quando si faccia $a = 0$; si riconosce subito che questo conduce a divergenze non trascurabili, anche assumendo per a il valore $\frac{1}{1500}$ determinato sperimentalmente da lui col pirometro Wanner per i filamenti metallici a temperatura elevata.

Lasciando imprecisata, come nelle (2) e (3), la legge di emissione, si può osservare che la tangente dell'angolo φ è proporzionale alla capacità termica del filo e alla frequenza della corrente; mentre la variazione massima Θ della temperatura è proporzionale a $\cos\varphi$.

Se ne deduce l'importanza della determinazione di φ per una data frequenza. Tale determinazione può esser fatta indirettamente, ma con molta esattezza, profittando d'una interessante proprietà del filamento di cui la teoria ci rivelerà tosto l'esistenza.

3. Supponiamo, invero, di far agire sul filo la somma di due forze e. m. di diverse pulsazioni, ω e ω_1, e siano esse $e_0 \operatorname{sen}\omega t$ ed $e_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t - \gamma)$.

Si avrà, ponendo ancora:

$$T = T_m + \vartheta$$

con le medesime ipotesi sulla grandezza di $\frac{\vartheta}{T_m}$:

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + f(T_m) + Q\vartheta = \frac{e_0^2 + e_1^2}{2r_m} - \frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega t - \frac{e_1^2}{2r_m}\cos 2\,(\omega_1\,t - \gamma) +$$
$$+ \frac{e_0 e_1}{r_m}\left\{\cos\left[(\omega - \omega_1)\,t + \gamma\right] - \cos\left[(\omega + \omega_1)\,t - \gamma\right]\right\}$$

e perciò

$$W = f(T_m) = \frac{e_0^2 + e_1^2}{2r_m}$$

Supponiamo adesso che sia:

$$2\omega = \omega_1$$

cioè che la seconda f. e. m. sia di frequenza doppia della prima; sarà:

$$c\frac{d\vartheta}{dt} + Q\vartheta = -\frac{e_0^2}{2r_m}\cos 2\,\omega t - \frac{e_1^2}{2r_m}\cos\left[4\,\omega t - 2\gamma\right] +$$
$$+ \frac{e_0\,e_1}{r_m}\left\{\cos(\omega t - \gamma) - \cos(3\,\omega t - \gamma)\right\}$$

Si deduce che ϑ costerà di quattro parti oscillanti sinusoidalmente con le pulsazioni ω, 2ω, 3ω e 4ω. Indicandole rispettivamente con ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4, ponendo perciò:

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4$$

con i valori massimi Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 e i ritardi φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, si potrà esprimere la resistenza istantanea r del filo con

$$r = r_m\left[1 + a\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4)\right];$$

e quindi, dato l'ordine di grandezza di a, prossimo a $\frac{1}{1500}$, l'intensità i della corrente sarà misurata da

$$i = \frac{e_0 \operatorname{sen}\omega t + e_1 \operatorname{sen}(2\,\omega t - \gamma)}{r_m}\left[1 - a\,(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4)\right]$$

Associando il termine $e_0 \operatorname{sen}\omega t$ con ϑ_1 che varia con la stessa pulsazione ω, e il termine e_1 sen $(2\omega t - \gamma)$ con ϑ_2 che varia con la pulsazione 2ω, si otterrà un sistema di due termini *indipendenti dal tempo*; cosicchè il filamento, malgrado sia sottoposto a f. e. m. alternative, *sarà traversato da una corrente variabile avente una componente continua.*

Indicandola con I sarà, come è facile riconoscere,

$$I = -\frac{a}{r_m}\left[e_0\,\Theta_1 \operatorname{sen}(\varphi_1+\gamma) + e_1\,\Theta_2 \operatorname{sen}(\varphi_2-\gamma)\right] \tag{4}$$

E poichè

$$\Theta_1 = \frac{e_0\,e_1}{r_m}\,\frac{\cos\varphi_1}{Q}$$

$$\Theta_2 = -\frac{e_0^2}{2r_m}\,\frac{\cos\varphi_2}{Q}$$

sarà

$$I = \frac{e_0^2\,e_1}{2r_m^2}\,\frac{a}{Q}\left[-2\cos\varphi_1 \operatorname{sen}(\varphi_1+\gamma) + \cos\varphi_2 \operatorname{sen}(\varphi_2-\gamma)\right]$$

$$= -\frac{e_0^2\,e_1}{2r_m^2}\,\frac{a}{Q}\left[(\operatorname{sen}2\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\varphi_2)\cos\gamma + (\cos^2\varphi_2 + 2\cos^2\varphi_1)\operatorname{sen}\gamma\right]$$

ovvero, ponendo:

$$A = \operatorname{sen}2\,\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\,\varphi_2$$

$$B = \cos^2\varphi_2 + 2\cos^2\varphi_1$$

sarà

$$I = -\frac{e_0^2\,e_1}{2r_m^2}\,\frac{a}{Q}\left[A\cos\gamma + B\operatorname{sen}\gamma\right]. \tag{5}$$

Si ha poi

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{c\omega}{Q}\ ,\quad \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{2c\omega}{Q}$$

cioè

$$\operatorname{tang}\varphi_2 = 2\operatorname{tang}\varphi_1 \tag{6}$$

Indicando, perciò, con I′ e I″ le componenti di corrente continua che corrispondono ai valori 0° e 90° di γ, cioè le componenti continue delle correnti ottenute secondo che le due f. e. m. agenti sono, all'origine, in fase o in quadratura, sarà:

$$\frac{I'}{I''} = \frac{\operatorname{sen}2\,\varphi_1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\,\varphi_2}{2\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2} = \frac{A}{B}$$

E posto:

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{c\omega}{Q} = K$$

si deduce facilmente

$$\frac{I'}{I''} = \frac{2\,K^3}{1+3\,K^2} = \frac{2\operatorname{tang}^3\varphi_1}{1+3\operatorname{tang}^2\varphi_1}$$

Così *dal rapporto delle due correnti continue* I′ *e* I″ *si potrà determinare* φ_1 *e quindi il ritardo corrispondente a qualunque frequenza, senza che occorra conoscere la legge di emissione del filo, nè la sua capacità calorifica, nè il suo coefficiente di temperatura, nè alcun altro elemento.*

Si potrà poscia dedurre, per mezzo della (4), il valore di $a\Theta_1$ e di $a\Theta_2$, e quindi supposta la conoscenza di a, necessaria anche col metodo oscillografico, si otterranno i valori limiti tra cui, nei diversi casi, oscilla la temperatura del filo.

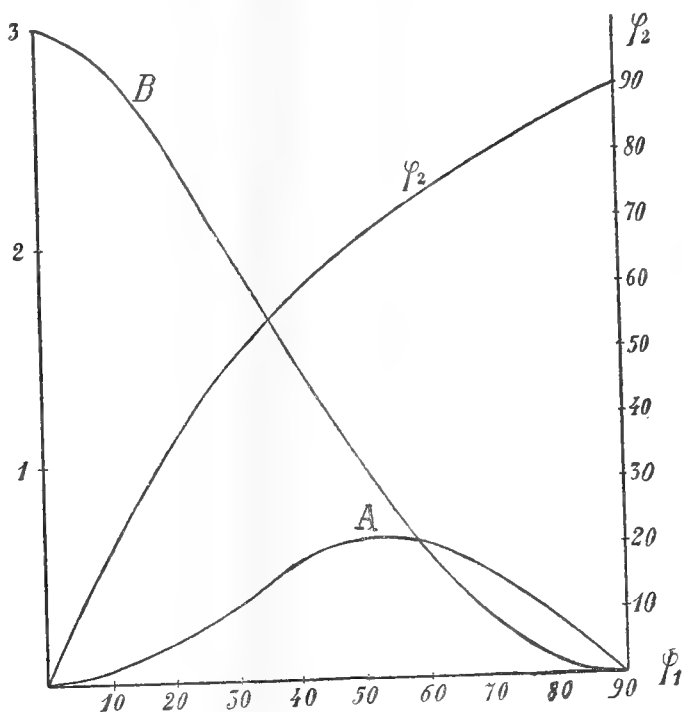



Fig. 1.

4. Come risulta dalla (5) la f. e. m. di pulsazione doppia ha una diversa influenza secondo che sia $\gamma = 0$ ovvero $\gamma = 90$. Tenendo conto della (6) ho calcolato i valori di A e B (cui son proporzionali I′ e I″) corrispondenti ai diversi valori possibili di φ_1; i risultati servirono per costruire le curve della fig. 1 di cui una rappresenta anche la dipendenza tra φ_2 e φ_1 espressa dalla (6). Si vede da queste curve che B decresce sempre fino a zero col crescere di φ_1; mentre A, partendo da zero raggiunge un massimo e poi torna a decrescere fino a zero. Per piccoli valori di φ_1 (cioè della capacità calorifica del filo e della frequenza della f. e. m.) B è fortemente superiore ad A; l'opposto avviene a partire da un valore di φ_1 eguale a circa 57°. Si comprende così ancora una volta che dal rapporto $\frac{I'}{I''}$, eguale ad $\frac{A}{B}$, si

possa avere un mezzo squisito di valutazione di φ_1, tutto riducendosi alla misura di due correnti continue. Occorrerà perciò creare nel circuito in cui è inserita la lampada una f. e. m. alternativa di frequenza doppia della principale, cioè la seconda armonica di questa, facendo in modo che se ne possa regolare e conoscere la fase dell'origine. Per una determinata potenza totale $\frac{e_0^2 + e_1^2}{2r_m}$ spesa nella lampada, cioè per una determinata temperatura media raggiunta dal filo, la componente di corrente continua sarà massima, come è facile riconoscere, quando è

$$e_0^2 = 2\, e_1^2$$

cioè quando la seconda armonica fornisce un terzo dell' energia complessiva.

Si noti infine che ai valori zero e 90° di γ corrispondono per la f. e. m. *totale* agente le due note forme dell'onda che presenta nel 1° caso la simmetria *nei valori massimi*, positivo e negativo, rispetto allo zero; mentre nel secondo una delle semionde è più depressa dell' altra. In quest' ultimo caso l'effetto raddrizzatore prodotto dalla lampada si potrebbe anche giustificare intuitivamente; non è lo stesso però del primo caso.

5. Accingendomi ad eseguire delle esperienze nell'ordine di idee sopra esposto, che saranno completate con ricerche fotometriche sulla luminosità del filamento nelle diverse fasi della corrente, ho voluto anzitutto confermare per via diretta il singolare comportamento previsto dalla teoria, che cioè il filamento, percorso da due correnti alternate di cui l' una di periodo doppio di quello dell'altra, funzionerebbe da raddrizzatore parziale delle correnti; costituendo così il primo esempio (per quanto è a mia conoscenza) di produzione di correnti continue per effetto di f. e. m. alternative agenti in un circuito puramente metallico.

E l'esperienza ha appunto verificato la previsione. Non era possibile, com'è naturale, ricorrere alla f. e. m. alternata della rete di città profittando della eventuale presenza in questa della seconda armonica; poichè la curva della f. e. m. è ordinariamente simmetrica e manca perciò della seconda armonica e in generale di tutte quelle di posto pari. Per raggiungere l'intento nel modo più semplice ho ricorso al seguente ripiego:

La corrente alternata di città (42 periodi, 105 volt) traversata una lampada Z da 50 candele (fig. 2) passa per un rocchetto B in cui è introdotto un lungo fascio di fili di ferro; poscia si biforca tra una resistenza non induttiva R e un circuito derivato costituito da una grandissima autoinduzione S (secondario d'un piccolo rocchetto di Ruhmkorff) e da un galvanometro G per correnti continue (Hartmann e Bruan, tipo Deprez D'Arsonval). Con ciò, a causa della grande impedenza di S, il galvanometro viene percorso da una corrente alternata debolissima, che lascia l'equipaggio quasi

in quiete, specialmente se esso è alquanto pesante; rimangono solo dei lievissimi tremiti intorno allo zero. La presenza di una tenue componente continua della corrente, alla quale non è più d'ostacolo l'elevata induttanza di S, ma solo la sua resistenza ohmica, dove tosto rivelarsi con una deviazione permanente del galvanometro. E questa infatti si constata nettamente appena venga creata nel circuito la seconda armonica dell'onda fondamentale, ordinariamente mancante. Basta a tal fine inviare per mezzo del tasto t una corrrente continua nella bobinetta C che circonda l'altro estremo del

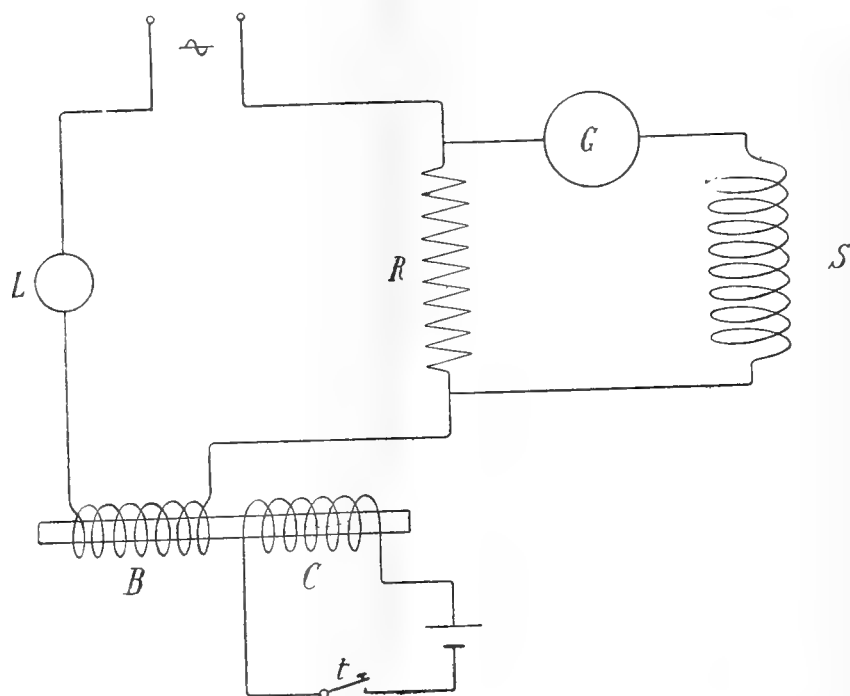



Fig. 2.

fascio di fili di ferro; e invero i cicli di magnetizzazione del ferro divengono con ciò dissimmetrici e questo crea una dissimmetrica nella f. e. m. agente agli estremi della lampada, dissimmetria che, com'è naturale, non produrrebbe alcuna componente di corrente continua in un circuito a resistenza costante. Nelle condizioni da me realizzate, pur essendo molto debole la seconda armonica introdotta nella f. e. m. di città, la componente di corrente continua che traversava l'intero circuito era di circa 1 milliampere, sopra 500 milliampere circa di corrente alternata; era quindi facilmente percepibile e misurabile, e restava ancora misurabile sostituendo alla lampadina a filamento metallico un'altra a filamento di carbone capace di assorbire la stessa potenza elettrica; nel qual caso però la deviazione segnata dal galvanometro s'invertiva e si riduceva ad un decimo. Anche senza la chiusura della corrente continua in C operata dal tasto t si ottengono talvolta delle de-

viazioni incostanti al galvanometro; esse son dovute evidentemente a eventuali dissimetrie create nelle due semionde della f. e. m. di città da particolari ricevitori disposti nella rete, come ad esempio dalle lampade ad arco.

Resta con ciò dimostrata la proprietà prevista dalla teoria; e i rilevanti effetti ottenuti che saranno molto intensificati accrescendo l'ampiezza della seconda armonica, lasciano sperare che la ricerca di cui è esposto il piano in questa Nota condurrà a risultati non privi d'interesse.

Fisica. — *Sul comportamento magneto-ottico di alcune linee spettrali.* Nota di Mario Tenani, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica-Chimica — *Su l'ottica dell'oro colloidale.* Nota di Luigi Rolla, presentata dal Corrispondente A. Garbasso [1].

1. Poichè i risultati sperimentali e le considerazioni teoriche fanno ritenere inaccettabile l'ipotesi secondo la quale le particelle dei metalli colloidali sono da considerarsi come risonatori [2], l'unica via per affrontare i problemi che nascono dallo studio ottico di questa categoria di *dispersoidi* rimane quella tracciata per la prima volta da Lord Rayleigh [3]. Generalizzando e mettendo sotto una nuova luce le formule del fisico inglese Mie [4] sviluppò una teoria che porta una grande chiarezza in queste ricerche, in modo da permettere le brillanti verificazioni sperimentali di Steubing [5].

Per semplicità egli ammise che le particelle siano sferiche, ma, per quanto malagevole per la grande complicazione delle formule che non sempre si presterebbero al calcolo numerico, la teoria potrebbe esser fatta anche nell'ipotesi che esse siano ellissoidiche o cilindriche, il che forse corrisponderebbe con maggior approssimazione ai resultati dell'esperienza. Un'onda

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova, diretto dal prof. Guido Pellizzari.

[2] Ehrenhaft, Annalen der Physik, XI, 489 (1903).

[3] Phil. Mag. (3) *41*, 107, 274, 447; (5) *12*, 81; *47*, 375.

[4] Annalen der Physik, XXV, 377 (1908).

[5] Ibid. XXVI, 329 (1908).

piana che si propaghi nel mezzo in cui sono sospesi i granuli, viene da questi in parte assorbita e in parte riflessa: l'assorbimento e la riflessione si possono calcolare in modo rigoroso.

E dalle formule che si ottengono, si deduce che la maggior parte della luce per esempio per l'oro va perduta nelle particelle (le quali assorbono massimamente nel verde), e il resto viene riflesso [il massimo del potere riflettente è nel rosso-giallo]. Ma le piccole particelle assorbono molto e riflettono poco; per quelle più grosse avviene il contrario. Le prime appaiono verdi nell'ultramicroscopio e le altre, aranciate; mentre il colloide è rispettivamente rosso e bleu.

L'oro violetto dovrebbe essere costituito dalla miscela dei due.

Ma un interessante conseguenza della teoria è che l'oro colloidale le cui particelle hanno un diametro inferiore ai 10 $\mu\mu$, ha un assorbimento caratteristico che dipende solo dalla concentrazione ossia dalla quantità del metallo sospeso, e non dal grado di *dispersione*. La legge di Beer, che per i colloidi ricchi di submicroni non è valida (¹), qui deve essere rigorosamente verificata.

E si mostra soprattutto interessante lo studiare lo stato di disgregazione limite per il quale l'ultramicroscopio non fornisce più alcun criterio sicuro sulla grandezza dei granuli, avvicinandosi il diametro di questi a quelli delle molecole.

La maggior parte dei colloidi inorganici e specialmente certi ossidi metallici può, secondo le ricerche di Biltz e Geibel (²) essere preparata in modo, da apparire quasi otticamente omogenea.

L'idrosolo di oro si può ottenere molto ricco di *amicroni*, e ciò è notevole perchè sta ad indicare che, trattandosi di un corpo con un potere rifrangente così grande, la suddivisione è estremamente spinta, e, secondo certe considerazioni di Zsigmondy (³) i granuli hanno delle dimensioni dell'ordine di 1 $\mu\mu$.

Anzi è riuscito a Zsigmondy (⁴) di preparare con un metodo ingegnoso, sebbene non esente da critica, questo idrosolo, e gradualmente, tutti gli altri con un grado meno alto di suddivisione.

2. I metodi per ottenere l'idrosolo di oro quasi esclusivamente amicronico, sono diversi, e intanto quello fondato su l'azione della gelatina sul cloruro d'oro merita uno studio accurato. Se si prende della gelatina gonfiata in acqua a 30°, e poi diluita fino al 0,5 %, 0,2 %, 0,1 %, 0,01 %, e si mescola con una soluzione diluita di cloruro d'oro, portando all'ebolli-

(¹) Scarpa, Kolloid Zeitschrift, 2, Suppl. II, L (1908).
(²) Gött. Nachrichten 2 (1906).
(³) Zeitschrift für Elektrochemie (1906) pag. 632.
(⁴) Ibid.

zione, per un certo tempo (circa 10 minuti) si nota il comparire e l'intensificarsi del colore rosso caratteristico dell'oro colloidale. Io ho stabilito che osservando all'ultramicroscopio la gelatina che servì a preparare questo colloide e poi il colloide stesso, si vede apparire un eguale cono luminoso e i pochi granuli che si possono discernere sono in egual numero, almeno approssimativamente.

Lo stesso accade aggiungendo alla miscela di gelatina e di cloruro d'oro un riduttore come la formalina. Dunque il sale prima d'essere ridotto è assorbito dai granuli (in grandissima parte *amicroni*) della gelatina, e ciò spiega perchè il colloide non è più precipitato dagli elettroliti nemmeno in fortissime concentrazioni, nè, per azione di questi, cambia colore. Non è più dunque possibile in questo caso la definizione del « numero d'oro ». Infatti per ottenere il colore violetto e bleu è necessario aggiungere un sale, (per es. $K_2 SO_4$) ed elettrolizzare il liquido per un certo tempo, che dipende dalla concentrazione del sale aggiunto, della gelatina (1), e dall' intensità della corrente.

Questi colloidi hanno bensì dei granuli piccolissimi, ma per essi non si possono verificare tutte le condizioni imposte dalla teoria.

Meglio, per questo scopo, seguire un'altro metodo per la preparazione dei liquidi da sottoporre alle varie misure, per esempio ridurre il cloruro d'oro con una sostanza appropriata.

Io ho utilizzato la glicerina. Questa, secondo che agisce in presenza di carbonato potassico o sola, dà un idrosolo meno o più ricco di *submicroni*, e il colore conseguentemente cambia con continuità. Il metodo conduce senz'altro allo scopo quando venga eseguito così: alla soluzione diluita di cloruro d'oro si aggiunge l'alcali e la glicerina, oppure la glicerina sola. Non è necessario raggiungere la temperatura di ebollizione per vedere il liquido assumere un colore che va man mano diventando più intenso. Spesso per le preparazioni contenenti poco alcali, si ha dapprima una colorazione azzurra che in pochi istanti passa al violetto rosso. La seguente tabella riassume i resultati ottenuti. La concentrazione fu sempre calcolata in modo che su 127 centimetri cubici di liquido 25 fossero di soluzione 6 ‰ di cloruro d'oro. La glicerina (soluzione al 20 % in volume) fu sempre messa nella quantità di 2 centimetri cubici. Il numero di questi si può del resto aumentare senza ottenere un cambiamento nell'idrosolo.

(1) Non esiste una relazione semplice tra la quantità percentuale di gelatina e la sua azione stabilizzante. Soluzioni colloidali ottenute con gelatina molto diluita [0,001 %] sentono l'azione degli elettroliti, ma quelle ottenute con gelatina sempre più concentrata a partire da un certo limite, [per es. 0,05 %] sono ugualmente stabili.

TABELLA I.

Num. d'ord.	cc. $K_2CO_3 \frac{N}{18}$	cc. H_2O	Colore
I	0,0	100	azzurro (per trasparenza)
II	1,0	99	azzurro (per trasparenza)
III	2,0	98	bleu violetto (per trasparenza)
IV	2,2	97,8	violetto
V	2,5	97,5	violetto
VI	3,0	97,0	rosso-violetto
VII	10,0	90,0	rosso
VIII	20,0	80,0	rosso
IX	50,0	50,0	rosso

La ricerca sistematica ultramicroscopica su questa serie di idrosoli fu eseguita con apparecchio Siedentopf e Zsigmondy fornitomi dalla casa Zeiss. La lampada ad arco per l'illuminazione veniva alimentata dalla corrente stradale a 110 volts mentre tre ohms di resistenza erano in circuito.

L'aspetto generale del cono luminoso a partire dall'idrosolo VI non varia, nemmeno nel IX nel quale pure non si riesce più a scorgere alcun granulo che spicchi sopra la striscia biancastra luminosa. Del resto i submicroni dei primi due sono numerosissimi, e ciò si riconosce anche ad occhio nudo osservando che il fenomeno di Tyndall si mostra in modo spiccatissimo. Questi due colloidi non sono molto stabili e dopo circa 40 ore lasciano deporre una parte dei granuli; i quali, all'ultramicroscopio appariscono, almeno nella massima parte, rossastri. Questa colorazione però si mantiene anche per quelle scarse particelle che si vedono, negli altri colloidi della serie, spiccare sul cono luminoso.

Le misure sono riportate nella tabella seguente, nella quale il « numero dei granuli » si riferisce appunto a queste particelle.

TABELLA II.

	Numero dei granuli per mm^3
I	4.10^7
II	2.10^7
III	5.10^5
IV	3.10^5
V	
VI	$9,3.10^4$
VII	$7,8.10^4$
VIII	2.10^4
IX	0

3. L'idrosolo IX si presta dunque egregiamente alla verifica di una delle conseguenze della teoria, giacchè per esso la legge di Beer deve essere rigorosamente valida. Infatti la presenza del cono luminoso rivela l'esistenza di un numero stragrande di *amicroni* (il cui diametro è al disotto di 10 $\mu\mu$).

Per assorbimento s'intende qui la diminuzione di intensità luminosa che subisce un fascio di raggi che attraversi lo strato di 1 millimetro di colloide. Collo spettrofotometro dunque fu misurato il rapporto $\frac{I}{I_0}$ della intensità, e il coefficiente di assorbimento calcolato colla relazione

$$I = I_0 \, 10^{-kx}$$

dove x è lo spessore in millimetri dello strato assorbente.

Lo spettrofotometro adoperato era del tipo Glans, fornito dalla ditta Schmidt e Haensch di Berlino [1]. Le misure furono eseguite con luce bianca e la sorgente luminosa era una lampada Nernst (110 volts, 1 ampère). I valori ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

TABELLA III.

	Strato assorbente 50 mm. Concentrazione 5.10^{-8} gr. di oro per mm^3	Strato: 100 mm. Conc. $2{,}5.10^{-8}$	Strato: 150 mm. Conc. $1{,}66.10^{-8}$
λ	K	k	k
650	0,0097	0,0090	0,0095
595	0,0239	0,0241	0,0243
550	0,0380	0,0380	0,0378
515	0,0320	0,0319	0,0316
488	0,0271	0,0278	0,0270
468	0,0237	0,0236	0,0235

Questi valori provano dunque che per questo idrosolo è valida la legge di Beer.

4. Ma le misure ultramicroscopiche sopra riferite suggeriscono delle ricerche spettrofotometriche a fine di stabilire delle relazioni quantitative tra la variazione graduale del colore e il rapporto tra il numero di amicroni e quello dei submicroni. Ma per far ciò bisogna ammettere alcune ipotesi che non si possono verificare direttamente. Ipotesi di questo genere sono del resto sempre accettate quando si fa la determinazione del diametro dei granuli.

[1] Debbo ringraziare il prof. Barlocco direttore del Laboratorio di chimica clinica presso la R. Clinica medica dell'Università, per avermi messo gentilmente a disposizione questo apparecchio.

Dobbiamo dunque ammettere che, o tutto il cloruro passa allo stato di granulo colloidale (amicrone o submicrone), riducendosi, oppure il rapporto tra la concentrazione dell'oro sospeso e quella dell'oro molecolare sia costante nei varî idrosoli considerati. Allora, essendo in questi la concentrazione complessiva sempre costante, la variazione dell'assorbimento per le varie lunghezze d'onda dipenderà dal rapporto fra l'oro amicronico e quello submicronico. Che poi l'ipotesi fatta possa essere senza difficoltà accettata, si deduce dalla stessa osservazione ultramicroscopica. A parità d'intensità luminosa tutti gl'idrosoli della serie che va da VI a IX non hanno, come è già stato riferito più sopra, delle differenze apprezzabili nel cono luminoso nel quale i submicroni sono relativamente pochissimi e il loro numero varia di poco.

Le misure, data la cura grande che richiedono, furono ristrette ai colloidi II, IV, VI, IX, e sono riferite nella tabella seguente:

Tabella IV.

λ	II	IV	VI	IX
650	0,0291	0,0240	0,0197	0,0097
595	0,0343	0,0295	0,0299	0,0239
550	0,0386	0,0378	0,0374	0,0380
515	0,0297	0,0313	0,0303	0,0320
488	0,0260	0,0272	0,0269	0,0271
468	0,0202	0,0202	0,0240	0,0237

Se noi consideriamo l'assorbimento nel rosso (per es. $\lambda = 650$) si vede, riportandoci alla Tabella II che la k diminuisce al crescere degli amicroni. L'oro violetto è dunque una miscela di bleu e di rosso, e il metodo di preparazione proposto dà modo di studiare tutta la serie di tinte intermedie.

Le esperienze riassunte in questa Nota vengono continuate ed estese: in altro luogo verranno pubblicate insieme con alcune considerazioni teoriche [1].

Chimica. — *Un apparecchio di laboratorio, per la preparazione del fluoro.* Nota di Gino Gallo, presentata dal Socio E. Paternò.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Nelle misure assai faticose fui efficacemente aiutato con zelo ed intelligenza dal mio amico ing. Riccardo Massone, e dai signori Belladen e Gaiter laureandi in chimica. A tutti vada l'espressione dei miei più sentiti ringraziamenti.

Chimica. — *Sulla condensazione dell'azo-immide con l'acido fulminico.* Nota del dott. F. Carlo Palazzo, presentata dal Corrispondente A. Peratoner.

Chimica. — *Sul comportamento crioscopico reciproco di sostanze differenti fra loro per i gruppi* — CO — e — CH_2 —. Nota di L. Mascarelli e I. Musatty, presentata dal Socio G. Ciamician.

Chimica. — *Di una nuova serie di ammoniacati solubili.* Nota di G. Poma, presentata dal Socio G. Ciamician.

Le Note precedenti saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Patologia vegetale. — *Sui caratteri morfologici ed anatomici del Roncet delle viti americane in Sicilia.* Nota di E. Pantanelli, presentata dal Socio G. Cuboni.

È indispensabile precisare i caratteri esteriori ed interni della malattia che ho studiato nel triennio 1907-08-09 per incarico del Ministero di Agricoltura, presso il R. Vivaio di Noto (Siracusa) e la R. Stazione di Patologia vegetale di Roma, per non commettere l'errore in cui pare siano caduti precedenti autori, i quali hanno confuso col nome di Roncet la malattia stessa ed altre affezioni od alterazioni, che spesso l'accompagnano.

Viala [1] ha adottato il termine borgognone di *Roncet* in base alle alterazioni di sviluppo, che dànno alla vite l'aspetto di rovo (*ronce*), e i caratteri esteriori che egli descrive, si ritrovano anche nel Roncet di Sicilia. Però egli non accenna alla presenza di macchie scolorate sulle foglie, anzi dice che « queste conservano sempre la loro tinta verde e sembrano più spesse delle foglie normali ». Inoltre parla di zone di alterazione brunastre o ne-

[1] *Maladies de la vigne*, 3ª ediz., 1893, pp. 422-423. Fu in base alla descrizione di Viala che Ruggeri riconobbe per il primo il Roncet in Sicilia: Viticoltura moderna, II, settembre 1895.

rastre nelle spalle e nei fusti, la cui presenza, come vedremo, è indipendente dal Roncet.

Tuttavia la descrizione di Viala è così superficiale — e va poco d'accordo con l'annessa figura — che le macule pallide delle foglie potrebbero essere state omesse; bisogna anche considerare che egli si riferisce a viti europee, sulle quali la malattia dovrebbe coincidere con quella che era già conosciuta anche in Italia col nome di *arricciamento* (*barbère risse* dei Piemontesi, *viti réuse* dei Siciliani). In Ravaz [1] invece troviamo un'accurata descrizione della malattia, che riguarda tanto le viti europee come le viti americane. Egli però preferisce chiamarla *court-noué*, vecchio nome col quale era già stata descritta in Francia fino dal 1860. Tutti i caratteri che Ravaz riporta si ritrovano nel Roncet di Sicilia, e così anche le diverse sorta di macchie scolorate sulle foglie e le escorazioni, brunastre (gerçures) su tralci teneri (a struttura primaria), sui picciuoli, peduncoli fiorali, sulle nervature principali, che sono dovute a causa indipendente dal Roncet.

Una malattia analoga si è più tardi diffusa in Austria, sopra tutto nei vigneti ricostituiti su piede americano, col nome di *Kümmern* o *Krautern*. Giudicando dalle illustrazioni pubblicate da Krasser alcuni anni sono [2], parrebbe che si trattasse di Roncet vero e proprio, ma in ulteriori pubblicazioni Krasser [3] tiene distinte le due malattie, perchè nelle viti affette da Krautern le foglie, pur avendo le insenature più profonde delle normali, non sono mai così dentellate e laciniate come sui ceppi colpiti da Roncet. Krasser però confronta a questo proposito una vite europea (*Veltliner grün*) affetta da Krautern con una vite americana colpita da Roncet, il *Solonis*, che per l'appunto anche normalmente ha la foglia molto laciniata e dentellata. Ora, Silva ha indicato [4] per l'isola d'Elba ed io ho osservato in Sicilia sopra un abbondante materiale che il Roncet sulla maggior parte delle viti europee (innestate) non porta, salvo casi di un'estrema gravità, ad una laciniatura così profonda della foglia come sulle viti americane. Un altro carattere differenziale consisterebbe secondo Krasser nel passaggio graduale dalle piante malate di Krautern ai ceppi sani, ma anche questo fatto si osserva nel Roncet di Sicilia.

Del resto Krasser per la descrizione del Roncet si riporta alle pubblicazioni degli autori italiani, fra le quali per la parte descrittiva emer-

[1] *Le court-noué*, Ann. École Nat. Agric., Montpellier, vol. XI, 1900, pp. 294-312.

[2] *Ueber eine eigentümliche Erkrankung der Weinstöcke*, Jahresb. Verein. f. angew. Botanik, Bd. II, (1905), pp. 73-84. Le figure sono di *Veltliner grün* innestato su *Solonis*. Oltre questo, Krasser citava allora il *Gamay Couderc* (*Colombeau Rupestris* 3103) e l'*Aramon Rupestris* Ganzin n. 1 come portainnesti facili a *Krautern*.

[3] *Neuere Untersuchungen über die physiologischen Krankheiten des Weinstockes und deren Bekämpfung*. Relaz. al Congresso Internaz. Agrario di Vienna 1907, Sez. X, Ref. 3, pag. 13.

[4] *Sulla malattia del Roncet*, Boll. Uff. Minist. Agric., a. 1906, vol. VI, pag. 373

gono quelle di Ruggeri [1], Briosi [2], Silva [3] e Schiff-Giorgini [4]. Da esse risulta che alcuni caratteri del Roncet si ritrovano in tutti i luoghi, mentre altri parrebbero localizzati in determinate contrade. I nostri autori sono unanimi nel descrivere le deformazioni delle foglie, laciniate, a denti molto acuti, bollose; la brevità degli internodii; le frequenti anomalie nello sviluppo dei tralci (dicotomie, cladomanie); la facile colatura o caduta dei fiori. Ma sulla presenza di maculature di un verde più pallido o trasparenti sulle foglie, di scorticature sui diversi organi teneri, che Ravaz ha descritto con tanta cura, i nostri autori non sono d'accordo.

Silva dice che la foglia colpita da Roncet si conserva verde; anche Viala non aveva accennato a maculature di nessuna sorta. Briosi invece ha visto a Noto macule trasparenti sulle foglie, con un puntino nericcio, attorno a cui il mesofillo si arresta nello sviluppo e la lamina fogliare diviene più o meno asimmetrica, ma non pare che abbia osservato qualcosa di simile negli altri luoghi di Sicilia da lui visitati.

Schiff-Giorgini descrive come carattere costante delle foglie roncettate la presenza di macchie trasparenti, « in cui il tessuto a palizzata manca per considerevoli estensioni ed è sostituito da un parenchima a cellule tondeggianti », e non accenna affatto a tessuti imbruniti. Invece Ravaz (pag. 309) dice che « il parenchima nelle piccole macchie bianche è sprovvisto di clorofilla, ma contiene sempre isolotti di cellule morte, che occupano lo spugnoso o il palizzata. Il contenuto è più o meno bruno. Vi si vedono i cloroplasti deformati o distrutti. L'epidermide inferiore è colpita come la superiore; gli stomi sono danneggiati come le cellule epidermiche vicine. Le cellule circostanti ai punti morti proliferano, e si allungano tendendo ad isolarli con placche suberose. Queste costituiscono le gerçures... ». È da notarsi che Ravaz ha trovato una quantità di lesioni interne anche in tutti gli altri organi teneri oltre le foglie, perfino nelle gemme non ancora schiuse, di cui io non ho mai potuto trovar traccia nella malattia di Sicilia.

Tolto questo punto, la descrizione di Ravaz si attaglia ad essa meglio di ogni altra, tanto più che le scorticature, secondo lo stesso Ravaz, non erano costanti nella malattia da lui descritta. Nel Roncet di Sicilia tanto le erosioni (imbrunite) più o meno superficiali sui tralci, peduncoli fiorali, viticci, picciòli, costole fogliari, quanto le macchiette circolari, pallide, con un punto nero al centro, visibili meglio sulla pagina inferiore, non sempre

(1) Roncet, Boll. di Notizie agrarie, vol. XXIII, 1901, pag. 1330; Viticoltura moderna, vol. IX, 1902, pag. 69.

(2) *Intorno alla malattia del Roncet*, Boll. Uff. Minist. Agric., a. 1902, vol. I, pag. 1167; *Ispezione ad alcuni vivai... malati di Roncet in Sicilia.* Ibidem a. 1905, vol. II, pag. 515.

(3) Loc. cit.; inoltre: Boll. Uff. Minist. Agric., a. 1905, vol. I, pp. 90-95.

(4) *Il Roncet delle viti americane in Sicilia,* Ibidem., a. 1906, vol. VI, pag. 971.

si trovano ed appartengono, come le lesioni interne di cui parla Ravaz, ad altre affezioni da non confondersi col Roncet.

Quanto alle macule trasparenti, dovute a mancata differenziazione del palizzata, a cui accenna Schiff, esse esistono realmente sulle foglie della maggior parte delle viti roncettate che io ho potuto osservare a Noto, Siracusa, Biscari, Vittoria, Palermo, Marsala, ma possono anche mancare. Così nel vivaio di Noto esiste un appezzamento di *Rupestris du Lot* innestata da 10 anni su *Rupestris* diverse da seme ed ormai in gran parte affrancata, in cui, soprattutto all'ombra di grandi alberi che lo costeggiano, le viti malate di Roncet — e lo sono quasi tutte — hanno foglie tipicamente laciniate e dentellate, deformi, ma senza portare la minima macchia trasparente fin dal primo sviluppo. Ciò prova che anche la presenza nella foglia di macule pallide per trasparenza, ma senza traccia di abrasione o necrosi dei tessuti, non è un carattere essenziale del nostro Roncet, sebbene spesso lo si osservi, come già avevano notato Ruggeri, Paulsen [1] e Jàcono [2].

Un'altra alterazione compresa a torto nel Roncet è la presenza di vasi gommosi o tillosi nel legno delle spalle e dei ceppi. Ad alcuni autori (Briosi, 1902) era sembrato che il legno delle viti malate contenesse maggior copia di vasi ostruiti da tilli o da gomma, e ciò avrebbe giovato a far confondere il Roncet col Mal nero, con la Gélivure, con la malattia d'Oléron, del Varo, con la gommosi bacillare. Però in tutte queste malattie sono presenti nei vasi bacterii, ai quali è stata attribuita con più o meno ragione la malattia stessa, mentre essi mancano nei ceppi affètti da Roncet, e nel Mal nero, come Briosi stesso (1905) e Schiff-Giorgini hanno giustamente rilevato « si ha una lesione caratteristica, ben visibile, che manca sempre nel Roncet, mentre non vi si riscontra la caratteristica deformazione delle foglie, che del Roncet stesso è propria. La lesione caratteristica del Mal nero consiste in speciali zone di annerimento dei tralci, scorrenti linearmente da un nodo all'altro. Col progredire della malattia il tessuto annerito cade in necrosi, si disfà, per cui si hanno delle vere fessure, che decorrono lungo l'internodio. La malattia si sviluppa di preferenza nei tralci ben lignificati, per cui sono specialmente colpiti i tralci di oltre due anni » [3].

Nel legno di più di un anno delle viti colpite da Roncet si trovano frequenti i vasi gommosi e tillosi, ma, come nelle viti sane, essi stanno in relazione con le ferite di potatura, in quanto i vasi aperti dal taglio si riempiono di tilli oppure di gommorèsina proveniente dalle cellule adiacenti del parenchima del legno. Anche questo fatto non è dunque proprio delle viti malate, sebbene spesso sia più saliente presso di esse, perchè la pota-

[1] Supplem. al Boll. Uff. Minist. Agric., a. 1908, vol. III, pag. 1247.

[2] *Sulla degenerazione delle viti americane* (Roncet), Palermo, F. Lugàro, 1906.

[3] Loc. cit., pag. 976.

tura dei numerosi tralcetti roncettati che spuntano dalla testa del ceppo ricopre questa regione di piaghe più numerose ed estese che sui ceppi sani.

Eliminate così le alterazioni che non appartengono al Roncet in Sicilia, riassumo i caratteri morfologici essenziali della malattia su cui hanno vòlto le mie ricerche:

Caratteri costanti: *foglie* più piccole delle normali, meno consistenti, rapporti di lunghezza e di apertura fra la nervatura mediana e le nervature laterali diversi ed irregolari, seno picciolare più aperto, profonde insenature laterali, denti acuminati e spesso storti, lamina ridotta rispetto alle nervature;

picciòli più brevi e più sottili dei normali;

internodii molto più brevi e più sottili dei normali (court-noué);

grappoli portano meno fiori dei normali e tutte le loro parti sono più piccole;

femminelle si sviluppano di pari passo col tralcio padre (roncet).

Caratteri oscillanti: *foglie* hanno la lamina maculata in chiaro, per la presenza di aree pallide per trasparenza, leggermente bronzine a luce riflessa, più o meno nettamente delimitate da nervature di ordine vario, come nell'albinismo, o nel *mosaico* del tabacco;

viticci deformati, o trasformati in grappoli, o in rametti (raro);

fiori schiacciati su peduncoli e rachide appiattiti (raro);

tralci ramificati a forca (dicótomi) per sviluppo contemporaneo di ambo le gemme ascellari o per trasformazione di viticci in rami;

nodi rigonfiati.

Cornetti, spalle, ceppi, radici non mostrano alterazioni esteriori.

Quanto alle alterazioni anatomiche, vi si trova solo il disturbo nella differenziazione dei tessuti fogliari in corrispondenza delle aree pallide. Le cellule del palizzata in questi punti non sono morte, ma contengono pochi cloroplasti, poveri o privi di clorofilla, deformati, vacuolizzati; anche lo spugnoso contiene pochi cloroplasti. Siccome le cellule del tessuto a palizzata rimangono basse, in questi punti lo spessore della foglia è minore. Del resto anche le due epidermidi hanno cellule più piccole e gli intercellulari quasi mancano (cfr. fig. 1 e 2).

Questo complesso di alterazioni, a cui conserveremo il nome di *Roncet*, non essendo per ora prudente tradurlo con la nostra parola *arricciamento*, con la quale era già indicata una malattia esteriormente simile delle viti nostrali, si presenta nella forma *tipica* sulle *Rupestris*, specialmente sulla *R. du Lot*, volgarmente detta *R. monticola* [1], inoltre sulle diverse schiatte

[1] Cfr. Mazade, Révue de vitic., vol. I (1894), pag. 239; secondo Ravaz, *Les vignes américaines*, 1904, pag. 109, la *R. du Lot* sarebbe un ibrido di *Rupestris*, ma non con *Monticola*, come ritiene Couderc, bensì con un'altra specie ancora sconosciuta.

di *R. metallica*, sulle *R.* selezionate da seme parecchi anni addietro, ecc. La *V. Rupestris* è la specie più sofferente.

Sopra altri vitigni americani la malattia assume aspetto un po' diverso da quello descritto.

Un tipo ben diverso di Roncet è quello delle *V. Berlandieri*. A Noto ho avuto campo di studiarlo su vasti appezzamenti di *Berlandieri Resseguier* N. 2 e N. 1, quest'ultimo colà molto più sofferente del primo. I caratteri del Roncet nelle *Berlandieri* sono:

Foglie con insenature non molto profonde, ma irregolari; denti non acuminati, ma irregolarmente sporgenti, contorti. Massimo disordine nelle

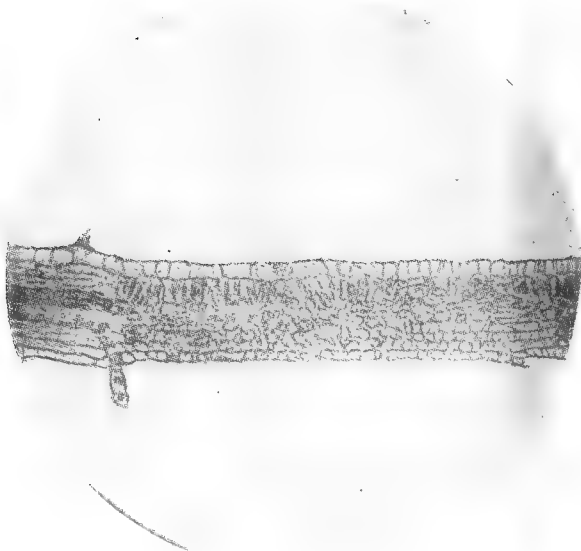



Fig. 1.
Giovane foglia malata di *Rupestris du Lot*; sezione attraverso un'area pallida. Ingr. 92.

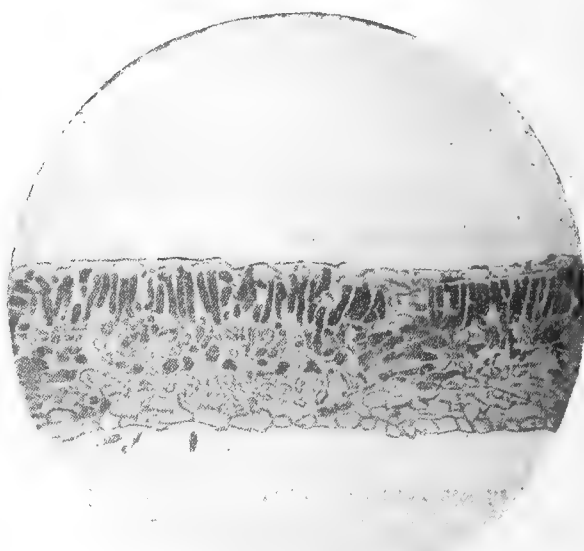



Fig. 2.
La medesima foglia; sezione attraverso una area normalmente verde. Ingr. 92.

nervature, abnormi per direzione, ramificazione, lunghezza e spessore. Lamina ridotta, bollosa fra le nervature, di un verde più chiaro e mascherato da sostanze giallo-brune o da chiazze di antociano allo stato giovanile, di un verde più cupo del normale allo stato adulto. Macule trasparenti verde-chiaro, non bianche, molto estese, irregolari, non delimitate nettamente.

Viticci grossi e lunghi; *internodii* corti; *nodi* ingrossati; dico- e tricotomie frequenti; *femminelle* molto sviluppate. Deformazioni molto più forti sulle femminelle che sul tralcio.

Grappoli rachitici, spesso trasformati in viticci o viceversa.

Sulle *V. Riparia* (*Martinaud* o *Gloire, Grand Glabre, Tomentosa* da seme) il Roncet si accosta al tipo *Rupestris* per le profonde laciniature, ma per il forte rachitismo di tralci ricorda più il tipo *Berlandieri*.

Un terzo tipo che si scosta notevolmente dai due precedenti si osserva sulle *V. vinifera*, innestate su piede americano malato, ma varia molto a seconda dei vitigni e della gravità del male. Nelle viti europee a foglia molto frastagliata il Roncet è simile a quello dell'*Aramon* et *Rupestris* e di altri ibridi *Vinifera* et *Rupestris*, però le deformazioni possono essere più o meno pronunciate, le macchie trasparenti più spesso mancano, o sono assai limitate. Il rachitismo non è molto forte, sono frequenti invece le dicotomie, fasciazioni e torsioni dei tralci, le irregolarità nello sviluppo dei lobi fogliari e delle nervature. Ho visto questa forma di Roncet su *Vernaccia*, *Albanello*, *Inzolia* in Sicilia, su *Biancone* all'Elba.

Nelle viti europee con foglia poco frastagliata troviamo invece un Roncet che si avvicina al tipo *Berlandieri*, con foglie bollose, non molto laciniate, poco o niente maculate, internodii molto brevi, nodi rigonfii, dicotomie, fasciazioni, torsioni. Caratteristica questa forma è nel *Frappato* di Vittoria, uel *Moscato* di Siracusa ecc.

Il rachitismo dei tralci e gli arresti di sviluppo nelle diverse parti delle infiorescenze variano a seconda della gravità della malattia.

Interessante è il portamento degli *ibridi*. La misura delle alterazioni di forma dei diversi organi in accrescimento ha mostrato, che negli ibridi le alterazioni sono la resultante delle proprietà morfogene del padre e della madre, fuse nella proporzione stessa in cui avvenne la fusione dell'idioplasma di ambedue al momento della fecondazione. Così il Roncet dell'*Aramon Rupestris* per alcuni caratteri appartiene al tipo *Vinifera*, per altri al tipo *Rupestris*; nel *Berlandieri Riparia* 420 A, il Roncet ricorda tanto quello della *Berlandieri* come quello della *Riparia*, con prevalenza del primo tipo, mentre nella *Rupestris Berlandieri* 1737 i caratteri del Roncet tipo *Rupestris* hanno una leggera prevalenza su quelli del tipo *Berlandieri*. Per dare altri esempî di vitigni ben noti, il *Solonis* ha un Roncet molto simile a quello delle *Riparia* tomentose, da cui certo discende in parte [1], e l'ibrido produttore diretto 132-11 di Couderc documenta allo stato malato la sua parziale origine da *Rupestris*.

Questo fatto, che si verifica rigorosamente per qualunque ibrido, basterebbe per provare, che la causa determinante il Roncet agisce durante il primo sviluppo delle gemme, quando l'attività morfogena è regolata prevalentemente « dall'accordo auxonomico ereditario » come si suol dire in fisiologia vegetale.

Il carattere autonomo di queste alterazioni risulta anche dal fatto seguente. Nelle viti innestate il Roncet compare con gli stessi caratteri come nello stesso vitigno franco di piede. Così il *Biancone* dell'Elba, innestato su diversi vitigni americani malati, ha lo stesso aspetto, a detta dei viti-

(1) Cfr. Ravaz, *Les vignes américaines*, 1904, pag. 318.

cultori locali [1], che aveva il *Biancone* affètto da *ricciolatura* (arricciamento) prima dell'introduzione delle viti americane e dell'invasione fillosserica. Nel R. Vivaio di Noto si verifica lo stesso fatto per la *Rup. du Lot* franca di piede o innestata su diverse *Riparia* o *Rupestris* da seme, per un gran numero di vitigni locali innestati su *Mourvèdre Rupestris* 1202, su *Rupestris Berlandieri* 1737, su *Berlandieri Riparia* 420 A, per il *Berlandieri Ress.* N. 2 innestato su *Solonis* ecc.

Le alterazioni di forma che nel loro complèsso costituiscono il Roncet non compaiono improvvisamente in tutta la loro intensità; il primo sintomo è una laciniatura più profonda delle prime foglie, le quali però raggiungono la grandezza normale. Il *court-noué*, cioè la brevità degli internodî, è uno stadio ulteriore. Le aree pallide sulle foglie giovani compaiono per ultime, sopra viti che già da qualche anno sono malate.

Tali fatti ho potuto osservare più agevolmente sui nuovi impianti che sulle viti madri già esistenti quando cominciai lo studio, per ragioni facili a comprendersi.

L'alterazione progredisce lentamente sopra ogni ceppo, perchè ogni anno l'effetto della causa deformante attuale *si somma* con la deformazione indotta nelle gemme l'anno precedente, e ciò per colpa del sistema di potatura ad alberello, che generalmente è in uso in Sicilia. Infatti il potatore rispetta proprio quelle gemme basali che, essendosi sviluppate all'ascella di foglie malate o, se si vuole, da nodi malati, portano in sè alterate le capacità morfogene, e taglia via tutto il resto del tralcio, che probabilmente era risanato, come per lo più accade in estate. Basta questo accenno per mostrare quanta importanza per il Roncet abbia il sistema di potatura, e in una prossima Nota vedremo i risultati delle mie esperienze a questo riguardo.

Agronomia. — *Azione caolinizzante delle radici sulle rocce laviche romane.* Nota di G. de Angelis d'Ossat, presentata dal Socio R. Pirotta.

Dopo avere teoricamente indicato, con varî scritti, il processo per il quale le rocce delle provincie di Roma e di Perugia si trasformano in terreno agrario, sono passato nel campo sperimentale allo scopo di valutare numericamente la capacità di certe forze sulle rocce ed il grado di talune attitudini agrarie dei terreni. Ho già eseguito, secondo questa direttiva, parecchie esperienze, ed altre sono in corso: tutte però sono collegate al fine di ottenere una conoscenza completa del terreno agrario per ciò che riguarda la parte inorganica.

[1] Comunicazione verbale. Cfr. Silva, Bull. Uff. Minist. Agric. 1906, vol. VI, pag. 373.

Presentemente rendo conto di una semplice esperienza; ma di un notevole valore pratico.

Si trattava, in tesi generale, di riconoscere il quantitativo di caolinizzazione prodotto dalle radici, lungo il corso di un anno solare, sulle rocce che costituiscono il nostro sottosuolo. A tale fine si scelse la lava, come la roccia più difficilmente riducibile a terreno agrario, e si prescelse quella di Capo di Bove (Appia Antica), perchè più conosciuta dal punto di vista petrografico e chimico [1] e perchè di composizione e di struttura quasi uguali al maggior numero delle nostre colate laviche.

L'argomento non è del tutto nuovo; esso fu trattato vagamente da molti, come: Gazzeri, Taddei, Ridolfi, Dietrich, Sachs e particolarmente da Sestini, ecc. Non conosco però esperienze ed osservazioni che riguardino le nostre rocce.

L'esperienza fu così condotta.

Si pestarono parecchi frammenti freschissimi della lava di Capo di Bove (*Leucitite*) ed il materiale venne separato con stacci, ottenendone tre gradazioni di grani dalle seguenti dimensioni:

Diametro circa mm. 2,
" " " 1,
" " " 0,8.

Delle tre qualità si presero tre parti pressochè uguali e si mescolarono. Il tutto fu ripetutamente lavato con acqua distillata sino ad ottenere questa limpidissima.

La massa poi fu divisa in due vasi; uno di vetro e l'altro di terracotta. Quest'ultimo, riconosciuto ben cotto, fu levigato con cura ed immerso in acqua acidula, per acido cloridrico, sino a terminata effervescenza. Prima di ricevere la sabbia ebbe accuratamente verniciati il bordo dell'orlo superiore e dei fori inferiori, i quali poi furono tappati con vetro filato.

Il 31 marzo 1908 nel vaso di terracotta, così preparato, fu posta la sabbia, nella quale fu seminato fiorume di prato (Graminacee e Leguminose). Da quel giorno sino al successivo 31 marzo 1909 i due vasi vennero periodicamente, due volte nella settimana, adacquati con acqua distillata. L'adacquamento fu sempre così misurato da non fare uscire acqua dai vasi, pur bagnando tutta la massa.

I due vasi furono posti sopra un elevato gradino, appoggiato ad un muro e sotto al cornicione in una terrazza del palazzo della Sapienza di Roma. La parete guarda a settentrione. A riparo per le piovane, si sovrappose, a giusta distanza, uno schermo di legno sufficientemente sporgente.

[1] Lo studio petrografico fu eseguito da Fleuriau de Bellevue, Fouqué e Michel Lévy, Strüver, Sabatini, ecc.; l'analisi chimica devesi a Bunsen, Washington, ecc.

Le pianticelle germogliarono facilmente e generalmente prosperarono molto bene: solo nel sommo dell'estate e dell'inverno soffrirono un poco. Le radici però si svilupparono più abbondanti e più robuste fra il vaso ed il materiale lavico che non entro questo; anzi nel centro della superficie esse rimasero specialmente in alto. In altri termini: non tutta la massa sabbiosa, per quanto fosse stata appositamente tenuta di poco spessore, fu investita dalle radici.

Dopo un intero anno solare di esperimento, sottoposi le due sabbie all'analisi, ottenendone, con i metodi più accurati, i seguenti risultati, che riporto con quelli avuti dal Sestini [1] sulla sabbia del granito elbano e tutti riferiti ad un kg. di sabbia.

Kg. 1 di sabbia		lavica		granitica (Sestini)	
		senza piante	con piante	senza piante	con piante
Terra fine, seccata a 110° C.	gr.	55,10	96,90	14,97	33,50
Argilla	»	tr.	2,029	0,157	1,326

La terra fine fu separata con uno staccio dalle maglie quadrate di lato $^1/_4$ mm.; questa fu poi liberata dall'argilla, mediante ben cinque decantazioni successive ad intervalli di 24 ore. Nella terra fine del vaso senza piante non era contenuta argilla in quantità apprezzabile, data l'esposizione del vaso all'aria libera.

Nella terra fine, specialmente del vaso con piante, l'acido cloridrico vi risveglia una sensibile effervescenza, mentre questa mancava nella sabbia prima dell'esperienza. Evidentemente la calce si separò dai composti, non potendosi attribuire l'effervescenza alla presenza della calcite secondaria che spesso s'infiltra fra gli elementi mineralogici della lava. Del resto pure tale carbonato deriva da segregazione della stessa roccia. Questa osservazione è importante per la deficienza quasi assoluta della calce facilmente solubile nelle terre di natura vulcanica.

I nuovi risultati, come emerge all'evidenza dai numeri, sono diversi da quelli riferiti dal Sestini, il quale peraltro esperimentò per un periodo di tempo più breve. La differenza poi è pur spiegata dalla facilità d'attacco maggiore nella leucite che non nel feldspato del granito elbano. La leucite poi nella lava di Capo di Bove essendo minutissima, non oltrepassando che raramente i 100 μ., presenta una larghissima superficie d'attacco.

L'esperienza presente dimostra, con tutta sicurezza, che la vegetazione aumenta di molto la disgregazione non solo dei feldspati (più di quattro volte

[1] Sestini F., *Azione caolinizzante delle radici sulle rocce granitiche*. Atti Società Tosc. Sc. nat. Proc. verb., vol. XI. Pisa, 1897.

la naturale), ma pure della leucite (in proporzioni maggiori) che costituisce quasi essenzialmente la leucitite di Capo di Bove. *A fortiori* ed in maggiore quantità adunque saranno caolinizzate dalla vegetazione le altre nostre rocce vulcaniche per le condizioni fisiche più favorevoli al disfacimento.

È risaputo che le piante assorbono ed assimilano le basi alcaline e gli altri ingredienti minerali atti alla nutrizione e lasciano nel terreno il silicato alluminico idrato (*caolino*). Ora, dalla conoscenza dell'argilla prodotta, si può facilmente risalire (con una certa approssimazione, perchè si trascurano gli altri minerali del resto difficilmente decomponibili) ed apprezzare la quantità di leucite decomposta ed il relativo peso delle basi alcaline, che la più avara delle nostre rocce può mettere a disposizione della vegetazione durante un anno solare [1]. Da questo punto dovranno muovere coloro che si propongono trattare le nostre rocce leucitiche come concime potassico [2].

Per l'intima analogia litologica i risultati presenti integrano gli studî eseguiti sulle lave Vesuviane. Rimangono infatti chiariti i mutamenti meccanici, fisici e chimici constatati ed illustrati dal Comes [3], dal Casoria [4] ecc. Non altrimenti si giunge al concetto concreto della *ricchezza* e della *potenza* di un terreno agrario e del suo ciclo delle trasformazioni che si avvicenderanno. Solo con questo riguardo, i nominati dati potranno entrare positivamente a far parte nel bilancio del *capitale terra*.

Il modo con cui si svilupparono le radici nel mezzo del vaso, rispecchia perfettamente ciò che avviene in natura, nelle nostre terre, quando manca il terreno agrario e quando la roccia affiorante è permeabile, ciò che si verifica da noi specialmente per i tre ben distinti livelli di pozzolana. In questi casi, per ottenere la formazione del terreno agrario, sempre ragionando delle attitudini minerali, si dovrà intensificare la vegetazione, allo scopo di abbreviare notevolmente il tempo lunghissimo che impiegherebbe la natura, coadiuvando l'opera di redenzione agraria la più favorevole struttura della roccia clastica. Si raggiungerà poi sicuramente e con sollecitudine lo scopo se si ricorrerà alla *marnatura* [5], la quale non solo conferirà al terreno eccellenti attitudini fisiche; ma apporterà ad esso la calce di cui difetta ed aumenterà il quantitativo di anidride fosforica.

[1] La leucite, per questi calcoli, può ritenersi composta delle seguenti parti centesimali: Silice 55, Allumina 23,5 e Potassa 21,5. Altrove segnalai l'utilità che può derivare alla vegetazione dalla relativa silice solubile libera.

[2] Le esperienze del Giglioli aprirono la via a questa applicazione. Si conoscono ora vari brevetti in proposito.

[3] Comes O., *Le lave, il terreno vesuviano e la loro vegetazione*. Napoli, 1887.

[4] Casoria E., *Mutamenti chimici che avvengono nelle lave vesuviane per effetto degli agenti esterni e della vegetazione*. Napoli, 1888.

[5] Le marne, provviste di calce e di anidride fosforica, sono abbondanti in molte località dell'Agro. Per questo motivo si può ritenere, *a priori*, che l'emendamento sarà pure economico.

Biologia. — *Alcune osservazioni sulla presenza di Leishmanie nei cani* [1]. Nota preliminare di Carlo Basile, presentata dal Socio B. Grassi.

Dopo le prime molto interessanti pubblicazioni del prof. Umberto Gabbi, riguardanti la forma morbosa da lui definita Kala-Azar e trovata in Calabria e in Sicilia, per incarico del mio Maestro, prof. Battista Grassi [2], mi recai a Bordonaro, piccolo villaggio presso Messina, ove lo stesso prof. Gabbi ci aveva additato un focolaio endemico di tale malattia, e presi in esame i cani, ai quali, già da qualche tempo, il Nicolle tendeva far risalire l'origine del Kala-Azar.

In 33 cani di Bordonaro che vivevano in parte nelle abitazioni degli infermi studiati dal prof. Gabbi, ed in parte nelle abitazioni vicine, eseguii la trapanazione del femore. Del sangue, che così estrassi dal midollo osseo, feci preparati per strisciamento, che, dopo averli fissati in alcool assoluto, colorai coi metodi del Giemsa e del Laveran-Borrel.

Su questi 33 cani ne riscontrai 27 infetti di corpi, i quali, nello stato attuale delle nostre conoscenze, non possono distinguersi da quelli del Kala-Azar indiano, che ho potuto studiare nei preparati gentilmente inviati dal Patton al mio Maestro e che perciò denominerò forme di Leishman (Leishmanie). Uno dei suddetti cani uccisi col cloroformio, per poterne studiare, con sezioni, la milza ed il midollo osseo. Esso apparteneva alla famiglia di F. G. (caso III del lavoro del prof. Gabbi) e, a parere dei proprietarî, nulla aveva mai sofferto; stava nella loro casa da due anni e soltanto da un anno la bambina si era ammalata. Questo cane, di media taglia, mostrò all'autopsia milza ingrandita (cm. 21 di lunghezza; cm. 4-6 di larghezza). Come già i preparati ottenuti per strisciamento del sangue estratto colla trapanazione del femore, così anche le sezioni di midollo osseo e di milza, mi mostrarono le suddette forme di Leishman.

Senza scendere a particolari, dirò che, in tutte le abitazioni ove degevano bimbi infermi di Kala-Azar, trovai cani infetti; ma cani infetti trovai anche nelle abitazioni ove non erano malati. Debbo aggiungere però che in una di queste ultime, successivamente alle mie ricerche, il prof. Gabbi riscontrò un caso di Kala-Azar.

[1] Dall'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma (lavoro fatto con fondi speciali concessi dalla Direzione di Sanità Pubblica).

[2] Ringrazio vivamente sin d'ora il prof. Grassi, il prof. Gabbi e l'on. Santoliquido, Direttore generale della Sanità Pubblica.

Per un giusto apprezzamento di questi risultati ritenni opportuno determinare se le Leishmanie mancavano nei cani di quelle località dove non è stato rinvenuto alcun caso della suddetta malattia.

Eseguii perciò ricerche di controllo nei cani del Deposito comunale, qui in Roma, nella quale città appunto nessun caso di Kala-Azar è, sinora, a conoscenza degli studiosi.

Col metodo della trapanazione potei studiare il sangue del midollo osseo di 45 cani, e ne trovai 9 infetti di corpi che non distinguo da quelli dei cani di Bordonaro. Se differenza vi è, essa sta nel fatto, che i parassiti nei cani di Roma, si mostrano fino ad ora molto meno numerosi che in quelli di Bordonaro.

Altri 7 cani di Roma, oltre i 45 sopra citati, feci oggetto di ricerca, e li uccisi col cloroformio, per studiarne la milza ed il midollo, sia con preparati rapidi, sia con sezioni. Le dimensioni delle singole milze erano presso a poco normali (lunghezza cm. 13-15; larghezza cm. 2,5-4,5). Di questi 7 cani tre soli presentarono rari i corpi suddetti.

Altri 8 cani ancora, sempre di Roma, tenni in osservazione in laboratorio, per circa due mesi, ed eseguii in tutti, per tre volte, la trapanazione del femore a varia distanza di tempo. Alla prima trapanazione un solo cane (cane II) mi fornì preparati positivi; un altro (cane VIII) soltanto alla seconda e terza trapanazione. I rimanenti 6 ritenuti perciò non infetti, furono sacrificati, ma studiandone la milza e il midollo, in due di essi (cane I, cane VII) ottenni preparati positivi.

Ciò dimostra quanto sia facile ingannarsi, anche con ripetuti esami, per la scarsità dei parassiti.

Così che dal complesso delle mie ricerche in Roma risulta che su 60 cani studiati, 16 mi presentarono forme di Leishman che, almeno per ora, ripeto, non mi è possibile distinguere da quelle dei cani di Bordonaro. Tanto negli uni come negli altri, nei singoli preparati, distinguonsi forme libere e forme endocellulari, fornite tutte di un nucleo e di un blefaroblasto, il quale ora è rotondeggiante ora bastonciniforme. Il plasma non sempre riesce ben colorito.

Non volendomi trattenere per ora, su una descrizione minuta del parassita, del quale ho notato, del resto, varie forme, dico solo, che non ho potuto fino ad ora ottenere, nei repetuti tentativi che ho fatto, sia col mezzo di Novy-Neal, sia con quello del Nicolle, una cultura pura ed abbondante di Leishmanie. Perciò ho preferito sacrificare un cane di Bordonaro, appartenente alla famiglia di A. C. (caso II del lavoro del prof. Gabbi), infetto di Leishmanie, come lo indicavano i preparati per strisciamento di sangue del midollo del femore, e feci un'emulsione, in soluzione fisiologica sterile, di alcuni pezzetti di milza e di midollo osseo. Questa emulsione fu inoculata in due cagnolini neonati da 12-15 giorni; in uno nella vena femorale e nel-

l'altro sotto la cute. I preparati per strisciamento e le sezioni in paraffina della milza, del midollo e del fegato del cane di Bordonaro, mi confermarono l'esistenza dei corpi di Leishman. Quanto ai due cagnolini, quello inoculato per via endovenosa morì dopo 46 ore dall'inoculazione, l'altro invece dopo 102 ore. In ambedue, nei preparati di fegato, milza, e midollo riscontrai benchè raro, il parassita. L'esperimento per se stesso convincente, assume maggiore importanza quando si tien conto, che, nelle non poche ricerche da me fatte nei cani neonati, non ho mai riscontrato detto protozoo; questo fatto viene anche confermato dagli studî del Nicolle il quale conclude che non vi è trasmissione del parassita per via placentare. A ciò si aggiunga che non lasciai intentato un esperimento di controllo. Un cagnolino di circa 30 giorni venne sacrificato e l'emulsione, in soluzione fisiologica sterile, della milza e del midollo osseo, fu iniettata per via endovenosa e per via sottocutanea in due altri cagnolini neonati di 15 giorni. Dopo 12 giorni dalla inoculazione ancora i cagnolini non dànno segno di malattia. Aggiungo che i preparati per strisciamento di fegato, milza e midollo osseo del cagnolino di 30 giorni mi dettero reperto negativo.

Riassumendo concludo che corpi non distinguibili per ora da quelli di Leishman, possono trovarsi, benchè, per quanto ho veduto fino ad ora, in generale scarsi di numero, nei cani, anche in quei luoghi (Roma) ove fino ad oggi non è stato segnalato alcun caso di Kala-Azar.

Riesce perciò, per ora, prematura l'identificazione del parassita che determina un'infezione spontanea e silenziosa nei cani col parassita di quella o quelle varie forme morbose (se se ne distingue più d'una) che vanno sotto il nome di Kala-Azar.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

A nome del Socio Levi-Civita, relatore, e del Corrisp. Ricci, il Segretario Millosevich legge una relazione colla quale si propone (e la proposta è approvata dalla Classe) l'inserzione negli Atti accademici di una Memoria del prof. Stekloff intitolata: *Sur l'existence des fonctions fondamentales correspondant à une équation différentielle linéaire du second ordre.*

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il doloroso annuncio della morte del Corrispondente prof. Alfredo Capelli, avvenuta il 28 gennaio 1910; apparteneva il defunto all'Accademia per la Matematica, sino dal 15 luglio 1901.

Altra perdita fatta dalla Classe, aggiunge il PRESIDENTE, è quella del Socio straniero prof. dott. FEDERICO KOHLRAUSCH, mancato ai vivi il 17 gennaio 1910; apparteneva il defunto all'Accademia per la Fisica, sino dal 9 agosto 1899.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Corrispondenti BERLESE, CANAVARI, FUSARI, SILVESTRI e dal Socio straniero LOCKYER; fa inoltre menzione dell'opera dei signori DUPARC, PEARCE e TIKANOWITCH, avente per titolo: *Recherches géologiques et pétrographiques sur l'Oural du Nord, le bassin de la haute Vichéra.*

Il Presidente BLASERNA, fa omaggio a nome dell'autore prof. PORTER, di una importante raccolta di pubblicazioni di scienze naturali.

Il Segretario GRASSI presenta l'opera del dott. GIGLIO TOS: *Les problèmes de la vie* e ne parla.

Il Socio DE STEFANI offre alcune Note a stampa del dott. MARTELLI, contenenti ricerche petrografiche e geologiche, per le quali l'autore ottenne dall'Accademia un sussidio sulla Fondazione Santoro.

CORRISPONDENZA

Il PRESIDENTE BLASERNA ricorda la parte presa dall'Istituto di Francia per il disastro di Messina e le condoglianze dall'Istituto inviate in tale triste occasione all'Accademia dei Lincei; egli propone che l'Accademia mandi oggi le proprie vivissime condoglianze all'Istituto di Francia per le disastrose inondazioni che funestarono la capitale e parte del territorio francese. Questa proposta, cui si associano gli Accademici PATERNÒ e TODARO, è approvata all'unanimità.

In seguito alla deliberazione della Classe, il Presidente BLASERNA inviava il seguente telegramma alla Presidenza dell'Istituto di Francia:

Presidente dell'Istituto di Francia

Parigi

Accademia Reale dei Lincei non ha dimenticato la parte vivissima presa nell'anno decorso da cotesto illustre Sodalizio, in occasione del terribile disastro che colpì l'Italia meridionale. Nella seduta di ieri l'Accademia mi diede unanime l'incarico di trasmetterle le profonde condoglianze per il grave flagello che funestò gran parte della Francia e la sua ammirazione per l'esemplare forza d'animo dimostrata in così gravi circostanze.

Presidente BLASERNA.

Al telegramma precedente, la Presidenza dell'Istituto di Francia rispondeva nel seguente modo:

Président Académie Lincei

Rome

Veuillez transmettre à l'Académie Royale des Lincei les remerciements de l'Institut de France très touché des sentiments que vous lui exprimez à l'occasion du fléau qui a frappé Paris et une partie de la France.

Pour le Président de l'Institut absent de Paris
Le Vice Président: Thureau Dangin.

Il Segretario Millosevich dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'Accademia nazionale delle scienze di Washington; la R. Società zoologica di Amsterdam; l'Accademia delle scienze di Lisbona; la Società delle scienze di Varsavia; le Società geologiche di Manchester e di Ottawa; la Biblioteca Bodleiana di Oxford; gli Osservatorî di Praga e di San Fernando.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 febbraio 1910.

Amodeo F. — Sulla necessità di formare un archivio delle scienze matematiche. (Estr. dal vol. III, sez. IV: Questioni filosofiche, storiche, didattiche. — Atti del IV Congr. intern. dei Matematici, 1908). Roma, 1909. 8°.

Amodeo F. — La regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei massimi e minimi. (Estr. dal « Periodico di matematica » an. XXIV, 1909) s. l. e d. 8°.

Amodeo F. — Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche. Nota. (Estr. dai « Rend. fis. », vol. XVIII). Roma, 1909. 8°.

Amodeo F. — Appunti di Biagio Pelicani da Parma. (Atti del IV Congr. intern. dei Matematici 1908). Roma, 1909. 8°.

Amodeo F. — Complementi di analisi algebrica elementare, con appendice sulle sezioni coniche. P. II del vol. 2° degli Elem. di matematica. Napoli, 1909. 8°.

Amodeo F. — Riproduzione delle questioni sul Trattato « de latutinibus formarum » di Nicole Oresme, fatte da Biagio Pelicani. (Estr. dagli « Annali del R. Istituto tecnico di Napoli », 1909). Napoli, 1909. 8°.

Bajardi. — Per Giov. De Lorenzi. Discorso. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina di Torino », 1909) s. l. e d. 8°.

Berlese A. — La diffusione della « Prospaltella Berlesei » How nell'Alta Italia. (Estr. dal « Bollettino della Società degli agricoltori italiani », an. XIV). Roma, 1909. 8°.

Bovero A. — Annotazioni sull'anatomia del palato duro. Osservazioni e ricerche. (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », ser. II, t. LX. 1909). Torino, 1909. 4°.

Bovero A. — Sull'epoca della comparsa delle ghiandole uterine. Nota. (Estr. dal vol. XV, an. 72° del « Giorn. della R. Acc. di Medicina di Torino »). Torino, 1909. 8°.

Bracke A. — La Révue Néphologique, 46. Casteau-les-Mons, s. d. 8°.

Bruni A. C. — Stato attuale della dottrina dell'istogenesi delle fibre connettive ed elastiche. (Estr. da « Ophtalmologica », vol. I. 1909). Torino, 1909. 8°.

Bruni C. — Contributo alla conoscenza dell'istogenesi delle fibre collagene: ricerche. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 44). Torino, 1909. 8°.

Calderini G. — Ueber einen Placentartumor. (Sonderabd. aus « Monatsschrift für Geburtshülfe und Gynaekologie » Bd. XVII). Berlin, 1902. 8°.

Calderini G. — Ueber einen Fall von Superfötation. (Sonderabd. aus « Gynaekologischen Rundschau » Jahrg. III, Nr. 23). Wien, 1908. 8°.

Calderini G. — Intorno alla assistenza del parto podalico. (Estr. dal « Lucina », 1899). Bologna, 1899. 8°.

Calderini G. — Cancro dell'utero. Bologna, 1901. 8°.

Calderini G. — Saggio di pratiche osservazioni intorno alla aspettazione nelle operazioni ostetriche. Torino, 1866. 8°.

Calderini G. — Ginecologia. Dispareunia da vaginismo. — Utero a collo conico. — Stenosi dell'orifizio esterno. — Retroverso-flessione. — Sterilità. Torino, 1878. 8°.

Calderini G. — Di un tumore della placenta. (Congresso periodico internazionale di Ginecologia ed Ostetricia, 1902). Firenze-Roma, 1903. 8°.

Calderini G. — Ostetricia e Ginecologia. Loro fondamenti, legami, confini e insegnamento. (Estr. dall' « Archivio di Ostetricia e Ginecologia », anno VI, n. 4, 1899). Napoli, 1899. 8°.

Calderini G. — Asportazione dell'utero dalla vagina. (Estr. dagli « Annali di Ostetricia e Ginecologia », anno IV, 1882). Milano, 1882. 8°.

Calderini G. — Contributo alla diagnosi della mostruosità del feto ed alla eziologia dell'idramios. (Estr. dagli « Annali d'Ostetricia, Ginecologia, ecc. », vol. IV, n. 2, 1882). Milano, 1882. 8°.

Calderini G. — Diagnostic et traitement du cancer du corps de l'utérus. (Extr. des « Ann. de Gynécologie et d'Obstétrique », 1900). Paris, 1900. 8°.

Calderini G. — Relazioni possibili fra la mola vescicolare e la degenerazione cistica delle ovaie. (Estr. dagli « Annali di Ostetricia e Ginecologia », n. 1, 1901). Milano, 1901. 8°.

Calderini G. — Gastrotomia primitiva per gravidanza ectopica a termine con forzato abbandono della placenta (Madre e bambino viventi). (Estr. dagli « Atti della Società ital. di Ostetricia e Ginecologia », vol. IX, 1903). Roma, 1904. 8°.

Calderini G. — Commemorazione del dott. Emanuele Bruers. (IX adunanza della Società ital. di Ostetricia e Ginecologia). Roma, 1904. 8°.

Calderini G. — Ranula di un neonato. (Estr. dagli « Annali d'Ostetricia, Ginecologia ecc. », vol. III, n. 10, 1881). Milano, 1881. 8°.

Calderini G. -- Sulla distocia per idrocefalia. (Estr. dalla « Clinica Moderna », anno VIII, n. 30). Firenze, 1902. 8°.

Calderini G. — Commemorazione del prof. Domenico Tibone. (X adunanza della Società ital. di Ostetricia e Ginecologia). Roma, 1905. 8°.

Calderini G. — L'eclampsia puerperale. (Società emiliana delle Levatrici). Bologna, 1901. 8°.

Calderini G. — L'Istituto ostetrico di Parma. Cenni storici. (Estr. dall' « Osservatore - Gazzetta delle Cliniche »). Torino, 1873. 8°.

Calderini G. — Elenco ed indicazioni bibliografiche delle pubblicazioni del prof. G. Calderini su argomenti di ostetricia, ginecologia e pediatria in ordine di data (1865-1907).

Calderini G. — Importanza della patologia degli annessi fetali e specialmente delle anomalie del cordone. (Estr. dal « Lucina », 1900). Bologna, 1900. 8°.

Calderini G. — Fibro-mioma uterino esportato felicemente collo schiacciamento lineare. (Estr. dall' « Osservatore - Gazzetta delle Cliniche »). Torino, 1875. 8°.

Calderini G. — Sulla diagnosi e sulla terapia del cancro del corpo dell'utero. (Estr. dall' « Archivio di Ostetricia e Ginecologia », anno VII, n. 11, 1900). Napoli, 1900. 8°.

Calderini G. — Sull'indicazione della operazione cesarea della sinfisiotomia, della craniotomia e del parto prematuro. (Estr. dall' « Archivio di Ostetricia e Ginecologia », anno VI, n. 11, 1899). Napoli, 1899. 8°.

Calderini G. — Fistule urétéro-utérine guérie par l'implantation de l'urétére dans la vessie au moyen du bouton du Dr Boari. (Congrès périodique de Gynécologie, d'Obstétrique et de Pediatrie). Marseille, 1899. 8°.

Calderini G. — Relazione sull'istruzione e legislazione ostetrica, letta al VII Congresso Nazionale delle Levatrici. (Estr. dal « Lucina », anno XIV, n. 11). Bologna, 1909. 8°.

Calderini G. — Per la lotta contro il cancro dell'utero. (Estr. dal « Lucina », anno XI, n. 1). Bologna, 1906. 8°.

Calderini G. — Transperitoneale Einpflanzung des Ureters in die Blase behufs Heilung der Ureter-Gebärmutter-Fistel. (Sonderabd. aus « Monatsschrift für Geburtshülfe und Gynaekologie » Bd. IX). Berlin, s. d. 8°.

Calderini G. — Le dimensioni del feto negli ultimi tre mesi della gravidanza. Torino, 1875. 8°.

Calderini G. — I tumori a sviluppo interlegamentoso. (Estr. dagli « Atti della Società ital. di Ostetricia e Gi

necologia », vol. VI, 1899). Roma, 1899. 8°.

Calderini G. — Contributo alla tecnica della provocazione del parto prematuro. (Estr. dagli « Atti della Società ital. di Ostetricia e Ginecologia », volume XII).

Calderini G. — Mioma retrocervicale. (Estr. dal « Lucina », anno XIII, n. 7). Bologna, 1908. 8°.

Calderini G. — Sull'inclinazione del bacino nei varî atteggiamenti della donna sotto l'aspetto ostetrico e ginecologico. (Estr. dagli « Atti della Società italiana di Ostetricia e Ginecologia », vol. V, anno 1898). Roma, 1898. 8°.

Calderini G. — Malattie delle mammelle in relazione coll'allattamento. Bologna, 1897. 8°.

Calderini G. — Contributo allo studio dello sviluppo dello scheletro embrionale e fetale col mezzo delle ombre dei raggi X. Roma, 1897. 8°.

Calderini G. — Innesto transperitoneale dell'uretere nella vescica per cura di fistola uretero-uterina. (Estr. dagli « Annali di Ostetricia e Ginecologia », 1899, n, 4). Milano, 1899. 8°.

Calderini G. — Innesto dell'uretere in vescica per via transperitoneale a cura di fistola uretero-uterina conseguente a parte distocico. Bologna, 1898. 8°.

Calderini G. — L'esame del latte delle nutrici nella pratica medica. Parma, 1882. 8°.

Calderini G. — Bacini asimmetrici associati a deviazioni della colonna vertebrale rachitici e non rachitici: con 2 quadri e 2 tavole litografiche. Parma, 1882. 8°.

Calderini G. — Cellule simili a quelle della decidua ottenute sperimentalmente mediante stimolo meccanico. Comunicazione preventiva. (Estr. dal « Giornale della R. Accademia di Medicina », anno 1888). Torino, s. d., 8°.

Calderini G. — Embriotomia; un'altra detroncazione coll'uncino di Braun in un caso di stenosi cicatriziale del collo. (Estr. dall' « Ateneo Medico Parmense », anno II, 1888). Parma, s. d. 8°.

Calderini G. — Di alcune laparotomie. (Estr. dall' « Ateneo Medico Parmense », anno III). Parma, 1889. 8°.

Calderini G. — Embriotomia; una decollazione e una detroncazione eseguite coll'uncino a chiave di G. Braun. (Estr. dall' « Ateneo Medico Parmense », anno I). Parma, 1887. 8°.

Calderini G. — Del parto prematuro artificialmente provocato in Italia: indicazioni e metodi. (Estr. dalla « Riv. di Ostetricia e Ginecologia », 1890). Milano, 1890. 8°.

Calderini G. — Comunicazioni e dimostrazioni state fatte nella Sez. Ostetrico-ginecologica del X Congr. Med. internaz. di Berlino, 1890. S. l. nec d. 8°.

Calderini G. — Comunicazioni di Ostetricia e di Ginecologia. (Estr. dall' « Ateneo Medico Parmense », anno II, 1888). Parma, s. d. 8°.

Calderini G. — Il quinquennio 1884-85, 1888-89. Nota clinico-statistica. (Estr. dall' « Ateneo Medico Parmense », anno III). Parma, 1889. 8°.

Calderini G. — Descrizione di un metodo di spaccatura permanente della cervice (per la cura della dismenorrea e della sterilità) e di strumenti ed apparecchi ginecologici. (Estr. dal « Bullettino delle Scienze Mediche di Bologna », ser. VII, vol. IV). Bologna, 1893. 8°.

Calderini G. — Laparatomie; considerazioni cliniche. (Estr. dagli « Annali di Ostetricia e Ginecologia », nn. 8, 9, 10; an. 1903). Milano, 1893. 8°.

Calderini G. — Due casi di utero bicorne con ematometra unilaterale. (Estr. dal « Policlinico », vol. I-C. f. 3). Roma, 1894. 8°.

Calderini G. — Beitrag zur Diagnose und Therapie des Uteruskrebses. (Sonderabd. aus der « Berliner klin. Wochenschr. », 1894, N. 15). Berlin, s. d. 8°.

Calderini G. — Sviluppo storico della Ostetricia e della Ginecologia. (Estr. dall' « Archivio di Ostetricia e Ginecologia », an. II). Napoli, 1895. 8°.

Calderini G. — Stenosi del collo dell'utero in donna affètta da isterismo grave. (Estr. dalla « Clinica Moderna » an. II). Firenze, 1896. 8°.

Civalleri Alb. — L'ipofisi faringea nell'uomo; ricerche. (Sonderabd. aus der « Internation. Monatsschrift für Anatomie und Physiologie », Bd. XXVI). Leipzig, 1909. 8°.

Comstock G. C. — Circular respecting Observation of Halley's Comet, 1910. Madison, Wis. 1909. 8°.

Duparc L. — Recherches geologiques et pétrographiques sur l'Oural du Nord, le bassin de la haute Wichéra. Par. 3. Genève, 1909. 8°.

Fusari R. — Su di un'anomalia arteriosa della midolla spinale nell'uomo. (Estr. dal « Giorn. della R. Accad. di Medicina di Torino », 1909). Torino, s. d. 8°.

Fusari R. — Antonio Zincone. Firenze, 1909. 8°.

Giglio-Tos Erm. — Les problèmes de la vie. Par. I, II, III, IV. Torino, 1900. 8°.

Gilbert G. K. — The Convexity Hilltops. (Repr. from the « Journal of Geology », vol. XVII, 1909). s. l. nec d. 8°.

Greenhill G. — The Seventeen-Section of the Elliptic Function. (Sonderabd. aus « Mathematische Annalen », Bd. LXVIII, Heft 2, an. 1910). Leipzig, 1910. 8°.

Junkersdorf P. — Ueber den Einfluss der Phloridzinvergiftung auf den Zuckergehalt des Blutes. Bonn, 1910. 8°.

Kapteyn J. C. — Correction to Contributions from the Mount Wilson solar Observatory, n. 42. Groningen, 1909. 8°.

Lacroix A. — Sur le travail de la pierre polie dans le haut Oubanghi. (Estr. dal « Bulletin de la Société de Géographie », XX, 1909). Paris, s. d. 8°.

Largaiolli V. — Ricerche biolimnologiche sui laghi Trentini. Il lago di Cei. (Estr. dalla « Tridentum », f. VIII, 1908). Trento, 1909. 8°.

Lockyer W. J. S. — The magnetic storm of September 25, 1909, and the associated solar disturbance. (Repr. from the « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society », vol. LXX). Edinburgh, s. d. 8°.

Lovisato D. — Clypeaster Pillai Lov. (Memorie di Paleontologia, vol. XV. Estr. dalla « Palaeontographia italica »). Pisa, 1909. 4°.

Malenchini Ferd. — Intorno ai nucleoproteidi batterici con speciale riguardo a quello del bacillo della peste bubbonica. (Estr. dallo « Sperimentale ». Archivio di Biologia norm. e patol., an. LXIII, 1909). s. l. e d. 8°.

Martelli A. — Brachiopodi del Dogger Montenegrino. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana » vol. XXV, fasc. II, 1906). Roma, 1906, 8°.

Martelli A. — Notizie petrografiche sullo scoglio di Mellisello. (Estr. dal « Bollettino della Società Geologica Italiana », vol. XXVII, fasc. II, 1908). Roma, 1908. 8°.

Martelli A. — La serie geologica delle coste dell'Albania meridionale. (Estr. dagli « Atti della Società Ligustica di Scienze naturali e geografiche », vol. XIX, fasc. 3-4, 1908). Genova, 1909. 8°.

Martelli A. — Ricerche chimiche e geologiche su taluni calcari da cemento della Toscana e della limitrofa Romagna. Firenze, 1910. 8°.

Martelli A. — Ciottoli di rocce cristalline nell'eocene di Mosciano presso Firenze. Firenze, 1909. 4°.

Olivo Alb. — Sulla soluzione dell'equazione cubica di Nicolò Tartaglia. Studio storico-critico. Milano, 1909. 8°.

Pastore A. — Sulla natura extralogica delle leggi di tautologia e di assorbimento nella Logica matematica. (Estr. dal vol. III, sez. IV, Atti del IV

Congr. internaz. dei Matematici, 1908). Roma, 1909. 8°.

Pflüger E. — Ueber die quantitative Analyse des in der Leber der Schildkröte enthaltenen Glykogenes. Bonn, 1910. 8°.

Pflüger E. u. Junkersdorf P. — Ueber die Muttersubstanzen des Glykogenes. Bonn, 1910. 8°.

Porter C. E. — Catalogo razonado de los trabajos historico-naturales publicados desde enero de 1894 hasta dic. de 1908. Santiago (Chile), 1908. 8°.

Porter C. E. — Bibliografia chilena de helmintologia. (Estr. de los « Annales de la Universidad de Chile », t. CXXIV, 1909). Santiago de Chile, 1909. 8°.

Silvestri F. — Isoptera. (Estr. dalla « Die Fauna Südwest-Australiens », Band II, 1909). Jena, 1909. 8°.

Silvestri F. — Parassiti introdotti in Italia nel 1909, per combattere la « Diaspis Pentagona » Targ. (Estr. dal « Bollettino della Società degli Agricoltori Italiani »). Roma, 1909. 8°.

E. M.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

ERRATA-CORRIGE

A pag. 79, alla frase contenuta nelle righe 2-3-4 a f.: «si potrebbe addirittura supporre $U = 0$, giacchè il caso dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa sono nulle» — si sostituisca la frase seguente: «Il caso generale dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa derivano da un potenziale».

A pag. 50, riga 9 a f. invece di *1827* legg. *1877*.

RENDICONTI — Febbraio 1910.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PERSONALE ACCADEMICO

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 20 febbraio 1910.* **N. 4.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 febbraio 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 4°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 febbraio 1910.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*. Nota del Socio Vito Volterra.

§ 1. — Funzioni permutabili e loro composizione.

1. Due funzioni finite e continue $F_1(x,y)$ e $F_2(x,y)$ tali che

$$\text{(A)} \qquad \int_x^y F_1(x,\xi)\, F_2(\xi,y)\, d\xi = \int_x^y F_2(x,\xi)\, F_1(\xi,y)\, d\xi\,,$$

si diranno *permutabili* e l'operazione precedente si dirà la loro *composizione*. $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale ottenuto *resultante*.

Denoteremo la funzione *resultante* con

$$F_1F_2(x,y) \quad \text{o} \quad F_2F_1(x,y),$$

e più semplicemente con $F_1\,F_2$ o $F_2\,F_1$ quando non vi sia dubbio che possa nascere confusione col prodotto delle due funzioni.

2. Teorema I. *Dato un sistema di funzioni permutabili fra loro, tutte le funzioni che possono ottenersene per composizione sono permuta-*

bili fra loro e colle funzioni date e l'operazione di composizione gode delle stesse due proprietà commutativa ed associativa della moltiplicazione.

Date le funzioni $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ ... $F_n(x,y)$ permutabili, si intenderà con $F_1 F_2 \dots F_n(x,y)$ ciò che si trova componendo F_1 con F_2, quindi componendo la resultante con F_3, poscia componendo la nuova resultante ottenuta con F_4 e così via di seguito. Per i teoremi enunciati l'ordine con cui si prendono $F_1 F_2 \dots F_n$ (*componenti*) non altera il valore della loro *resultante* $F_1 F_2 \dots F_n(x,y)$. Questa, quando non possa nascere confusione, si denoterà ancora più semplicemente con $F_1 F_2 \dots F_n$.

Se le componenti $F_1, F_2 \dots F_n$ sono eguali fra loro $F_1 F_2 \dots F_n(x,y)$ si denoterà con $F_1^n(xy)$ o più semplicemente con F_1^n. Il nuovo simbolo soddisfarà alle stesse leggi delle potenze.

3. Teorema II. *Tutte le funzioni ottenute per somma e per sottrazione da funzioni permutabili sono permutabiti fra loro e colle funzioni primitive e per comporre dei polinomii i cui termini siano funzioni permutabili basterà applicare la regola dei prodotti dei polinomii.*

§ 2. — Funzioni permutabili con una costante. Estensione della composizione.

4. Teorema III. *Tutte le funzioni permutabili con una costante sono della forma* $F(y-x)$.

Che le funzioni della detta forma siano permutabili con una costante è evidente. Che non ve ne siano altre si riconosce osservando che, se [Vedi form. (A)]

$$\int_x^y F(x,\xi)\,d\xi = \int_x^y F(\xi,y)\,d\xi = \Phi(x,y),$$

sarà

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F(x,y)$$

e quindi Φ, ed in conseguenza F, saranno funzioni di $y-x$.

Noi escluderemo per adesso dalle nostre considerazioni tali funzioni.

5. Se a è un parametro indipendente da x e y intenderemo con $aF_i(x,y)$ il prodotto di a per la funzione $F_i(x,y)$ e avremo che $aF_i(x,y)$, $bF_s(x,y)$ saranno permutabili. Componendole otterremo $abF_iF_s(x,y)$, quindi potremo dire che *combinando linearmente delle funzioni permutabili, moltiplicate per coefficienti costanti, otterremo delle funzioni permutabili, la cui composizione si otterrà colla regola del prodotto dei polinomii.*

6. Se a e b sono costanti le funzioni $\theta(x,y) = a + F_i(x,y)$ e $\psi(x,y) = b + F_s(x,y)$ non apparterranno all'insieme delle funzioni permu-

tabili colle funzioni date. Però noi estenderemo l'operazione della composizione scrivendo

$$\theta F_r(x, y) = F_r \theta(x, y) = a F_r(x, y) + F_r F_i(xy)$$
$$\psi\theta(x, y) = \theta\psi(x, y) = ab + a F_s(x, y) + b F_i(x, y) + F_i F_s(x, y)$$

e, se non potrà nascere confusione, sostituiremo anche a $F_r\theta(x, y)$, $\theta\psi(x, y)$ respettivamente $F_r\theta$, $\theta\psi$. Con questa estensione le proprietà precedentemente enunciate della composizione restano sempre soddisfatte.

§ 3. — Serie di funzioni permutabili.

7. Teorema IV. *Abbiasi la serie di potenze*

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}_{i_1} \sum_0^\infty {}_{i_2} \cdots \sum_0^\infty {}_{i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n}$$

delle variabili complesse $z_1, z_2, \dots z_n$, *la quale sia convergente per* $|z_1| < R_1$, $|z_2| < R_2, \dots |z_n| < R_n$. *Se noi sostituiamo a* $z_1, z_2, \dots z_n$ *respettivamente le funzioni permutabili* $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, ... $F_n(x, y)$, *e intendiamo che i simboli di prodotti e di potenze applicate a queste funzioni rappresentino le operazioni di composizione, otterremo una serie convergente. Se* $a_{00\dots0}$ *sarà nulla, la somma delle serie sarà una funzione di* x, y *permutabile colle funzioni date.*

8. È da notare come questo teorema ci offre un mezzo di passare dalla serie (1), convergente in generale quando i moduli di $z_1, z_2, \dots z_n$ sono inferiori a certi limiti, ad un'altra convergente comunque grandi siano i valori assoluti di $F_1, F_2, \dots F_n$, purchè finiti; esso poi ci permette di estendere le espressioni di funzioni permutabili e ci dà nuovi modi per eseguire le operazioni di composizione.

Abbiasi infatti una espressione analitica qualsiasi

$$(2) \qquad F(z_1, z_2, \dots z_n)$$

la quale sia sviluppabile in una serie di potenze intere e positive di $z_1, z_2 \dots z_n$ convergente in un certo intorno di $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$; noi intenderemo con

$$(3) \qquad \mathbf{F}(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

ciò che si trova sostituendo nella serie alle $z_1, z_2, \dots z_n$ le $F_1, F_2, \dots F_n$ e supponendo che i simboli di prodotti e di potenze rappresentino operazioni di composizione.

Restano così definite, per esempio, le espressioni

$$\frac{F_1}{a - F_1} = \frac{F_1}{a} + \frac{F_1^2}{a^2} + \frac{F_1^3}{a^3} + \cdots$$

$$\sqrt{a + F_1} = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{F_1}{a} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1.2}\frac{F_1^2}{a^2} + \cdots\right),$$

in cui le potenze di F_1 rappresentano operazioni di composizione applicate ad F_1 e si suppone fissato il segno di $\sqrt{a}$.

Così pure resta definito un prodotto infinito

$$F_1\left(1 - \frac{F_1^2}{1}\right)\left(1 - \frac{F_1^2}{4}\right)\left(1 - \frac{F_1^2}{9}\right)\cdots$$

Se avremo poi due espressioni analitiche $\mathbf{F}(F_1, F_2 \ldots F_n)$, $\Phi(F_1, F_2 \ldots F_n)$ della natura sopra considerata la loro composizione si farà colle regole con cui si fa il prodotto ordinario delle due espressioni analitiche stesse. Così la resultante di $\sqrt{a + F_1}$ con $\sqrt{b + F_2}$ potrà scriversi $\sqrt{(a + F_1)(b + F_2)}$, quando si fissino convenientemente i segni. Inoltre tutte quelle trasformazioni che non alterano una espressione analitica potranno essere eseguite sopra una espressione (3). Così componendo $\frac{F_2}{a + F_1}$ con $a + F_1$ otterremo $\frac{F_2}{a + F_1}(a + F_1) = F_2$.

§ 4. — Risoluzione generale di equazioni integrali.

9. Abbiasi una funzione analitica del tipo (1)

$$\mathbf{F}(z_1, z_2, \ldots, z_n). \tag{1'}$$

Scriviamo l'equazione

$$\mathbf{F}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0. \tag{4}$$

Consideriamo z_n come funzione implicita di $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ e supponiamo che un ramo di z_n si annulli per $z_1 = z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0$ e che questo punto non sia un punto di diramazione del ramo stesso. Allora potremo sviluppare questo ramo nell'intorno di $z_1 = z_2 = \cdots = z_{n-1} = 0$ in una serie

$$z_n = \sum_0^\infty {}_{i_1} \sum_0^\infty {}_{i_2} \cdots \sum_0^\infty {}_{i_{n-1}} b_{i_1 \ldots i_{n-1}} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \ldots z_{n-1}^{i_{n-1}} \tag{5}$$

essendo $b_{0 \ldots 0} = 0$.

Sostituiamo ora nella (4) a $z_1, z_2 \dots z_n$ le $F_1, F_2 \dots F_n$, secondo quanto dicemmo nel § precedente. Se consideriamo F_n come incognita, avremo una equazione integrale in cui i valori della F_n non compariranno linearmente. Se ora nella (5) sostitueremo a $z_1, z_2 \dots z_{n-1}$ le $F_1, F_2 \dots F_{n-1}$ otterremo una serie convergente ed essa sarà soluzione della equazione integrale.

È notevole osservare che, *mentre la serie* (5) *esprime la soluzione dell'equazione* (4) *solo quando i moduli di* $z_1, z_2 \dots z_{n-1}$ *sono al disotto di certi limiti, la serie*

$$\sum_0^\infty {}_{i_1} \sum_0^\infty {}_{i_2} \cdots \sum_0^\infty {}_{i_{n-1}} b_{i_1 \dots i_{n-1}} F_1^{i_1} \dots F_{n-1}^{i_{n-1}}(x, y),$$

ci darà la soluzione dell'equazione integrale $F(F_1, F_2 \dots F_n) = 0$ *comunque grandi siano i moduli delle funzioni* $F_1, F_2 \dots F_{n-1}$, *purchè siano finiti.*

Così, per esempio, se si vuol trovare la funzione $S(x, y)$ quando si conosca $R(x, y)$ data da

$$R(x, y) = S(x, y) + \frac{S^2(x, y)}{2!} + \frac{S^3(x, y)}{3!} + \cdots + \frac{S^n(x, y)}{n!} + \cdots$$

in cui

$$S^n(x, y) = \int_x^y S^{n-1}(x, \xi)\, S(\xi, y)\, d\xi$$

si otterrà

$$S(x, y) = R(x, y) - \frac{1}{2} R^2(x, y) + \frac{1}{3} R^3(x, y) - \cdots + \frac{(-1)^n}{n} R^n(x, y) + \cdots$$

ove

$$R^n(x, y) = \int_x^y R^{n-1}(x, \xi)\, R(\xi, y)\, d\xi.$$

e non dovremo porre alcuna limitazione per i valori assoluti di $S(x, y)$, $R(x, y)$, purchè siano finiti.

10. Supponiamo in particolare che la (4') sia un polinomio razionale e intero in z_n di grado m, in modo che l'equazione (4) sia di grado m, allora ponendo $F_n = f$, l'equazione integrale si scriverà

$$(a_m + \Phi_m) f^m + (a_{m-1} + \Phi_{m-1}) f^{m-1} + \cdots + (a_1 + \Phi_1) f = \Phi_0$$

in cui $\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_m$ sono funzioni permutabili fra loro e colle $F_1, F_2 \dots F_n$, e $a_1, a_2 \dots a_m$ sono costanti. Ammetteremo $a_1 \lesseqgtr 0$ per escludere la diramazione, come abbiamo detto precedentemente. Chiameremo la precedente equazione integrale una equazione integrale di grado m e ne avremo la soluzione colla regola precedentemente data, mediante uno sviluppo in serie, sempre convergente, che sarà una funzione permutabile colle funzioni date. È evidente

che allo sviluppo in serie potremo sostituire come equivalente una espressione analitica qualunque che conduca allo stesso sviluppo.

La teoria può facilmente estendersi ai sistemi di equazioni.

§ 5. — Equazioni integrali di 1° e 2° grado.

11. Supponiamo che l'equazione integrale sia di primo grado, cioè

$$f(x, y) + \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = \Phi_0(x, y)$$

con Φ_0 e Φ_1 funzioni permutabili.

La soluzione sarà

$$f(x, y) = \frac{\Phi_0(x, y)}{1 + \Phi_1(x, y)} = \Phi_0(x, y) - \Phi_0\Phi_1(xy) + \Phi_0\Phi_1^2(x, y) - \cdots$$

Se $\Phi_0 = \Phi_1$ otteniamo il *primo ed il secondo principio* per la risoluzione delle equazioni integrali lineari cioè il *principio di convergenza* ed il *principio di reciprocità* che abbiamo svolto in Memorie precedenti ([1]), partendo dal concetto che le equazioni integrali possono riguardarsi come il caso limite di equazioni in cui il numero delle incognite e delle equazioni cresce indefinitamente.

12. Consideriamo l'equazione integrale di 2° grado, cioè

$$a_1 f(x, y) + \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y) d\xi + a_2 \int_x^y f(x, \xi) f(\xi, x) d\xi$$
$$+ \int_x^y \Phi_2(x, \xi) d\xi \int_\xi^y f(\xi, \xi_1) f(\xi_1, y) d\xi_1 = \Phi_0(x, y)$$

in cui a_1, a_2 sono costanti e $\Phi_0(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ sono funzioni permutabili, $a_1 \gtreqless 0$.

La soluzione sarà

$$f = \frac{-(a_1 + \Phi_1) + \sqrt{(a_1 + \Phi_1)^2 - 4(a_2 + \Phi_2)\Phi_0}}{2(a_2 + \Phi_2)},$$

di cui è facile dare lo sviluppo in serie di potenze di Φ_0, Φ_1, Φ_2, nel quale le potenze stesse ed i prodotti di esse debbono denotare operazioni di composizione.

Avremo bisogno di ricorrere ad equazioni integrali di grado superiore in alcuni problemi di ereditarietà.

([1]) *Sulla inversione degli integrali definiti.* Atti R. Acc. di Torino, vol. 31, 1896; Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. V, 1° sem. 1896; Annali di Matematica, 1897.

§ 6. — Estensione del Teorema IV. Teorema generale sulle equazioni integro-differenziali.

13. Teorema V. *Abbiasi la serie di potenze, come nel teorema IV,*

$$(6) \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{i_1} \sum_{0}^{\infty}{}_{i_2} \cdots \sum_{0}^{\infty}{}_{i_n} a_{i_1 \dots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n} = \mathrm{F}(z_1, z_2 \dots z_n).$$

Sostituiamo a $z_1, z_2 \dots z_n$ le $z_1 \mathrm{F}_1, z_2 \mathrm{F}_2, \dots z_n \mathrm{F}_n$ in cui $z_1, z_2, \dots z_n$ sono parametri indipendenti dalle variabili x, y e intendiamo che i simboli di prodotto e di potenza applicati alle $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \dots \mathrm{F}_n$ rappresentino le operazioni di composizione. Otteremo una serie di potenze di $z_1, z_2 \dots z_n$ convergente qualunque siano i moduli di questi parametri.

Denoteremo questa funzione intera di $z_1, z_2, \dots z_n$ con

$$\mathrm{F}(z_1 \mathrm{F}_1, z_2 \mathrm{F}_2, \dots, z_n \mathrm{F}_n)$$

o anche con

$$\mathrm{F}(z_1, z_2, \dots, z_n | x, y).$$

14. Consideriamo ora una relazione algebrica fra $z_1, z_2 \dots z_n$, la funzione (6) e le derivate di questa funzione fino ad un certo ordine, che scriveremo

$$\Phi\left(z_1, z_2, \dots, z_n | \mathrm{F} | \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_1}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n} \mathrm{F}}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n}} \cdots \right) = 0.$$

Sostituiamo rispettivamente a $z_1, z_2 \dots z_n$, F le $z_1 \xi_1, z_2 \xi_2 \dots z_n \xi_n, \dfrac{f}{\xi_0}$, essendo $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ dei parametri indipendenti da $z_1, z_2 \dots z_n$. L'equazione precedente diverrà

$$\Phi\left(z_1, z_2, \dots z_n \left| \frac{f}{\xi_0} \right| \frac{1}{\xi_0 \xi_1} \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{1}{\xi_0 \xi_2} \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{1}{\xi_0 \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n}} \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n}}, \dots \right) = 0$$

la quale sarà soddisfatta da $f = \xi_0 \mathrm{F}(z_1 \xi_1, z_2 \xi_2 \dots z_n \xi_n)$.

Riducendola a forma intera assumerà l'espressione

$$\Psi\left(z_1, z_2, \dots, z_n | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n | f | \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2} \cdots \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n} f}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_n^{p_n}} \cdots \right) = 0.$$

Adesso sostituiamo a $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ le $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2 \dots \mathrm{F}_n$ e a ξ_0 sostituiamo una costante o una funzione F_0 permutabile colle funzioni precedenti, in modo che f resulti anch'essa permutabile colle funzioni stesse, e consideriamo i prodotti e le potenze di $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1 \dots \mathrm{F}_n, f$ e delle derivate di f come operazioni di composizione; l'equazione resulterà identicamente soddisfatta, onde avremo il

Teorema VI. *L'equazione integro-differenziale*

$$\Psi\left(z_1, z_2, \ldots, z_n \,|\, F_0, F_1, \ldots, F_n \,|\, f \,|\, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n} f}{\partial z_1^{p_1} \ldots \partial z_n^{p_n}}, \ldots\right) = 0$$

è soddisfatta dalla funzione intera $f(z_1, z_2 \ldots z_n \,|\, x, y)$ *permutabile con* $F_1, F_2 \ldots F_n$.

15. Evidentemente il precedente teorema può estendersi ai sistemi di equazioni integro-differenziali, così prendiamo, per esempio, le funzioni

$$\xi \,\mathrm{sn}(\xi z) \quad , \quad \xi \,\mathrm{cn}(\xi z) \quad , \quad \xi \,\mathrm{dn}(\xi z)$$

e sviluppiamole in serie di potenze intere e positive di z le quali, come è ben noto, saranno convergenti nell'intorno di $z = 0$. Negli sviluppi sostituiamo a ξ una funzione $S(x, y)$ e consideriamo le successive potenze di S come le resultanti delle operazioni di composizione eseguite su S stessa.

Otterremo in tal modo tre *trascendenti intere* di z, funzioni inoltre di x, y, che potremo denotare con

$$\varphi_1(z \,|\, x, y) \; , \; \varphi_2(z \,|\, x, y) \; , \; \varphi_3(z \,|\, x, y),$$

le quali soddisfaranno alle equazioni integro-differenziali

$$\frac{d\varphi_1(z \,|\, x, y)}{dz} = \int_x^y \varphi_2(z \,|\, x, \xi)\, \varphi_3(z \,|\, \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\varphi_2(z \,|\, x, y)}{dz} = -\int_x^y \varphi_3(z \,|\, x, \xi)\, \varphi_1(z \,|\, \xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\varphi_3(z \,|\, x, y)}{dz} = -\, k^2 \int_x^y \varphi_1(z \,|\, x, \xi)\, \varphi_2(z \,|\, \xi, y)\, d\xi$$

in cui k è il modulo delle funzioni ellittiche.

§ 7. — Teoremi di addizione integrali. Relazioni funzionali.

16. In una Nota precedente [1] ho costruito la funzione intera

$$\text{(7)} \qquad V(z \,|\, x, y) = Sz + \frac{S^2 z^2}{1.2} + \frac{S^3 z^3}{1.2.3} + \cdots$$

in cui $S, S^2, S^3 \ldots$ hanno lo stesso significato come nel precedente paragrafo ed ho dimostrato che la detta funzione possiede il teorema d'addizione integrale

$$\text{(8)} \quad V(z + u \,|\, x, y) = V(z \,|\, x, y) + V(u \,|\, x, y) + \int_x^y V(z \,|\, x, \xi)\, V(u \,|\, \xi, y)\, d\xi\,,$$

[1] Rend. R. Accad. dei Lincei. Seduta del 6 Febbraio 1910.

del quale mi sono valso per risolvere il problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

Questo teorema può dedursi dal teorema d'addizione della funzione esponenziale. Posto infatti

$$\text{(9)} \qquad V(z) = e^z - 1 = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

avremo

$$V(z+u) = V(z) + V(u) + V(z)\,V(u),$$

onde, sostituendo nella serie (9) a z successivamente $zS_1(x,y)$, $uS_2(x,y)$ e $zS_1(x,y) + uS_2(x,y)$, e considerando le potenze e i prodotti di S_1 e S_2 come operazioni di composizione, otterremo la funzione intera del tipo (7) ed il teorema d'addizione integrale

$$V[zS_1(x,y) + uS_2(x,y)] = V(zS_1(x,y)) + V(uS_2(x,y)) + V(zS_1)\,V(uS_2).$$

Se $S_1 = S_2 = S$ avremo il teorema d'addizione integrale (8).

17. Si comprende facilmente come analoghi teoremi integrali possano ottenersi partendo da funzioni olomorfe nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ le quali posseggano teoremi d'addizione. Così, per esempio, è facile vedere i teoremi d'addizione integrali che si hanno partendo dalle funzioni ellittiche $sn\,z$, $cn\,z$, $dn\,z$.

Similmente qualsiasi relazione tra funzioni olomorfe nell'intorno del punto $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = 0$ conduce a relazioni integrali. Prendiamo per esempio la ordinaria funzione σ, cioè [1]

$$\sigma u = u + * - \frac{g_2 u^5}{2^4.3.5} - \frac{g_3 u^7}{2^3.3.5.7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9.3^2.5.7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7.3^2.5^2.7.11} - \cdots$$

e sostituiamo ad u la $uS(x,y)$ considerando le potenze di S come rappresentanti operazioni di composizione. Otterremo la funzione intera $F(u|x,y)$ e la equazione ai tre termini condurrà alla relazione integrale

$$\int_x^y F(u+u_1|x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y F(u-u_1|\xi,\xi_1)\,d\xi_1 \int_{\xi_1}^y F(u_2+u_3|\xi_1,\xi_2)\,F(u_2-u_3|\xi_2,y)\,d\xi_2 +$$
$$+ \int_x^y F(u+u_2|x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y F(u-u_2|\xi,\xi_1)\,d\xi_1 \int_{\xi_1}^y F(u_3+u_1|\xi_1,\xi_2)\,F(u_3-u_1|\xi_2,y)\,d\xi_2 +$$
$$+ \int_x^y F(u+u_3|x,\xi)\,d\xi \int_\xi^y F(u-u_3|\xi,\xi_1)\,d\xi_1 \int_{\xi_1}^y F(u_1+u_2|\xi_1,\xi_2)\,F(u_1-u_2|\xi_2,y)\,d\xi_2 = 0.$$

[1] Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.* Göttingen 1885, Art. 5. s. 6.

Il teorema IV ed il teorema V e le loro conseguenze possono estendersi anche a casi di funzioni non permutabili e ad altri casi di cui ci occuperemo in altri lavori.

§ 8. — **Permutabilità e composizione di 2ª specie.**

18. Supponiamo che le funzioni finite e continue $F_i(x,y)$, $(i=1,2,\dots,n)$ siano tali che

$$\text{(B)}\qquad \int_0^1 F_i(x,\xi)\,F_s(\xi,y)\,d\xi = \int_0^1 F_s(x,\xi)\,F_i(\xi,y)\,d\xi\,.$$

Anche questa proprietà potrà chiamarsi *permutabilità* delle funzioni $F_1,\dots F_n$, soltanto per distinguerla dalla permutabilità considerata nei precedenti paragrafi, la diremo *permutabilità di 2ª specie*, riserbando a quella precedentemente considerata il nome di *permutabilità di 1ª specie* o semplicemente di *permutabilità* come abbiamo detto fin qui. E così l'operazione (B) si potrà dire *composizione di 2ª specie* ed il resultato ottenuto *resultante di 2ª specie.*

Per distinguere la resultante di 2ª specie da quella precedentemente considerata, porremo due punti sopra le funzioni; quindi il resultato dell'operazione (B) si indicherà con $\ddot{F}_i\ddot{F}_s(x,y)$ o semplicemente con $\ddot{F}_i\ddot{F}_s$; componendo m funzioni eguali ad $F_1(x,y)$ la *resultante* si rappresenterà con $\ddot{F}_1^m(x,y)$ o con $\ddot{F}_1^m$.

Se si eccettua il teorema III, tutte le proprietà enunciate nei §§ 1 e 2 sono senz'altro estensibili alla composizione di 2ª specie.

19. Teorema VII. *Siano le* m_{is} $(i,s=1,2,\dots n)$ *delle costanti finite. Si formi*

$$m'_{is}=\frac{1}{n}\sum_1^n{}_h\, m_{ih}\,m_{hs}\,,\quad m''_{is}=\frac{1}{n}\sum_1^n{}_h\, m'_{ih}\,m_{hs}\,,\dots\, m^{(p)}_{is}=\frac{1}{n}\sum_1^n{}_h\, m^{(p-i)}_{ih}\,m^{i}_{hs}\,,\dots$$

La funzione ottenuta per prolungamento analitico in tutto il piano complesso dell'elemento individuato nell'intorno di $z=0$ *dalla serie*

$$f_{is}(z)=c_1\,m_{is}\,z+c_2\,m'_{is}\,z^2+c_3\,m''_{is}\,z^3+\cdots$$

sarà una funzione olomorfa se $f(z)=c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\cdots$ *è olomorfa in tutto il piano complesso; e sarà meromorfa (o olomorfa) se* $f(z)$ *è meromorfa.*

Questo teorema può dedursi dal teorema di Hadamard [1] osservando che le radici delle equazioni dl 1° grado $x_{is}-\frac{z}{n}\sum_1^n{}_h\, m_{ih}\,x_{hs}=zm_{is}$ sono

[1] Acta Mathem. T. 22; vedi Borel. Bull. Soc. Math. T. 26; Pincherle, Rend. R. Acc. di Bologna, 1899.

sviluppabili nell'intorno di $z = 0$ nelle serie $x_{is} = m_{is} z + m'_{is} z^2 + m''_{is} z^3 + \cdots$

Teorema VIII. *Se* $f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$ *è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso, la funzione*

$$(10) \qquad f(z | x , y) = c_1 \mathrm{S} z + c_2 \ddot{\mathrm{S}}^2 z^2 + c_3 \ddot{\mathrm{S}}^3 z^3 + \cdots ,$$

in cui S *è una funzione di* x , y *finita e continua, sarà pure una funzione olomorfa di* z *in tutto il piano complesso. Essa si denoterà anche con* $f(\ddot{\mathrm{S}} z)$.

Teorema IX. *Se*

$$(11) \qquad f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \cdots$$

è una funzione meromorfa, la funzione ottenuta per prolungamento analitico in tutto il piano complesso dell'elemento individuato nell'intorno di $z = 0$ *dalla serie*

$$(12) \qquad f(z | x , y) = c_1 \mathrm{S} z + c_2 \ddot{\mathrm{S}}^2 z^2 + c_3 \ddot{\mathrm{S}}^3 z^3 + \cdots$$

resulterà pure una funzione meromorfa (o olomorfa) di z.

I teoremi VIII e IX sono stati ottenuti come casi limiti dal teorema VII, quando si supponga n , i , s, crescenti indefinitamente, in modo da passare dalle somme agli integrali, ma può darsi dei teoremi stessi anche delle dimostrazioni dirette molto semplici. Ci risparmiamo quella del teorema VIII. Quella del teorema IX può aversi nel modo seguente, che ci fornisce nel tempo stesso la espressione analitica della (12) valida in tutto il piano complesso.

Supponiamo per semplicità che i poli $b_1 , b_2 \ldots$ della (11) siano semplici. In virtù del teorema di Mittag-Leffler potremo scrivere

$$f(z) = \sum\nolimits_i m_i \left[\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \cdots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}} \right] + \mathrm{P}_0(z),$$

in cui $\mathrm{P}_0(z)$ è una funzione olomorfa in tutto il piano complesso.

Poniamo ora la soluzione dell'equazione

$$(13) \qquad \mathrm{S}(x , y) = \mathrm{F}(z | x , y) - z \int_0^1 \mathrm{F}(z | x , \xi) \, \mathrm{S}(\xi , y) \, d\xi$$

sotto la forma

$$(14) \qquad \mathrm{F}(z | x , y) = \frac{\mathrm{H}(z | x , y)}{\mathrm{D}(z)}$$

in cui il numeratore ed il denominatore sono funzioni intere di z e $D(z)$ è il determinante [1].

Potremo prendere le h_i tali che le due serie

$$\sum_i m_i \left[\frac{z}{b_i - z} - \frac{z}{b_i} - \frac{z^2}{b_i^2} - \cdots - \frac{z^{h_i}}{b_i^{h_i}} \right],$$

$$\sum_i m_i \left[\frac{\frac{z}{b_i} H\left(\frac{z}{b_i} \middle| x, y\right)}{D\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i} S - \frac{z^2}{b_i^2} \ddot{S}^2 - \cdots - \frac{z^{h_i} \ddot{S}^{h_i}}{b_i^{h_i}} \right]$$

siano contemporaneamente uniformemente convergenti nell' intorno di ogni valore di z che non sia della forma $b_i a_s$, in cui $a_1, a_2, \ldots$ denotano le radici di $D(z) = 0$.

Ne segue che la funzione

$$(15) \quad \sum_i m_i \left[\frac{\frac{z}{b_i} H\left(\frac{z}{b_i} \middle| x, y\right)}{D\left(\frac{z}{b_i}\right)} - \frac{z}{b_i} S - \frac{z^2}{b_i^2} \ddot{S}^2 - \cdots - \frac{z^{h_i} \ddot{S}^{h_i}}{b_i^{h_i}} \right] + P_0(\ddot{S}\, z)$$

non sarà altro che la funzione $f(z|x, y)$. La (15) sarà in generale meromorfa, ed i suoi poli non potranno essere che nei punti $b_i a_s$.

20. È facile dedurre dalle equazioni differenziali, dai teoremi d'addizione, dalle relazioni funzionali, a cui soddisfa un insieme di funzioni (11), delle equazioni integro-differenziali, dei teoremi di addizione integrali, e delle relazioni funzionali per le funzioni corrispondenti (15), in modo analogo a quanto facemmo nei paragrafi precedenti.

In particolare, se partiamo dalle funzioni ellittiche, otterremo tre funzioni meromorfe $\psi_1(z|x, y)$, $\psi_2(z|x, y)$, $\psi_3(z|x, y)$ le quali soddisfano le equazioni integro-differenziali

$$\frac{d\psi_1(z|x, y)}{dz} = \int_0^1 \psi_2(z|x, \xi)\, \psi_3(z|\xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\psi_2(z|x, y)}{dz} = -\int_0^1 \psi_3(z|x, \xi)\, \psi_1(z|\xi, y)\, d\xi$$

$$\frac{d\psi_3(z|x, y)}{dz} = -k^2 \int_0^1 \psi_1(z|x, \xi)\, \psi_2(z|\xi, y)\, d\xi$$

e posseggono dei teoremi di addizione integrali ben facili ad ottenersi.

Le trascendenti ellittiche, al pari di altre trascendenti, possono quindi condurre a varii tipi di nuove trascendenti, le une olomorfe e le altre meromorfe, le quali soddisfano ad equazioni integro-differenziali e posseggono teoremi d'addizione integrali.

[1] Vedi Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math., t. 27.

Matematica. — *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* Nota del Corrisp. G. Ricci.

In una varietà V_n definita intrinsecamente mediante la forma differenziale quadratica

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

si considerino n congruenze ortogonali di linee $[1], [2], \ldots, [n]$, delle quali una qualunque $[i]$ sia rappresentata mediante il sistema di equazioni simultanee

$$(1) \qquad \frac{dx_r}{ds_i} = \lambda_i^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Posto

$$(2) \qquad \lambda_{i/r} = \sum_{1}^{n}{}_{s}\, a_{rs}\, \lambda_i^{(s)}$$

valgono le relazioni

$$(3) \qquad a_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{i/s}\,,$$

dalle quali risulta

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, \psi_i^2\,,$$

essendo

$$\psi_i = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda_{i/r}\, dx_r\,.$$

Tra il discriminante a di φ ed il determinante λ del sistema di forme $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ ha luogo la relazione $\lambda^2 = a$, per la quale si riconosce che deve essere $\lambda \neq 0$, e che quindi $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ devono essere fra loro linearmente indipendenti.

Se invece si suppongono date n forme lineari $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ indipendenti nei differenziali di n variabili pure indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e si fanno le posizioni (3), il discriminante a della forma positiva φ risulta diverso da 0, e questa definisce quindi intrinsecamente una V_n. Se con $\lambda_i^{(r)}$ si designa la derivata del logaritmo di λ presa rispetto all'elemento $\lambda_{i/r}$, si riconosce facilmente che le (2) sono soddisfatte, e che le (1) rappresentano di conseguenza (per $i = 1, 2, \ldots, n$) n congruenze ortogonali di linee tracciate in V_n.

La metrica di una V_n, oltre che per mezzo di una forma differenziale quadratica positiva, può dunque essere definita mediante un sistema di n

forme differenziali lineari fra loro indipendenti; il che equivale geometricamente a definire la metrica stessa mediante n congruenze ortogonali di linee in essa tracciate. Questo secondo metodo è preferibile all'altro nello studio dei problemi, in cui si tratta di stabilire le condizioni di esistenza ed eventualmente di determinare delle V_n, sulle quali sia possibile tracciare delle ennuple di congruenze ortogonali dotate di proprietà intrinseche prestabilite. In questa classe generale rientrano i problemi, in cui si tratta di ricercare le condizioni di esistenza ed eventualmente di determinare le varietà V_n dotate di proprietà intrinseche date a priori, di proprietà cioè, che riguardino le loro ennuple ed i loro invarianti principali.

Esporrò qui un metodo generale per la risoluzione dei problemi della natura di quelli sopra considerati ed alcune applicazioni alle varietà a tre dimensioni.

1. Partendo dalla consueta rappresentazione intrinseca di una V_n, e considerando una ennupla ortogonale $[1], [2], \dots, [n]$ di linee in questa tracciate, ho definite altrove e designati coi simboli γ_{hij} quegli invarianti differenziali, ai quali, per il loro significato cinematico, ho dato il nome di rotazioni della ennupla. Essi sono legati dalle relazioni

$$\gamma_{hij} + \gamma_{ihj} \equiv 0,$$

che riducono il loro numero ad $\dfrac{n^2(n-1)}{2}$.

Se per rappresentare intrinsecamente la V_n si ricorre alla ennupla $[1]$, $[2], \dots, [n]$, che dirò *fondamentale*, gli invarianti stessi sono definiti dalle formole [1]

$$\text{(A)}\quad 2\gamma_{hij} = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \left\{ \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right) + \lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(s)} \left(\frac{\partial \lambda_{j/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{j/s}}{\partial x_r} \right) + \lambda_j^{(r)} \lambda_h^{(s)} \left(\frac{\partial \lambda_{i/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{i/s}}{\partial x_r} \right) \right\},$$

nelle quali le $\lambda_i^{(r)}$ rappresentano, come fu detto, le derivate di $\log \lambda$ rispetto agli elementi $\lambda_{i/r}$.

Se si considerano come date le rotazioni e come incognite le forme lineari $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista la ennupla corrispondente, e quindi la V_n da essa definita, coincidono con quelle necessarie e sufficienti per la integrabilità del sistema (A); ed ammessa questa, la effettiva sua integrazione conduce alla determinazione di tutte le V_n, nelle quali esistono ennuple ortogonali aventi le rotazioni di cui

[1] Cfr. Levi-Civita, *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences du 22 Février 1887.

sono stati assegnati i valori; sempre che si escludano i sistemi integrali pei quali risultasse $\lambda = 0$.

Le proprietà intrinseche relative alla ennupla $[1], [2], \dots, [n]$, sono rappresentate analiticamente da un sistema di equazioni (B) in termini finiti rispetto ai coefficienti dalle forme lineari $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ e differenziali, o in termini finiti rispetto alle rotazioni della ennupla. Perciò, fissate le proprietà intrinseche della ennupla, la ricerca delle varietà V_n, in cui essa possa tracciarsi, equivale a quella relativa alla integrazione del sistema che comprende insieme le equazioni (A) e le (B), nelle quali si considerino come incognite tanto le $\gamma_{h/r}$ quanto le γ_{hij}.

In particolare, se si tratta di determinare delle varietà V_n dotate di proprietà determinate relative alle loro ennuple ed invarianti principali, tra le equazioni (B) dovranno essere comprese quelle che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la ennupla $[1], [2], \dots, [n]$ sia principale.

2. Per $n = 3$ il numero delle rotazioni di una tripla ortogonale si riduce a nove, ed è allora possibile ed opportuno rappresentarle tutte per mezzo di un simbolo a due indici. Basta per ciò convenire di considerare come equivalenti gli indici che differiscono fra di loro per multipli di 3, e porre

$$\varrho_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2\,k} = -\gamma_{h+2\,h+1\,k}.$$

Posto

$$\sigma = \sum_{1}^{3}{}_i\, \varrho_{ii},$$

le equazioni (A) assumono in questo caso la forma

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \lambda\left(\sigma\, \lambda_h^{(r)} - \sum_{1}^{n}{}_i\, \varrho_{ih}\, \lambda_i^{(r)}\right).$$

Se poi si designano con $a_{rs,tu}$ i coefficienti della nota forma quadrilineare di Riemann e si fanno le posizioni

$$(1) \qquad \begin{gathered} a\,.\,\alpha^{(rs)} = a_{r+1\,r+2,\,s+1\,s+2} \\ \alpha^{(rs)} = \sum_{1}^{n}{}_{hk}\, \omega_{hk}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_h^{(s)}, \end{gathered}$$

le espressioni dei coefficienti ω_{hk} assumono la forma

$$(2) \qquad \begin{aligned} \omega_{hk} = \sum_{1}^{n}{}_r \left(\frac{\partial \varrho_{hk+1}}{\partial x_r}\lambda_{k+2}^{(r)} - \frac{\partial \varrho_{hk+2}}{\partial x_r}\lambda_{k+1}^{(r)}\right) + \sigma \varrho_{hk} - \sum_{1}^{n}{}_i\, \varrho_{hi}\, \varrho_{ki} \\ + \varrho_{h+1\,k+2}\, \varrho_{h+2\,k+1} - \varrho_{h+1\,k+1}\, \varrho_{h+2\,k+2}. \end{aligned}$$

Una prima derivazione del sistema (A_1) e la eliminazione tra il sistema derivato delle derivate seconde delle $\lambda_{h/r}$ conducono, tenuto conto delle (A_1), alle tre equazioni

$$\omega_{hk} = \omega_{kh} \tag{B}$$

in termini finiti rispetto alle $\lambda_{h/r}$ ed a queste equazioni soltanto. Esse si possono dedurre dalle relazioni

$$\alpha^{(rs)} = \alpha^{(sr)}$$

e sono già note; ma la loro importanza per la risoluzione dei problemi, di cui qui si tratta, è messa in evidenza soltanto collo stabilirle nel modo sopra indicato.

3. Suppongansi le ϱ_{hk} costanti. Posto

$$2\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} - \varrho_{h+2\,h+1}, \tag{3}$$

le (B) assumono in questo caso la forma

$$\sum_1^3{}_i\, \varrho_{hi}\, \delta_i = \sigma \,.\, \delta_h\,.$$

Se le condizioni espresse da queste equazioni non sono soddisfatte, il problema non ammette alcuna soluzione. Se lo sono, si riconosce che il sistema (A_1) è passivo ed ortonomo (¹) ed ammette quindi un gruppo unico di integrali ordinarî rispondente a dati iniziali arbitrariamente scelti compatibilmente colle (A_1).

Limitiamoci a considerare il caso in cui le (3) sono soddisfatte, perchè si verificano le condizioni

$$\delta_h = 0\,,$$

cioè

$$\varrho_{hk} = \varrho_{kh}\,. \tag{4}$$

Essendo

$$2\delta_h = \gamma_{hh+1\,h+1} + \gamma_{hh+2\,h+2}\,,$$

queste condizioni importano che per ogni congruenza $[h]$, il vettore, che ne rappresenta la curvatura geoditica, giacente, come è noto, nel piano delle tangenti alle linee delle congruenze $[h+1]$ ed $[h+2]$, sia diretto secondo il prolungamento della bisettrice dell'angolo di queste tangenti.

Se si eseguisce sulle variabili indipendenti una sostituzione lineare ortogonale a coefficienti costanti, le ϱ_{hk} variano come i coefficienti di una forma bilineare covariante, e perciò, soddisfatte le (4), si può sempre, sostituendo

(¹) Vedasi Riquier, *Les systèmes d'équations à dérivées partielles*, Paris, Gauthier-Villars, 1910, Chapitre 7.

la tripla fondamentale con altra che abbia sulla primitiva costante orientazione, fare in modo che risultino soddisfatte le

$$\varrho_{hk} = 0 \quad (h \neq k).$$

Si riconosce allora che sono soddisfatte anche le

$$\omega_{hk} = 0 \quad (h \neq k)$$

cioè che la tripla [1], [2], [3] è principale. Per essa calcolando gli invarianti principali si trovano per questi le espressioni

$$\omega_{hh} = \sum_1^3{}_i\, \varrho_{i+1\,i+1}\, \varrho_{i+2\,i+2} - 2\varrho_{h+1\,h+1}\, \varrho_{h+2\,h+2}\,.$$

Ritroviamo così una classe di spazî a tre dimensioni, che ammette un gruppo transitivo, a tre parametri almeno, di movimenti rigidi [1].

4. Come seconda applicazione mi propongo di determinare le V_3 che ammettono delle terne ortogonali costituite di congruenze normali ed isotrope, cioè tali che il vettore rappresentante la curvatura geodetica di ogni congruenza $[h]$ della terna coincida in direzione colla bisettrice dell'angolo, che fanno fra di loro le linee delle congruenze $[h+1]$ ed $[h+2]$. Questa condizione è rappresentata dalle equazioni

$$\varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

mentre la normalità della congruenza $[h]$ è invece rappresentata dalla equazione

$$\varrho_{h+1\,h+1} + \varrho_{h+2\,h+2} = 0\,.$$

Le condizioni del problema sono dunque rappresentate tutte dalle equazioni

$$\varrho_{hk} + \varrho_{kh} = 0\,,$$

le quali, posto

$$\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} = -\varrho_{h+2\,h+1}$$

permettono di esprimere tutte le rotazioni della tripla fondamentale per mezzo delle δ_h, che chiamerò perciò *rotazioni principali* della tripla stessa.

Le equazioni (A_1) assumono così la forma

$$(A_1') \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r}}{\partial x_s} - \frac{\partial \lambda_{h/s}}{\partial x_r} = \sum_1^3{}_i\, \delta_i (\lambda_{i/r}\, \lambda_{h/s} - \lambda_{i/s}\, \lambda_{h/r})\,,$$

mentre le (2) nel nostro caso diventano

$$(2') \qquad \omega_{hk} = -\frac{\partial \delta_k}{\partial s_h} + \varepsilon_{hk} \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial \delta_i}{\partial s_i} - \delta_i^2\right),$$

[1] Vedasi Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti*, ecc., Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), serie 3ª, tomo XII.

essendo

$$\varepsilon_{hk} = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq k \\ 1 & \text{» } h = k, \end{cases}$$

e rappresentandosi con ds_i l'elemento lineare della linea della congruenza $[i]$.

Poichè le congruenze $[1], [2], [3]$ devono essere normali possiamo porre

$$\lambda_{h|r} = \psi_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r},$$

talchè, indicando con D il determinante funzionale di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, dovrà essere

$$D \neq 0.$$

Indicando con μ_1, μ_2, μ_3 delle indeterminate, le (A_1') si sostituiscono così colle

$$(A_2) \qquad \frac{\partial \log \psi_h}{\partial x_r} = \mu_h \lambda_{h|r} - \sum_1^3{}_i \delta_i \lambda_{i|r},$$

mentre la espressione del ds^2 della varietà cercata sarà

$$ds^2 = \sum_1^3{}_h \psi_h^2 \, d\varphi_h^2.$$

Una prima derivazione delle (A_2) conduce a condizioni di integrabilità, le quali, N_1, N_2, N_3, rappresentando ancora delle indeterminate, sono espresse dalle equazioni

$$\frac{\partial \log(\mu_h \psi_h)}{\partial x_r} = N_h \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r},$$

alle quali si soddisfa ponendo

$$\mu_h \psi_h = \chi_h(\varphi_h),$$

χ_1, χ_2, χ_3 essendo simboli di funzioni arbitrarie. Le (A_2) assumono per queste la forma

$$(A_2') \qquad \frac{\partial \log \psi_h}{\partial x_r} = \chi_h(\varphi_h) \frac{\partial \varphi_h}{\partial x_r} - \sum_1^3{}_i \delta_i \lambda_{i|r},$$

mentre le (B) ci dicono che le δ_h devono essere le derivate di una funzione arbitraria B prese rispetto alle x_h.

Soddisfatta questa condizione le (A_2') si integrano poi facilmente, purchè si assumano $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ come variabili indipendenti. Indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ delle funzioni arbitrarie rispettivamente di $\varphi_1 . \varphi_2, \varphi_3$, il loro sistema integrale generale si ha ponendo

$$B \psi_h = \alpha_h,$$

talchè con un semplice cambiamento di parametri risulta

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{B^2}.$$

Concludiamo

a) che le varietà cercate sono tutte e soltanto quelle rappresentabili conformemente nello spazio euclideo;

b) che per esse le terne ortogonali ed isotrope sono precisamente quelle, che dànno al loro ds^2 la espressione canonica sopra riferita;

c) che le rotazioni principali della terna hanno allora le espressioni

$$\delta_h = \frac{\partial B}{\partial x_h}.$$

Se si esige di più che le linee coordinate x_1, x_2, x_3 costituiscano una terna principale, come risulta dalle (2′), è necessario e basta che siano soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial \delta_h}{\partial x_{h+1}} = \frac{\partial \delta_h}{\partial x_{h+2}} = 0,$$

cioè che ogni δ_h sia funzione della sola x_h, cioè che sia

$$B = X_1 + X_2 + X_3,$$

X_1, X_2, X_3 dipendendo rispettivamente da x_1, x_2, x_3 soltanto.

Matematica. — *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche nel gruppo della colesterina. — La Fitosterina dell'olio della noce comune* (*Inglans regia*) [1]. Nota VII del Socio A. Menozzi e di A. Moreschi.

I dati poco concordanti intorno alle sostanze descritte con il nome di fitosterine e separate da varî grassi vegetali rendono necessario uno studio particolareggiato al fine di stabilire se in molti casi si tratti della identica sostanza oppure di sostanze differenti, ed in questo caso determinare in che rapporti stiano tra loro.

Con questo concetto abbiamo separato e studiato la fitosterina contenuta nell'olio di noce comune (*Inglans regia*).

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica agraria della R. Scuola superiore di Agricoltura, Milano.

Premettiamo alcuni dati sulla resa in olio e sulla proporzione della parte non saponificabile.

Da 100 kg. di noci, col relativo guscio, si sono ottenuti kg. 38.40 di prodotto senza guscio e da questo, mediante estrazione con etere, kg. 23.200 di olio.

Da quest'olio, seguendo il solito procedimento che abbiamo sempre adottato in queste ricerche, abbiamo separata la parte non saponificabile ed abbiamo ottenuto, per ogni 1000 di olio, 2.6 di sostanza non saponificabile.

La parte non saponificabile l'abbiamo sottoposta a cristallizzazioni ripetute con alcool contenente poco etere. Siamo arrivati così ad un prodotto che fonde a 138° C, il quale dà le reazioni cromatiche dei termini appartenenti al gruppo della colesterina. Separato da alcool ed etere, contiene una molecola di acqua di cristallizzazione come risulta dalle determinazioni seguenti: gr. 0,966 di sostanza, in corrente di aria secca, a 70°-80° perdono gr. 0,0452, ciò che corrisponde a 4.67 % di acqua.

La combustione della sostanza secca ha dato i seguenti numeri: con gr. 0.2052 di sostanza si sono ottenuti gr. 0.6303 di CO_2 e gr. 0.220 di H_2O da cui

$$C\,\% = 83.77$$
$$H\,\% = 11.88$$

dati che si accordano con $C_{26}H_{43}OH$ senza però scostarsi dalla formula, che oggi pare più probabile, $C_{27}H_{45}OH$.

La determinazione del peso molecolare col metodo crioscopico, in naftalina, ha dato 394 per la sostanza idrata; concentrazione 4.40 %, abbassamento 0.776.

Le soluzioni della sostanza deviano a sinistra il piano della luce polarizzata.

Le osservazioni sul potere rotatorio specifico hanno dato questi risultati: gr. 3.4003 di sostanza idrata in cc. 25 di cloroformio a 14° C; angolo osservato = — 9°.18, da cui, per la sostanza idrata

$$[\alpha]_D^{14°C} = -33°.76$$

Ecco le osservazioni cristallografiche fatte sulla sostanza dal prof. Artini, e gentilmente comunicateci:

« Cristallini assai imperfetti, monoclini, lamellari secondo la base, allungati secondo *y*, e terminati alle estremità da facce di prisma che fanno fra loro un angolo (110), ($\bar{1}$10) = circa 74° ½. Per l'angolo (110), (001) fu misurato, approssimativamente, un valore di 85° ½.

Le facce di }001{ sono fortissimamente striate secondo [010]; in questa zona si vedono pure sottili facce di altri pinacoidi, non misurabili per la solcatura profonda e la molteplicità delle immagini.

Il piano degli assi ottici è parallelo a }010{; le bisettrici acute, positive, escono obliquamente dalla base; un asse ottico emerge sotto fortissima inclinazione, ai margini del campo di vista.

La sostanza corrisponde bene, per i suoi caratteri cristallografici, alla fistosterina da olio di cotone studiata da Mugge (Zeitschr. für Unters. der Nahr. und Genussmittel, I, 1898, 45) e non ha nulla di comune con la colesterina della bile.

Abbiamo preparato e studiati i seguenti esteri e derivati:

Formiato. — Preparato col procedimento solito seguito per i formiati della colesterina, della bombicesterina ecc., si separa in laminette allungate, presentanti grande rassomiglianza col formiato della colesterina biliare; fonde però più alto, cioè a 106°.C.

L'analisi ha dato questi risultati: con gr. 0.2034 di sostanza si sono ottenuti gr. 0,6045 di CO_2 e gr. 0,2139 di H_2O da cui

$$C\ \%_0 = 81.07$$
$$H\ \%_0 = 11.13$$

dati che si accordano, per l'idrogeno a $C_{27}H_{45}O.OCH$, per il carbonio a $C_{26}H_{43}O.OCH$.

Per il potere rotatorio specifico, con gr. 2 di sostanza in 25 cm³. di cloroformio a 20°, si è osservato un angolo = — 7°.20: da cui

$$[\alpha]_D^{20°C} = -45°.00$$

Acetato. — Ottenuto col procedimento solito: si presenta in aghetti prismatici fondenti a 121°C. L'analisi ha dato: con gr. 0.2079 di sostanza gr. 0,619 di CO_2, e gr. 0.214 di H_2O e

$$C\ \%_0 = 81.19$$
$$H\ \%_0 = 11.43$$

L'osservazione al polarimetro ha dato — con gr. 2.2235 di sostanza in 25 cm³. di cloroformio a 17°C. — un angolo = — 7°.20, da cui

$$[\alpha]_D^{17°C} = -40°.48$$

Benzoato. — Ottenuto scaldando la fitosterina con anidride benzoica; si depone dal solvente in piccole tavole fondenti a 150°. L'analisi ha dato: con gr. 0.260 di sostanza, gr. 0.7895 di CO_2, gr. 0.241 di H_2O, da cui

$$C\ \%_0 = 82.80$$
$$H\ \%_0 = 10.12$$

L'osservazione al polarimetro: con gr. 3.68 di sostanza in 25 cmc. di cloroformio a 17°C., angolo osservato = — 4°.20, da cui

$$[\alpha]_D^{17°C} = -14°.27$$

Per ciò che riguarda il benzoato della fitosterina delle noci il prof. Artini ci comunica le seguenti osservazioni fatte:

Sistema trimetrico:

$$a : b : c = 0,716 : 1 : 0,217 .$$

Forme osservate:

$$\}010\{ , \}110\{ , \}011\{ , \}012\{ .$$

$$(010) . (110) = 54°,23'$$

$$(010) . (011) = 77°,46'.$$

Cristallini allungati secondo x e fortemente appiattiti, anzi d'ordinario sottilissimamente lamellari secondo }010{.

Tracce di sfaldatura secondo }001{:

Piano degli assi ottici }010{. Bisettrice acuta, negativa, normale a }001{. Nell'olio di oliva misurai:

$$2Ha = 82°28' \text{ (Na)}.$$

Anche per il benzoato si può dire che nulla ha di comune, cristallograficamente, col ben noto benzoato di colesterina, tetragonale.

Salicilato. — Preparato col metodo indicato da L. Golodetz (Chem. Zeit., 1907, II, 1215) si distingue da tutti gli altri derivati della fitosterina per la poca solubilità in alcool; cristallizza abbastanza bene, fonde a 155°C.

L'analisi ha dato, con gr. 0.251 di sostanza gr. 0.7401 di CO_2 e gr. 0.2295 di H_2O, da cui

$$C\ \%_0 = 80.39$$
$$H\ \%_0 = 10.19$$

L'osservazione al polarimetro, con gr. 0.850 in 10 cmc. di cloroformio a 15°C; angolo osservato = — 4°.29, da cui

$$[\alpha]_D^{15} = -50°.82$$

Bibromo-acetato. — L'acetato della fitosterina si addiziona facilmente col bromo, fissando, per molecola, una molecola di questo elemento e non di più. Il prodotto puro fonde a 118°C. La determinazione del bromo ha dato: sostanza gr. 0.332, AgBr gr. 0.2055 pari a Br gr. 0.0874, da cui

	Calcolato per $C_{29}H_{48}O_2Br_2$
Br $\%_0 = 26.34$	Br $\%_0 = 27.21$

Da questo bibromo-derivato, con zinco ed acido acetico abbiamo ricuperato in misura quasi quantitativa, l'acetato fondente a 121°C., identico a quello sopra descritto.

Dall'acetato ottenuto dal bibromoderivato, per saponificazione, abbiamo ricuperata la fitosterina fondente a 138°, la quale, per ulteriore controllo si è trasformata in acetato fondente a 121°C.

Biidrofitosterina. — Facendo passare idrogeno per la soluzione eterea della fitosterina, in presenza di nero di platino, si somma una molecola di idrogeno, e si ha un prodotto, la biidrofitosterina, fondente a 136-137; la sostanza non dà più la nota reazione cromatica con acido solforico e cloroformio, non assume più bromo. L'analisi di questo prodotto ha dato: con gr. 0.199 di sostanza secca si sono ottenuti gr. 0,613 di CO_2 e gr. 0.1972 di H_2O, da cui

$$C\ \%_0 = 83.90$$
$$H\ \%_0 = 12.11$$

La sostanza devia a destra il piano di polarizzazione della luce.

L'osservazione al polarimetro ha dato, con gr. 0.740 di sostanza, sciolta in 10 cm³. di cloroformio, alla temperatura di 20°C, una deviazione di $+ 1°.70$, da cui

$$[\alpha]_D^{20°} = + 22°.97$$

Acetato di biidrofitosterina. — Ottenuto con il solito procedimento, fonde a 134-135°.

L'analisi ha dato: con gr. 0.170 di sostanza, gr. 0.506 di CO_2 e gr. 0.175 di H_2O, da cui

$$C\ \%_0 = 81.23$$
$$H\ \%_0 = 11.41$$

L'osservazione al polarimetro, con gr. 0.4835 di sostanza in 10 cmc. di cloroformio alla temperatura di 19°C, ha dato una deviazione di $+ 0°.70$, da cui

$$[\alpha]_D^{19°C} = + 14°.27$$

Dall'acetato si ricupera, per saponificazione, nel modo solito, la biidrofitosterina a *p.* di *f.* = 137° sulla quale si è fatta ancora una osservazione al polarimetro: con gr. 0.3535 in 10 cm³. di cloroformio a 19°C, si ha avuto una deviazione di $+ 0°.79$, da cui

$$[\alpha]_D^{19°C} = + 22°.34$$

Alcuni dei dati sopra riportati fanno ritenere che la fitosterina da noi studiata, si identifichi con una fitosterina diffusa nel regno vegetale; così

la sua composizione, il suo punto di fusione (138°) si accordano con quello della maggior parte delle fitosterine note, quali quella da olio di cotone (*f.* 136°-137°), d'arachide (138°-138°.5) di sesamo (137°.5) di ravizzone (138-139°), di lino (138°), di papavero (137°), di ricino (136-137°), ecc.; e pure si accorda in massima il punto di fusione dei corrispondenti esteri studiati; così dicasi dell'attività ottica del prodotto studiato e dei suoi esteri, in confronto a quella di fitosterine ricavate dalle piante le più diffferenti.

Cosicchè, sebbene pei prodotti ricavati da altri olii non si abbia uno studio così esteso come quello da noi compiuto sul prodotto ricavato dall'olio di noci, è da ritenersi sia presente in molte piante una identica sostanza a cui proponiamo riserbare il nome di fitosterina; salvo l'esistenza di prodotti del medesimo gruppo, in alcune piante, o accompagnanti la fitosterina oppure presenti da soli.

Cristallografia. — *Sulla determinazione dell'indice di rifrazione al microscopio.* Nota del Corrispondente C. Viola.

Per determinare al microscopio l'indice di rifrazione di un liquido, con cui si misura l'indice medio di un minerale, si applica una disposizione

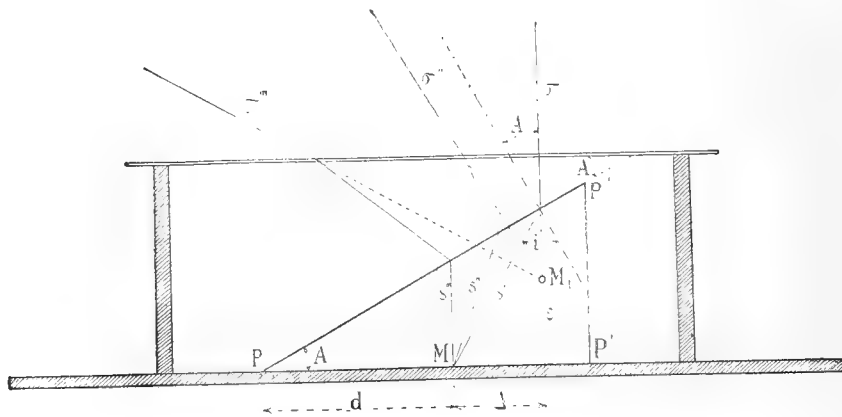



Fig. 1.

comoda e semplicissima, la quale consiste nel misurare lo scostamento che subisce una mira veduta col microscopio, quando vi si interponga un prisma di liquido. Per realizzare questo metodo di misura, Clerici [1] traccia al diamante le due mezzerie a croce sopra un vetrino portaoggetti, fissa nel loro incontro un prisma di vetro P P′ P″ (fig. 1) con lo spigolo rifrangente P parallelo alla mezzeria trasversale M, quindi un anello di vetro in modo da costituire una specie di recipientino cilindrico, nel cui mezzo è il prisma.

[1] E. Clerici, *Sulla determinazione dell'indice di rifrazione al microscopio,* in Rendiconti R. Accademia dei Lincei, I, 336, 1907; I, 351, 1909.

Si riempie il recipientino col liquido in esame, e per evitare il menisco si copre il liquido con un sottile vetrino coprioggetti. Con ciò è realizzata la esigenza che la luce proveniente dal polarizzatore attraversi un sistema di due prismi aderenti, di vetro e di liquido, ad angolo rifrangente identico A con le faccie inferiore e superiore orizzontali.

Osservando la mezzeria trasversale M col microscopio senza e poi con il sistema dei due prismi si noterà uno scostamento orizzontale $\varDelta$ di detta mezzeria, mediante il quale si calcola l'indice di rifrazione del liquido in esame, quando siano dati quello del prisma di vetro e l'angolo rifrangente A.

La teoria su cui si basa questa determinazione dell'indice di rifrazione è semplicissima, e può essere riassunta in poche parole. Consideriamo infatti i raggi s' s'' s''' uscenti dal punto M, che rappresenta la mezzeria trasversale; essi dopo attraversato i due prismi, escono divergenti secondo σ' σ'' σ''' come uscenti dal punto M_1, che per conseguenza è l'immagine virtuale del punto M, generata dai due prismi. Il primo si trova scostato rispetto al secondo della qnantità ε nella verticale e della quantità $\varDelta$ nell'orizzontale. Si scorge subito che tanto la quantità ε quanto la quantità $\varDelta$ possono essere utilizzate per la determinazione dell'indice di rifrazione del liquido. Qui si tiene conto solamente di $\varDelta$.

A tal fine consideriamo il raggio incidente s' uscente da M, il quale corrisponde al raggio emergente σ' verticale. Essendo i l'angolo di incidenza del raggio s' sulla faccia comune ai due prismi, avremo

$$1) \qquad m \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} A \quad \text{e} \quad n = \frac{m}{\operatorname{sen} A} \cdot \operatorname{sen} i$$

dove m è l'indice noto del prisma di vetro ed n incognito del liquido per rispetto all'aria.

Se si toglie il liquido e vi si sostituisce l'aria, avremo analogamente

$$2) \qquad m \operatorname{sen} i_0 = \operatorname{sen} A .$$

Il rapporto $\frac{m}{\operatorname{sen} A}$ è una costante determinabile con la precisione che si desidera. L'angolo di incidenza i si calcola con lo scostamento orizzontale $\varDelta$ che l'immagine M_1 subisce rispetto alla mira M.

Chiamiamo con d la distanza, non misurabile direttamente, della mezzeria M dallo spigolo P del prisma di vetro (fig. 1), allora si avrà

$$\varDelta = h \operatorname{tag}(i - A)$$

essendo

$$h = (d + \varDelta) \operatorname{tag} A .$$

E giacchè Δ è, in generale, piccolissimo rispetto a d, potremo scrivere semplicemente

$$\Delta = d \operatorname{tag} A \operatorname{tag}(i - A). \tag{3}$$

Se A, d sono noti, e Δ è levato con le misure, l'equazione 3) ci dà i, e la 1) il valore di n.

Si può vedere con quale esattezza è determinabile d.

Facendo l'osservazione nell'aria anzichè nel liquido, risulta analogamente

$$\Delta_0 = d \operatorname{tag} A . \operatorname{tag}(i_0 - A), \tag{4}$$

dalla quale si ricava d essendo noto i_0 dalla 2).

Misurando lo scostamento Δ_0 con un errore $\delta\Delta$, risulterà in d un errore δd, ossia

$$\frac{\delta \Delta}{\delta d} = \operatorname{tag} A . \operatorname{tag}(i_0 - A)$$

poichè gli errori in A e i_0 sono trascurabili.

Sia ad esempio $A = 30^\circ$, $m = 1{,}5$ e quindi $i_0 = 19^\circ 20' 10''$ si avrà

$$\frac{\delta \Delta}{\delta d} = 10 .$$

Ritornando all'equazione 3), potremo con essa calcolare l'errore dell'angolo i, che chiameremo con δi, quando sieno noti gli errori δd e $\delta \Delta$; infatti si ha

$$\delta \Delta = \operatorname{tag} A . \operatorname{tag}(i - A) . \delta d + \frac{\operatorname{tag} A}{\cos^2(i - A)} d . \delta i .$$

Facciamo la supposizione che l'indice di rifrazione del liquido sia $n = 1{,}6$; allora si calcola

$$\operatorname{sen} i = \frac{1{,}6}{1{,}5} \operatorname{sen} A$$

ovvero per $A = 30^\circ$, $\log \operatorname{sen} i = 9{,}726999$, e

$$i = 32^\circ 14' \quad \text{a} \quad i - A = 2^\circ 14',$$

donde

$$\operatorname{tag} A \operatorname{tag}(i - A) = 0.022516 \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{tag} A}{\cos^2(i - A)} = 0.5782 .$$

Da qui si ricava

$$\delta \Delta = 0.0225 . \delta d + 0.5782 . d . \delta i .$$

Ma dall'esempio sopra citato si ha ancora

$$\delta d = 10 \, . \, \delta \Delta ,$$

e per conseguenza si può calcolare il valore di δi; infatti

$$\delta i = \frac{1}{0.5782 \, . \, d} \delta \Delta - \frac{0.0225}{0.5782 \, . \, d} d \delta \, .$$

Conviene osservare che i due errori $\delta \Delta$ e δd sono tra di loro indipendenti, infatti l'errore δd risulta o può risultare da una serie di misure, mentre $\delta \Delta$ è l'errore immediato di lettura in cui si incorre in ogni singolo caso. Dovremo perciò adottare il principio degli errori medî per la determinazione di δi, vale a dire scrivere

$$\delta i^2 = \left[\frac{1}{0.5782 \, . \, d} \, . \, \delta \Delta \right]^2 + \left[\frac{0.2255}{0.5782 \, . \, d} \, . \, \delta d \right]^2$$

e facendo $\delta d = 10 \, . \, \delta \Delta$ nella peggiore ipotesi, si ha

$$\delta i^2 = \left\{ \left[\frac{1}{0.5782 \, . \, d} \right]^2 + \left[\frac{0.2252}{0.5782 \, . \, d} \right]^2 \right\} \delta \Delta^2$$

epperò

$$\delta i = \pm 1.4 \frac{\delta \Delta}{d} \, .$$

Abbiamo supposto che lo scostamento $\delta \Delta$ sia dato con un'approssimazione di ± 0.01 mm., cosicchè

$$\delta i = \pm \frac{0.014}{d} \, .$$

L'errore di i diminuisce con l'aumentare di d, sicchè sarà utile di adottare un prisma sufficientemente grande. Supposto $d = 10$ mm., si avrà definitivamente

$$\delta i = \pm 0.0014 \, .$$

Da questo errore nell'angolo di incidenza si passa facilmente all'errore nell'indice di rifrazioue n.

Infatti si ha

1) $$m \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} \mathrm{A}$$

$$\delta n = \pm \frac{m \cos i}{\operatorname{sen} \mathrm{A}} \, . \, \delta i = \pm 2.538 \, . \, \delta i$$

e infine

$$\delta n = \pm 0.0036 \, .$$

L'indice di rifrazione di un liquido può dunque aversi con questo metodo con una esattezza che è situata nella terza decimale di circa quattro unità. Ma bene inteso la precisione nella misura dello scostamento deve essere dl 0.01 mm.

Questa esattezza si può ottenere applicando una scala sotto al portaoggetti, in cui il millimetro è diviso in 50 parti; ovvero costruendo l'apparecchio direttamente sopra un portaoggetti già graduato, in guisa che il prisma con lo spigolo basale lasci scoperta detta scala. Allora si potrà osservare col microscopio la mezzeria M attraverso lo spessore del liquido e attraverso i due prismi di vetro e di liquido. La lettura sulla scala darà allora direttamente lo scostamento $\Delta = MM_1$ in orizzontale (fig. 2).

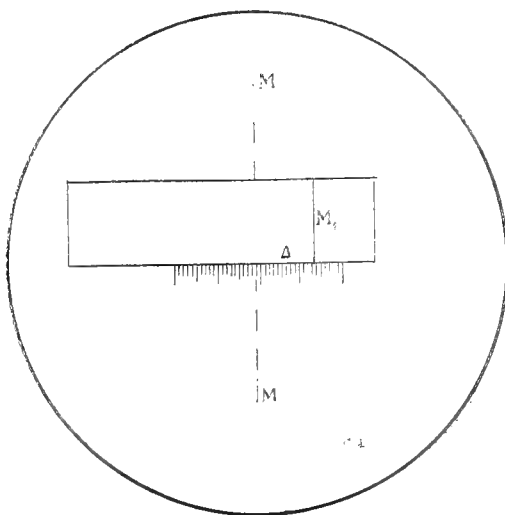



Fig. 2.

Riepilogando possiamo affermare che il metodo, qui esposto, è pratico per determinare l'indice di rifrazione al microscopio e assicura anche una esattezza, che è sufficiente per lo scopo a cui la determinazione deve servire. Il metodo è pratico in quanto con la misura dello scostamento Δ si ricava l'angolo i dall'equazione

$$3) \qquad \operatorname{tag}(i - A) = \frac{\Delta}{d \operatorname{tag} A}$$

e quindi l'indice di rifrazione del liquido in esame dall'equazione

$$1) \qquad n = \frac{m \operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} A}$$

dove A ed m sono noti, e la costante $d \operatorname{tag} A$ può calcolarsi per mezzo della relazione

$$4) \qquad d \operatorname{tag} A = \frac{\Delta_0}{\operatorname{tag}(i_0 - A)};$$

dove Δ_0 si misura, se in luogo del liquido in esame è sostituito un liquido dalla rifrazione nota o l'aria. In questo ultimo caso è

$$\text{sen}\, i_0 = \frac{\text{sen A}}{m} . \tag{2}$$

Clerici ha supposto che lo scostamento sia proporzionale alla tangente trigonometrica dell'angolo di deviazione come pel caso dell'angolo degli assi ottici; ma è evidente che il microscopio non può dare, come un cannocchiale accomodato per l'infinito, la deviazione di due raggi (di cui uno è verticale), quando esso venga puntato a un oggetto vicino, quale è la mezzeria nel caso nostro. Di più si vede che lo scostamento Δ cresce con d, con l'angolo A e con l'indice m, ed è perciò privo di valori massimi.

Matematica. — *Alcune proprietà degli integrali di certe classi di equazioni differenziali.* Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Corrispondente ERNESTO PASCAL.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sul problema dell'equilibrio elastico, dei solidi omogenei ed isotropi, dati gli spostamenti in superficie.* Nota del dott. UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Nella mia Nota precedente [1], intitolata: *Metodo diretto per risolvere, dati gli spostamenti in superficie, il problema dell'equilibrio dei corpi elastici omogenei ed isotropi*, ho considerato completamente note le g_1, g_2, g_3, mentre contengono tre integrali, estesi allo spazio S, nei quali figura il Δ^2 delle funzioni incognite.

La considerazione di questi integrali, nel loro giusto significato, ci indurrebbe ad una equazione integrale di 2ª specie, nella quale la dilatazione θ è funzione incognita. Però la discussione relativa al nucleo, nei punti della superficie σ dello spazio S, non è, nello stato attuale, abbordabile.

[1] V. Rendic. d. R. Acc. d. Lincei, vol. XVIII, 2° sem., fasc. 10°, pag. 459.

Fisica. — *Sul comportamento magneto-ottico di alcune linee spettrali* [1]. Nota di Mario Tenani, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Osservando il comportamento magneto-ottico della linea Mg $\lambda = 5167$ e confrontando gli sdoppiamenti nei due casi più comuni di osservazione del fenomeno di Zeeman [2] ebbi occasione di notare come la distanza delle linee laterali del tripletto, fosse diversa da quella delle linee del doppietto longitudinale e che la differenza di tali distanze non fosse tale da giustificare l'applicazione della teoria.

Poco di poi anche il prof. Nagaoka [3] confrontava lo sdoppiamento del doppietto e delle linee laterali del tripletto di alcune linee dell'elio, mediante lo spettroscopio a gradinata dell'Università di Tokyo (35 piastre della grossezza di un centimetro) che gli permise di seguire le curve che rappresentano gli sdoppiamenti stessi in funzione del campo magnetico partendo dai campi più deboli. Dall'esame di queste curve egli potè trarre per queste linee dell'elio la medesima conclusione.

Il procedimento che mi guidò si può schematizzare così:

Dette N e Q due certe quantità [4], si è trovato che le linee laterali del tripletto hanno frequenze che differiscono da quella della riga emessa in assenza del campo rispettivamente di

$$\mu_1 = \frac{N - Q}{2} \qquad \mu_2 = \frac{N + Q}{2}$$

Da ciò risulta come N esprima nella scala delle frequenze il valore della dissimmetria del tripletto. La distanza delle linee stesse è risultata espressa, nella scala delle frequenze, da

$$\sqrt{4\,\mu_0^2 + N^2}\,,$$

dove $2\,\mu_0$ non è altro che la distanza, misurata nella stessa scala, delle linee del doppietto longitudinale: si può cioè considerare la distanza delle linee laterali del tripletto come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Univ. di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

(2) Rend. R. Acc. dei Lincei XVIII (5) 677, giugno 1909.

(3) Nature, 12 agosto 1909 pag. 188.

(4) Voigt, *Magneto und elettro-optik*, pagg. 170-171.

cui uno dei lati rappresenti la distanza delle linee del doppietto, l'altro rappresenti la dissimmetria del tripletto. Per una nota proprietà risulta quindi che la differenza che la teoria lascia prevedere tra gli sdoppiamenti delle linee laterali del tripletto e di quelle del doppietto deve, essere minore della dissimmetria del tripletto.

Osservazioni fatte da me in proposito sopra la linea b_4 del Mg ed esposte nella Nota citata, ebbero invece a condurre a opposto risultato.

Il desiderio di stabilire con precisione il legame tra i due casi più importanti di osservazione del fenomeno di Zeeman, e le conclusioni stesse che ho pensato di poter trarre dalla citata osservazione sulle linee del magnesio, mi hanno spinto a ripetere su altre linee il medesimo esame. Le difficoltà non lievi del metodo di studio da me iniziato sulle linee del magnesio, furono felicemente superate per il cadmio e per il mercurio. Per questi corpi presi naturalmente a considerare linee che si scomponessero perpendicolarmente al campo in tripletti puri e, come per il magnesio, preferii studiare le linee appartenenti alla seconda serie secondaria, che meglio delle altre linee si prestano all'esame perchè il valore elevato della costante $\frac{e}{m}$ che per esse fu determinata, permette un esame più comodo.

Le linee da me studiate furono pel cadmio $\lambda = 4678.37$ e pel mercurio $\lambda = 4046,3$. Qui accennerò solo alle esperienze sul cadmio: risultati analoghi ho ottenuto sui vapori di mercurio usando la luce emessa da tubi di Geissler appositamente costruiti per lo scopo di questo lavoro; ma l'esposizione di tali esperienze richiederebbe qui troppo spazio: esse saranno esposte ampiamente in un lavoro d'insieme in cui ho in animo di riassumere questi studî.

Come per il magnesio, anche per tali corpi il confronto avvenne conducendo contemporaneamente sulla fenditura dello spettroscopio la luce emessa longitudinalmente al campo attraverso i fori dell'elettro-magnete e quella emessa perpendicolarmente.

La luce emessa dai vapori di cadmio fu ampiamente studiata, specialmente dopo le esperienze di Michelson, al Bureau International de Métrologie. Michelson stesso e Hamy poi, diedero il modo di ottenere questa luce da tubi a vuoto, specie di tubi di Geissler a vuoto molto spinto in cui si fa avvenire la scarica di un rocchetto dopo averli scaldati a sufficienza (300° circa) per ottenervi una certa densità di vapore del cadmio ivi chiuso. Ma questi dispositivi, se bene si prestano per esaminare la luce emessa da tali tubi longitudinalmente ai tubi stessi, non si prestano per esaminare (come per il confronto che mi proponevo era necessario) la luce emessa in direzione normale alla precedente, pel fatto che la parte strozzata del tubo ben presto si copriva nei tubi da me costruiti a cominciare dalla estremità più prossima all'elettrodo + di un deposito nerastro che impediva l'uscita della luce. Per questa ragione abbandonai dopo alcune prove l'idea di costruire i tubi

di forma speciale che pel mio scopo abbisognavano, e ricorsi nuovamente, come pel magnesio, alla scintilla fra elettrodi di cadmio. A ciò mi adattai solo per necessità, perchè l'esperienza coi tubi mi avrebbe consentito anche pel cadmio precisione maggiore.

Hamy ha dimostrato con metodi interferenziali [1] che nella luce emessa dalla sua lampada la linea 4678 qui studiata è doppia a componenti uguali: fornisce frangie che si separano completamente allorchè la differenza di cammino dei due raggi interferenti è 7 cm., e che sono ancor completamente visibili quando tale differenza di cammino è di 21 cm. Nei raggi incomparabilmente meno netti emessi dalla scintilla, sarebbe forse ben difficile ricercare tali particolarità.

Nel presente studio adoperai come in quello sul magnesio un reticolo di Rowland del raggio di m. 3,22 con una superficie rigata di 8 cm. e 568 righe per mm. La montatura è quella di Rowland. Alla fenditura di precisione venne data sempre una larghezza di circa cm. 0,03. Il rocchetto usato per lo studio del cadmio e la capacità del circuito di scarica erano gli stessi del lavoro precedente: l'autoinduzione dovette essere alquanto aumentata per ottenere una sufficiente nettezza delle righe. Alla scintilla, che avveniva nell'interspazio dei poli di un elettromagnete di Weiss e, come per il magnesio, perpendicolarmente alle linee di forza, fu data una lunghezza di circa 2 mm. Fu usata anche qui la stessa disposizione stigmatica del reticolo che fu descritta a proposito del precedente studio. Però per ricercare se le lunghe pose, che si rendevano così necessarie, avessero una qualche influenza a causa della inevitabile variabilità del campo allo scaldarsi degli avvolgimenti dell'elettromagnete, sul risultato delle esperienze, venne anche tolta la lente suddetta e fatte pervenire direttamente sulla fenditura (la cui lunghezza utile era di cm. 1,5), a qualche distanza l'una dall'altra, le due immagini della scintilla dovute rispettivamente alla luce emessa longitudinalmente e perpendicolarmente al campo magnetico. Analogamente a quanto avvenne pel Mg le misure sui clichés si effettuavano con un comparatore che può dare il centesimo di mm. Il campo magnetico usato in queste misure sul cadmio fu misurato in base allo sdoppiamento del doppietto e alle determinazioni della costante $\frac{e}{m}$ fatta da Cotton e Weiss per le linee analoghe allo zinco. Esso risultò nelle varie fotografie intorno ai 16800 gauss. Ebbi anche qui cure specialissime di dare ai due spettri da confrontarsi uguale chiarezza e ciò diminuendo convenientemente l'intensità della luce longitudinale. L'esame avvenne pel cadmio nello spettro del secondo ordine, pel mercurio nel terzo ordine. Il reticolo da me usato ha una speciale luminosità nell'estremo violetto (ove cade la 4047) del terzo ordine,

[1] Hamy, C. R. 1894.

dove il potere risolutivo del reticolo raggiunge 150.000 e ciò mi permise di eseguire le fotografie in tale regione in un tempo molto breve (5 o 6 primi). Le lastre adoperate furono lastre Lumière marca Σ.

Dalle misure risulta, d'accordo colle osservazioni precedenti, che la dissimetria del tripletto risulta insensibile tanto per la riga Cd,$\lambda = 4678$ che per la Hg $\lambda = 4047$.

Risultò invece anche qui l'esistenza di una differenza degli sdoppiamenti nelle due direzioni. Pel cadmio la misura fu relativamente facile e risultò sulle fotografie che la distanza delle linee laterali del tripletto è maggiore di quella delle linee del doppietto di 3 cmm., corrispondenti a 0,07 unità Ångström. Molto più difficile, nonostante la nettezza maggiore delle righe che si può raggiungere coi Geissler, fu la misura per quanto riguarda il mercurio. Come ho detto il vapore era portato all'emissione in un tubo il cui capillare era disposto normalmente al campo: ora occorre qui tener presente che, per le riflessioni che avvengono sulla superficie del capillare, le radiazioni emesse nelle varie direzioni sono sempre parzialmente sovrapposte come risulta subito evidente dal fatto che in tutti i miei clichés (una quindicina) tra le due righe del doppietto longitudinale compare sempre abbastanza visibile la linea interna del tripletto. Approfittando degli insegnamenti contenuti in proposito in una recentissima pubblicazione del prof. Zeeman (1), ho ultimamente eseguito, ed ora sto studiando, delle fotografie in cui mediante un nicol ho tentato di estinguere questi raggi riflessi: devo dire però che l'estinzione della riga mediana non mi è riescita completamente. Se qualche deduzione può trarsi dalle numerose fotografie fin qui eseguite dirò che, avendo cura di far le pose più brevi possibili, e puntando il microscopio nel comparatore sul massimo di impressione della riga, potei anche per questa linea constatare che le righe laterali del tripletto (o almeno i massimi di impressione) hanno una distanza che supera sulle lastre quella dei punti corrispondenti delle linee del doppietto longitudinale di 2 cmm. corrispondenti a 0,04 A°. Come ho detto, mi riserbo di ritornare su questo punto cui annetto grandissima importanza, usando tubi con capillari più sottili di quelli adoperati (diametro mm. 1,8) tali da eliminare le riflessioni accennate.

La concordanza di queste osservazioni mi induce però a ritenere confermate le deduzioni già tratte pel magnesio; e cioè:

1°, come realmente esistente per le linee della seconda serie secondaria degli elementi del secondo gruppo di Mendelejeff (a cui le linee studiate appartengono) una differenza tra gli sdoppiamenti nelle due direzioni principali di osservazione.

2°, che tale differenza non segue le leggi che la teoria ha fatto prevedere.

(1) P. Zeeman, Phys. Zeitschr, 1 gen. 1910.

Geologia. — *Osservazioni sull'alto bacino del Noce (Tirreno).* Nota del dott. R. ALMAGIÀ, presentata dal Socio G. DALLA VEDOVA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Minerologia. — *Sugli acidi silicici di Tschermak* [1]. Nota del dott. AURELIO SERRA, presentata dal Socio STRUEVER.

Nel 1903 G. Tschermak [2] faceva conoscere un nuovo metodo d'indagine della costituzione chimica dei silicati, consistente nella determinazione dell'acido silico dal quale ciascuno di essi deriva. Il metodo di Tschermak consiste, com'è noto, nel decomporre i silicati alla temperatura ordinaria o a non più di 70° con acido cloridrico diluito e nello studio delle variazioni di peso che subisce l'acido silicico ottenuto e purificato, tenuto all'aria. Pesando ad intervalli fissi l'acido stesso, si osserva che dapprima la differenza fra due pesate successive è assai grande, mentre bruscamente in seguito diventa più piccola. Tschermak ha ammesso che la variazione repentina nella quantità di acqua che sfugge in un dato tempo indica l'eliminazione totale dell'acqua meccanicamente commista, dimodochè determinando in quel momento il rapporto Si : H, si verrebbe a conoscere la composizione dell'acido silicico dal quale dovrebbe derivare il silicato studiato.

Tschermak ed i suoi allievi, ai quali si è unito in Italia il Baschieri [3], hanno eseguito molte determinazioni su parecchi silicati giungendo a risultati non sempre in accordo con quelli prevedibili *a priori.* Sopra tutto strano fu il fatto che mentre il metodo di Tschermak conduceva a considerare l'olivina $(Mg\,Fe)_2\,Si\,O_4$ come un metasilicato, il metodo stesso stabiliva che la monticellite $Ca\,Mg\,Si\,O_4$ era, invece, un ortosilicato, mentre le intime relazioni che passano fra i due minerali non permettono di supporre che nella loro costituzione chimica intercedano differenze essenziali.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Sassari.

(2) *Ueber die chemische Konstitution der Feldspathe.* Sitzungsber. der Akad. der Wissensch. in Wien, 1903, CXII, Abt. I, 355. *Darstellung von Kieselsäuren durch Zersetzung der natürlichen Silicate.*

(3) *Studio sulla costituzione delle zeoliti,* Processi verbali Soc. toscana di Scienze Nat., Seduta del 3 marzo 1907. *Sulla costituzione dell'ilvaite,* Ibidem, 5 maggio 1907. *Nuove considerazioni sulla costituzione dell'ilvaite.* Ibidem, 8 marzo 1908. *Nuovo contributo allo studio della costituzione chimica delle zeoliti,* Memoria della stessa Società, vol. XXIV.

Un altro fatto assai grave fu che, esperimentando sulla lievrite elbana, esattamente con la stessa tecnica, Himmelbauer [1] ottenne a Vienna un acido con 24,06 e 22,79 % H_2O, e Baschieri [2] a Pisa uno con 29,52 e 31,76 % H_2O, il che faceva sorgere il dubbio che minime differenze non avvertite nelle condizioni delle esperienze possano influire assai fortemente sulla composizione chimica degli « acidi » di Tschermak. Ciò era del resto facilmente supponibile da chi conosceva i lavori splendidi di van Bemmelen sugli idrogeli silicei, lavori ignoti a Tschermak come egli stesso ha riconosciuto; ed appunto dai conoscitori di tali lavori — Jordis [3], Mügge [4] e Zambonini [5] prima e dallo stesso van Bemmelen [6] poco dopo — furono mosse numerose e gravi obbiezioni al metodo di Tschermak. Questi recentemente [7] ha riassunte le sue osservazioni e le sue difese in un lavoro che tende a porre la questione nei suoi veri termini, perchè in esso lo Tschermak non dà più al suo metodo il valore assoluto che gli aveva prima assegnato, e, di più, riconosce che, come già da un anno innanzi per il primo aveva obbiettato Zambonini, il metodo stesso non può applicarsi senz'altro che a quei silicati che il Vernadskij chiamò semplici. Inoltre Tschermak cominciò anche ad ammettere che nei suoi « acidi » possano entrare in gioco, per quel che riguarda l'acqua, i fenomeni di assorbimento, venendo così ad onta di tutta la sua abilità polemica, a riconoscere il fondamento di esattezza sul quale poggiano le critiche degli studiosi su indicati.

Mügge (l. cit.), studiando la natrolite, è arrivato al risultato che la tensione del vapor d'acqua, nell'ambiente nel quale vien posta la silice ottenuta da quel minerale, esercita una forte influenza sulla sua composizione centesimale. Mancavano però, finora, esperienze sistematiche atte a stabilire se le variazioni nelle condizioni sperimentali influiscano e quanto sulla composizione degli acidi di Tschermak. Il prof. Zambonini mi consigliò di studiare sotto questo punto di vista la leucite, minerale del quale era facile avere una certa quantità; e mi è grato esprimergli qui i miei più vivi ringraziamenti per i consigli dei quali mi è stato prodigo nell'esecuzione del lavoro.

[1] *Ueber Lievrit und die Datholithgruppe*. Sitzungberichte der k. Akad. der Wissensch. in Wien, 1905, CXV, Abt. I, 1177.

[2] Loc. cit.

[3] *Zur Chemie der Silikate*. Zeitsch. f. angew. Chemie, 1906, XIX, Heft. 41. — *Ueber kolloidale Kieselsäure*. Zeitsch. f. Chemie und Industrie der Kolloide, 1906, Heft. 4.

[4] *Bemerkungen und Versuche zu Tschermak's Methode der Darstellung vom kieselsaüren* etc. Centralblatt für Min. Geol. etc. 1908, 129.

[5] *Contributo allo studio dei silicati idrati*. Memoria estratta Atti Reale Accademia Scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XIV, serie 2ª.

[6] *Die Absorption*. Das Wasser in den kolloiden, besonders in dem Gel der Kieselsäure. Zeitsch. f. anorg. Chemie 1897, XIII.

[7] *Zur Teorie der silicate*. Zeitschr. f. kryst. 1901, XXXIV, 37.

La leucite che ho avuto a mia disposizione proveniva dal noto giacimento del Tavolato ed era sotto forma di netti cristalli assai puri, che furono, del resto, purificati con ogni cura. La sostanza fu polverizzata in un mortaio d'agata e la polvere passata attraverso un setaccio a maglie strette, in modo da ottenere un campione molto uniforme. Furono instituite tre serie di esperienze, adoperando in una acido cloridrico concentrato di densità 1,19 e nelle altre due acido cloridrico variamente diluito, di densità 1,072 nella seconda serie e 1,050 nella terza. In tutte le esperienze vennero impiegati gr. due di leucite e furono messi insieme con un determinato numero di cc. di HCl. Quando il minerale fu completamente ottenuto e la silice separata in fondo al *becker*, il liquido soprastante venne sifonato e sostituito giornalmente con eguale volume di acqua distillata sino a lavaggio completo: ossia fino a tanto che non si ottenne più la reazione del cloro per l'aggiunta di $AgNO_3$. Nelle esperienze N. 6, 12, 18 fu adoperata la temperatura del bagno maria soltanto durante il tempo necessario all'attacco del minerale, terminato il quale nel tempo occorso per il lavaggio si tennero i *becker* alla temperatura di 14°. Nelle esperienze N. 5, 11, 17 il minerale fu tenuto a 40°, non solo durante la decomposizione, ma fino a lavaggio completo della silice ottenuta. Nelle esperienze eseguite a temperatura diversa da quella dell'ambiente, si provvide sempre a rimpiazzare l'acido evaporato, in modo che la sua quantità e la sua concentrazione non subissero variazioni durante l'esperienza.

La silice, ricavata in ciascuna esperienza aveva sempre aspetto intermedio fra il gelatinoso ed il polverulento; venne raccolta un su vetrino e pesata sino a peso costante, anzichè fino al « knick » di Tschermak, perchè la rapidità con la quale si giunse in vicinanza del peso costante non permise di determinarlo esattamente, se pure realmente esiste. Ciò non può, peraltro, influire nelle conclusioni che si trarranno dalle esperienze eseguite, perchè se in tutti i casi l' « acido » di Tschermak fosse stato identico, evidentemente la perdita di peso fra il momento corrispondente al « knick » e quello in cui si raggiunse il peso costante sarebbe stato sempre la stessa. L'acqua contenuta nelle diverse silici fu determinata, per arroventamento in una lampada Teclu, fino a peso costante. Nella tabella che segue sono riuniti tutti i dati sperimentali ottenuti:

Numero di esperienza	HCl di densttà	Quantità usatane cc.	Temperatura	Acido silicico ottenuto	H_2O %	Tempo impiegato per il lavaggio
1	1,19	100	14°	1,0780	23,00	12 giorni
2	1,19	200	14	1,2960	23,22	12 »
3	1,19	200	14	1,3060	23,20	12 »
4	1,19	400	14	1,2100	23,47	12 »
5	1,19	200	40°	1,2280	26,14	11 »
6	1,19	200	b. m.	1,1290	20,90	10 »
7	1,07	100	14°	1,3190	26,76	10 »
8	1,07	200	14	1,2300	24,23	10 »
9	1,07	200	14	1,3950	24,27	10 »
10	1,07	400	14	1,2790	24,55	9 »
11	1,07	200	40°	1,130	20,10	9 »
12	1,07	200	b. m.	1,1400	22,11	8 »
13	1,05	100	14°	1,2620	25,67	10 »
14	1,05	200	14	1,4720	27,03	11 »
15	1,05	200	14	1,2200	25,00	10 »
16	1,05	400	14	1,3280	25,68	9 »
17	1,05	200	40°	1,0440	31,80	8 »
18	1,05	200	b. m.	1,2490	24,90	8 »

Come si vede, la temperatura alla quale il minerale viene decomposto, quella alla quale l'« acido silicico » ottenuto viene tenuto fino a raggiungere il peso costante, la quantità e la concentrazione dell'acido cloridrico che si adopera per attaccare la leucite, influiscono fortemente sulla composizione della silice che si ottiene. Questa, infatti, contiene acqua in quantità variabile fra il 20 e il 31,80 %, dimodochè l'acido dal quale può supporsi derivi la leucite in base alle esperienze riferite presenta un rapporto $H_2O : SiO_2$ oscillante fra 1 : 1,19 e 1 : 0,64: potrebbe, quindi, avere le due formole estreme

$$H_{10}\,Si_6\,O_{17} \quad e \quad H_6\,Si_2\,O_7 .$$

Nè bisogna dimenticare che le mie esperienze portano in loro stesse la misura dell'esattezza con la quale furono eseguite: in ciascuna serie le due esperienze condotte con la medesima quantità di acido e nelle identiche condizioni hanno dato risultati concordanti fra loro. Ciò dimostra che le variazioni irregolari osservate nella composizione degli « acidi silicici » ottenuti dalla leucite non dipendono da inesattezze sperimentali, ma che, invece, un metodo che conduce a tali risultati disparati non può certo pretendere di essere posto a base delle nostre ricerche sulla costituzione dei silicati.

Chimica. — *Un apparecchio di laboratorio, per la preparazione del fluoro* [1]. Nota I di Gino Gallo, presentata dal Socio E. Paternò.

Il classico tubo ad U di platino del Moissan [2] per la preparazione del fluoro, mediante elettrolisi dell'acido fluoridrico anidro, reso conduttore con fluoridrato potassico, non è in realtà molto economico, per un laboratorio scientifico non dotato di mezzi eccessivamente larghi, ragione per cui lo stesso Moissan ha eseguito, con buon risultato, delle ricerche per sostituire al tubo di platino, un tubo di rame. La disposizione è perfettamente la stessa; e cioè ciascuna branca del tubo ad U, viene chiusa per mezzo di un tappo a vite, nel quale è inserito un cilindro di fluorina, attraversato a sua volta da un elettrodo di platino. Alla parte superiore di ciascuna branca del tubo viene saldato un tubo a svolgimento per il fluoro da una parte, e per l'idrogeno dall'altra.

Questo apparecchio presenta però, come quello di platino, l'inconveniente di richiedere una quantità abbastanza forte di acido fluoridrico anidro; inoltre la chiusura a vite con tappi isolanti di fluorina, non è molto facile, data la difficoltà che presenta la fluorina ad essere lavorata, per la sua tendenza a sfaldarsi; infine la saldatura dei tubi a sviluppo, costituisce un punto debole dell'appareccio in rame, per la rapidità con cui viene attaccata dall'acido fluoridrico e specialmente dal fluoro.

Successivamente Poulenc e Meslans [3] hanno costruito un apparecchio in rame, riportato in tutti i trattati, nel quale essi si propongono di ottenere il fluoro libero, risolvendo le tre condizioni seguenti:

1. Soppressione degli isolanti in fluorina, ed inoltre di qualunque saldatura nello spazio anodico, in cui si sviluppa il fluoro.

2. Impiego di un diaframma inattivo dal punto di vista elettrolitico fra lo spazio anodico e quello catodico, diaframma, che pur offrendo la minore resistenza possibile, permetta una separazione completa dei due gas idrogeno e fluoro, che si sviluppano durante l'operazione.

3. Realizzazione di un dispositivo tale da permettere di aumentare la superficie utile degli elettrodi, e di ridurre al minimo lo strato di elettrolita interposto fra loro, in modo da diminuire la resistenza elettrica dell'apparecchio, e da cui deriva un minore riscaldamento del bagno.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica applicata della R. Scuola Ingegneri di Roma.

(2) H. Moissan, *Le fluor et ses composés*. Ed. Steinheil, Paris.

(3) Poulenc et Meslans, *Revue général de l'acétyléne*, 230, 1900.

L'apparecchio di Poulenc e Meslans sia per uso industriale, che per laboratorio, consta, come è noto, di un vaso cilindrico esterno in rame, contenente l'elettrolita, e funzionante da catodo; il vaso viene chiuso con un coperchio, fissato al vaso inferiore mediante dei bulloni di ferro a vite, ed isolato da quello per mezzo di un disco di gomma. Al coperchio stesso viene *saldato* nella parte interna un cilindro di rame, chiuso alla parte inferiore, e che, funzionando da diaframma, porta in basso dei fori praticati sulla parete cilindrica; entro a questo cilindro viene inserito, attraverso il coperchio, un tubo di rame, *saldato* al fondo del cilindro, rivestito alla parte inferiore di una lamina di platino, e destinato a costituire l'anodo. Il coperchio stesso viene collegato col polo positivo della sorgente di energia elettrica. Il fluoro e l'idrogeno che si devono svolgere rispettivamente nello spazio anodico ed in quello catodico, vengono inviati entro due tubi di rame, avvolti, sopra il coperchio, a serpentino, che funziona da refrigerante a riflusso.

Dovendo io, per alcune ricerche che avevo in animo di compiere, come dirò in altra Nota, ottenere del fluoro libero, mi parve che l'apparecchio dei sigg. Poulenc e Meslans, rispondesse meglio allo scopo, e ne ho fatto perciò costruire uno, secondo le indicazioni date dagli autori.

La preparazione dell'acido fluoridrico anidro, venne fatta col processo Fremy ([1]) per decomposizione del *fluoridrato potassico secco.* Circa la preparazione del fluoridrato secco si hanno due versioni: dapprima si prepara l'acido fluoridrico acquoso esente da silice, neutralizzando una quarta parte dell'acido del commercio con carbonato potassico, e distillando il miscuglio a 120° in un bagno di olio. A questa temperatura il fluosilicato di potassio non viene decomposto, e si ottiene un acido esente da silice. Secondo il Moissan (l. c.) questo acido viene allora diviso in due parti, e si satura esattamente la prima metà con carbonato potassico; la soluzione di fluoruro potassico viene allora addizionata con l'altra porzione di acido fluoridrico per avere il fluoridrato. *Quest'ultimo sale viene allora disseccato a b. m. a. 100°* e la capsula di platino che lo contiene viene posta nel vuoto, in presenza di idrato potassico fuso e di acido solforico. L'acido e la potassa vengono rinnovati tutte le mattine per 15 giorni consecutivi.

Mediante l'evaporazione a secco a b. m. il fluoridrato potassico si trasforma, dopo raffreddamento, in una massa dura e compatta, che deve venire triturata in mortaio di ferro per ridurla in polvere. Il sale così preparato e dopo essiccamento nel modo anzidetto, sottoposto a distillazione in istorta di platino perfettamente chiusa ed in comunicazione con un serpentino e con un recipiente di platino immerso in ghiaccio e sale, non fornisce che una piccola quantità di acido fluoridrico anidro, e precisamente, per dare un' idea, 500 gr. di fluoridrato secco, danno solo da 3 a 5 gr. di acido fluoridrico anidro.

([1]) Ann. Chem. Ph. (3), 47, 5, 1856.

Secondo l'altra proposta [1] si aggiunge a poco a poco, ad uno o due kg. di acido fluoridrico puro di silice e titolato, contenuto in una capsula di argento raffreddata esternamente con acqua, la quantità calcolata di carbonato di potassio puro e secco necessario per ottenere il sale acido; il fluoridrato si depone allora sotto forma di una gelatina trasparente; dopo completo raffreddamento, lo si raccoglie in un pannolino e si lascia sgocciolare per 12 ore. Il sale viene quindi disteso su dei fogli di carta da filtro, che si rinnovano fino a che non vengano bagnati dal sale; s'introduce quindi il sale nel vuoto per parecchi giorni, in presenza di potassa fusa. Come si vede in questo secondo caso, si evita il riscaldamento a b. m., ed il sale si conserva in uno stato granulare minutamente cristallino. Se nonchè il suo essiccamento completo richiede un tempo molto più lungo. La quantità di acido fluoridrico anidro che si ottiene, è un po' più elevata che non nell'altro caso (e cioè circa 10 gr. di HF per 500 gr. di fluoridrato), ma sempre di gran lunga inferiore, alla quantità calcolata dalla formula KF.HF, che viene ammessa per il fluoridrato potassico.

Per evitare uno spreco troppo grande di carbonato di potassio puro, si può utilizzare, come io ho fatto, il residuo di fluoruro potassico, che rimane nella storta di platino dopo distillazione, per preparare nuovo fluoridrato, mediante trattamento colla quantità necessaria di acido fluoridrico acquoso.

La decomposizione poi del fluoridrato secco, per ottenere dell'acido fluoridrico anidro, ed il maneggio di quest'ultimo, sono operazioni estremamente delicate, che richiedono una pratica sperimentale, che si fa dapprima a proprie spese. L'apertura della bottiglia in cui l'acido si è raccolto, provoca un getto di fumi che arrivando in contatto solo per qualche istante colle mani, determinano delle scottature dolorosissime, con corrosione profonda dei tessuti, e febbre che dura per 2 o 3 giorni. Anche il lavaggio successivo con soluzione di soda caustica, non è sufficiente a neutralizzare l'azione dell'acido; la pelle indurisce alla superficie, mentre al disotto si va formando man mano del pus. Io impiegavo con buon risultato dei lavaggi, per iniezione al disotto dello strato di pelle dura, con soluzione sterilizzata all'1 per cento di idrato sodico. In tutte queste operazioni è necessario però ricorrere all'impiego di guanti di gomma. Quanto all'azione di fumi diluiti dell'acido sulle vie respiratorie e sulla vista, io che da più di due anni mi ci trovo in mezzo, devo dire che non ho risentito alcun danno.

La piccola quantità di acido fluoridrico così ottenuta in una sola distillazione, non era sufficiente per arrivare a stabilire il contatto fra gli elettrodi del mio apparecchio, in cui erano necessari circa 30 gr. di HF; e perciò dovevo ripetere due o tre volte la preparazione del fluoridrato secco, e la distillazione, ciò che richiedeva da 2 a 3 mesi di tempo. Una volta pre-

[1] Moissan, *Traité de chimie minérale*, tom. I, pag. 78 e Fremy, l. c.

parato l'acidro anidro, era necessario introdurre questo rapidamente nell'apparecchio di elettrolisi perfettamente secco. Per far ciò, siccome la chiusura del coperchio mediante i bulloni a vite in ferro, richiede un tempo abbastanza lungo, durante il quale l'acido può assorbire direttamente dell'acqua, io credetti necessario di introdurre dapprima nell'apparecchio solo il fluoridrato potassico, riunire quindi le due parti ed eseguire il riempimento attraverso uno dei tubi a serpentino piegato opportunamente entro la bottiglia dell'acido fluoridrico, e provocando dall'altro tubo un'aspirazione mediante una pompa a mercurio. Data però la piccola quantità di acido fluoridrico prodotto in ogni distillazione, e la lunghezza del serpentino, avveniva che le prime porzioni di acido non arrivavano nemmeno all'interno, e solo dopo ripetute aggiunte, ho potuto stabilire il contatto fra i due elettrodi.

L'introduzione dell'HF nell'apparecchio risulta quindi in ambedue i casi oltremodo incomoda e poco pratica.

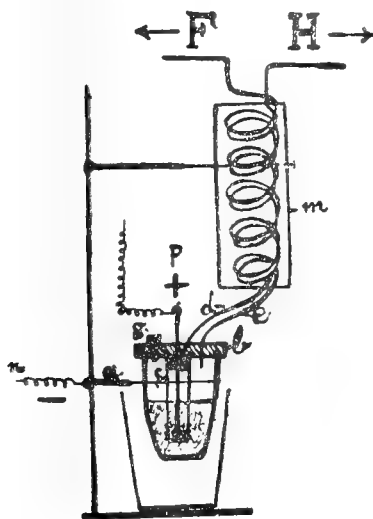
Ho iniziato allora l'esperienza, immergendo l'apparecchio in cloruro di metile liquido, ed inviando attraverso all'elettrolita una corrente di 50 Volt e di 2 o 3 Ampère. Ho ripetuto parecchie volte l'esperienza, ma inutilmente; non si aveva sviluppo di fluoro, ma solo di idrogeno, al polo negativo.

Cercando di spiegarmi questo comportamento, ho smontato l'apparecchio, e studiai bene le condizioni di questo. In primo luogo il disco in gomma che doveva isolare le due parti dell'apparecchio, era stato fortemente intaccato dai fumi dell'acido, e disgregato in una sostanza umidiccia, che si estendeva fino quasi ai bulloni a vite; questa non poteva perciò stabilire più un buon isolamento elettrico.

Le saldature che univano il cilindro ed il tubo di rame al coperchio, erano state profondamente intaccate dall'acido fluoridrico; inoltre la parete esterna del diaframma presentava una bellissima superficie di rame lucente, e risultava fortemente intaccata, mentre l'acido teneva in soluzione una forte quantità di rame. Dunque era avvenuto quanto si poteva prevedere *a priori*. L'elettrolisi cioè aveva avuto luogo fra il recipiente esterno (polo negativo), e la superficie esterna del diaframma, che, essendo saldato al coperchio, funzionava direttamente da polo positivo, e perciò nello stesso spazio catodico si aveva separazione di idrogeno e fluoro, il quale in parte intaccava il rame, per dare fluoruro di rame ed in parte si ricombinava all'idrogeno.

Io ho cercato allora di modificare l'apparecchio, riducendone la capacità, ed isolando le due parti con un disco di ebanite. Sostituii le saldature del diaframma e del tubo di rame al coperchio, con degli attacchi a vite. Inoltre, contrariamente a quanto propongono gli autori, isolai il tubo di rame funzionante da anodo, dal fondo del diaframma, ed infine cercai di rendere non conduttore il diaframma stesso, ricoprendolo con una vernice

isolante. Preparai quindi nuova quantità di acido fluoridrico anidro, e ripetei l'esperienza. Il fluoro non si otteneva, e ciò perchè non mi fu possibile trovare una vernice resistente all'azione dell'acido fluoridrico anidro, e del fluoro; quando solo un punto della superficie di rame del diaframma veniva scoperto, questa incominciava subito a funzionare da elettrodo, dando luogo alla soluzione del rame, senza separare il fluoro.

Quindi l'apparecchio di Poulenc e Meslans, almeno come è descritto dagli autori, non risponde affatto alle condizioni esposte in principio, e sebbene sembri a prima vista molto semplice e pratico, esso risulta, in modo assoluto, inadatto alla preparazione del fluoro.

Ammaestrato da questa lunga serie di tentativi, io ho costruito un semplice apparecchio da laboratorio, il quale se ricorda nelle sue linee generali quello di Poulenc e Meslans, non ne presenta però gli inconvenienti. L'apparecchio è poco costoso e di facile costruzione, e, ciò che è più interessante, richiede piccole quantità di acido fluoridrico anidro.

Esso consta (vedi figura) di un crogiuolo ordinario di platino, della capacità di circa 50 cc., il quale viene sostenuto da un anello metallico (*a*), che lo mette in comunicazione col polo negativo della corrente. Il crogiuolo può venire saldato con un coperchio di solfo (*b*), che per la sua facile fusibilità si presta molto bene a qualunque lavorazione, è inoltre un buon isolante elettrico, non viene attaccato dall'acido fluoridrico anidro, e dopo fusione, aderisce fortemente al platino. Il coperchio si ottiene facilmente fondendo dello solfo, entro un *becher* di dimensioni convenienti, e lasciandolo poi raffreddare. Al momento della solidificazione si sbatte leggermente il *becher* sopra un tavolo, per provocare una cristallizzazione minuta dello solfo, e quindi per ottenere una massa compatta. Per staccare la massa, del-

l'altezza di 1 cm. e mezzo circa, dal vetro, si riscaldano debolmente le pareti del bicchiere e quindi si estrae il disco di solfo che funzionerà da coperchio. Nella parte centrale del disco di solfo, viene saldato un cilindretto di platino (*c*), di lunghezza tale da non toccare il fondo del crogiuolo; il cilindretto, chiuso alla parte inferiore, porta in basso dei forellini sulla parete laterale, allo scopo di stabilire una comunicazione fra il suo interno e l'esterno. Esso si prepara avvolgendo una lamina di platino su sè stessa, inserendo i bordi uno dentro l'altro a spina, e fissandoli per compressione. Il fondo del cilindro si chiude o con un disco di platino a tenuta, o più semplicemente con un dischetto di zolfo dello spessore di 2 o 3 mm., che si fa aderire mediante fusione alle pareti interne del cilindro.

Alla parte superiore del cilindretto si applica, a due centimetri dal bordo, un disco di fluoruro potassico fuso, che viene attraversato da un grosso filo di platino, avvolto a spirale, che arriva sino quasi al fondo del cilindretto, e dal tubo a sviluppo *d*. Si ricopre il disco con un piccolo strato di fluoruro di calcio in polvere, e quindi si cola nella cavità rimanente, fino al livello del coperchio, dello solfo fuso, mentre l'estremità del filo di platino rimane scoperta al disopra del tappo, e serve a stabilire il contatto col polo positivo. Il disco di fluoruro di potassico, e lo strato di fluoruro di calcio, hanno lo scopo di evitare che il fluoro che si svilupperà nell'interno del cilindretto, in corrispondenza del filo di platino che funziona da polo positivo, arrivi in contatto collo solfo, col quale reagirebbe. In tali condizioni, come si vede, il diaframma di platino rimane perfettamente neutro, dal punto di vista elettrico; e non si incorre nell'inconveniente che l'acido fluoridrico porti in soluzione dei metalli estranei, come nel caso dell'impiego del rame. Una volta preparato così il coperchio, si riscalda debolmente il crogiuolo di platino, e quindi, con precauzione, lo si adatta al di sotto del coperchio stesso; in corrispondenza del bordo, in cui il crogiuolo arriva in contatto dello solfo, questo fonde, e, dopo raffreddamento, aderisce fortemente al crogiuolo, che vi si è introdotto per circa 1 cm., in modo da assicurare una chiusura ermetica e resistente.

Si riscalda quindi il tubo di rame a sviluppo *e*, e lo si applica in un apposito foro del coperchio, in corrispondenza della cavità catodica; per raffreddamento lo zolfo aderisce anche a questo tubo. I due tubi di rame *d* ed *e*, che servono rispettivamente allo sviluppo del fluoro da una parte, e dell'idrogeno dall'altra, sono avvolti, all'esterno, a serpentino; i serpentini sono inseriti in un manicotto (*m*), il cui interno può contenere un miscuglio frigorifero.

L'introduzione dell'acido fluoridrico anidro, insieme al fluoridrato, per rendere quello conduttore, si fa attraverso ad un'apposita apertura *g*, praticata ancora nel coperchio, apertura che si può chiudere mediante un tappo di solfo, che viene quindi fissato mediante fusione. Come si vede il riempi-

mento quindi è molto facile ed offre un grande vantaggio sul metodo di Poulenc e Meslans.

Dopo avere constata la perfetta tenuta dell'apparecchio in tutte le sue parti, facendo passare attraverso i due tubi *d* ed *e* una corrente d'aria secca, e verificato l'isolamento elettrico fra il crogiuolo ed il cilindretto, e fra questo e l'elettrodo *p*, si immerge il crogiuolo stesso entro un recipiente in cui si trova un miscuglio frigorifero; si introducono dapprima attraverso l'apertura (*g*) 3 o 4 gr. di fluoridrato potassico perfettamente secco, e quindi per mezzo di un imbuto di argento, la quantità di acido fluoridrico anidro di cui si dispone.Io ho potuto constatare che col mio apparecchio anche 5 gr. di acido fluoridrico anidro, sono sufficienti per permettere un'elettrolisi regolare. Si chiude tosto l'apertura coll'apposito tappo, e si tengono chiuse inoltre le estremità dei tubi *d* ed *e*, mediante due cannelli di rame, chiusi ad una estremità con mastice *chattetorn* (1), ed adattati quindi sui due tubi *d* ed *e*, con due tubicini di gomma. Montato così l'apparecchio, esso è pronto a qualunque momento per eseguire l'esperienza.

A tale scopo, si immerge il crogiuolo in cloruro di metile che bolle tranquillamente a — 23, contenuto preferibilmente entro un recipiente a doppia parete; si introduce un miscuglio frigorifero di ghiaccio e sale nel manicotto *m*, per trattenere le traccie di acido fluoridrico che possono venire trascinate dai due gas, si aprono i due tubi *d* ed *e*, e si stabilisce il contatto coi poli della sorgente elettrica e cioè in *n*, il polo negativo, in *p*, il polo positivo; io impiegai una corrente di 40 Volt, e 2-3 Ampère; e perciò nel circuito elettrico inserivo, oltre la resistenza, un voltmetro ed un amperometro. Dapprima la corrente oscilla, ma dopo alcuni minuti, essa diventa stazionaria, ed incomincia, attraverso il tubo *d*, uno sviluppo regolare di fluoro, che si può riconoscere per tutte le sue energiche proprietà caratteristiche, ed in particolar modo perchè carbonizza ed accende un pezzo di sughero avvicinato al tubo a sviluppo; per il tubo *e* si svolge l'idrogeno.

Per cui riassumendo, l'apparecchio da me proposto offre i seguenti vantaggi:

I. Vengono esclusi il rame, ogni saldatura metallica, e qualunque altro metallo che possa venire attaccato dall'acido fluoridrico.

II. È di facile costruzione e di pochissimo costo.

III. Si impiega un tappo di zolfo, che permette di isolare perfettamente, dal punto di vista elettrico, il diaframma di platino.

IV. Si può eseguire l'elettrolisi anche con quantità piccole (5 gr.) di acido fluoridrico anidro.

(1) Mastice costituito di un miscuglio di guttaperca, resina e catrame.

Chimica. — *Sul comportamento crioscopico reciproco di sostanze differenti fra loro per i gruppi* — CO — e — CH_2 — [1]. Nota di L. MASCARELLI e I. MUSATTY, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Per le ragioni esposte in una precedente Nota [2] ci occorreva conoscere con più precisione di quanto non appaia dalla letteratura il comportamento crioscopico di dette sostanze.

Sempre per ragioni, già allora addotte, abbiamo preso in considerazione sostanze che, pure contenendo i gruppi citati, non potessero agire in forma enolica. A ciò soddisfano evidentemente le coppie:

I { difenilmetano: $C_6H_5\,CH_2\,C_6H_5$
  { benzofenone: $C_6H_5\,CO\,C_6H_5$;

II { dibenzile: $C_6H_5\,CH_2\,CH_2\,C_6H_5$
   { benzile: $C_6H_5\,CO\,CO\,C_6H_5$;

queste sostanze hanno anche il vantaggio, che tutte furono già usate come solvente crioscopico, per cui ci era facilitata la ricerca in proposito. Riassumiamo i risultati delle nostre esperienze e diamo le conclusioni, che da tali misure e dai dati, che già si trovano nella letteratura, si possono trarre circa il comportamento crioscopico reciproco.

DELLA COSTANTE DI DEPRESSIONE MOLECOLARE.

Difenilmetano. — Essendoci noto privatamente, che il prof. Bruni aveva nel suo laboratorio, fatto eseguire ricerche, non pubblicate, sulla costante crioscopica del difenilmetano, ci rivolgemmo a lui, ed egli ci comunica quanto segue:

« Per talune ricerche, che per ora rimangono interrotte, appariva desiderabile di conoscere colla massima possibile esattezza la costante crioscopica del difenilmetano. Infatti, tale grandezza fu bensì determinata da Eykmann [3], ma se si tolgono le sostanze anormali ossidrilate, le sue misure

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

[2] Mascarelli e Musatty, Rend. R. Acc. Lincei, *18*, II, 255 (1909).

[3] Zeit. f. Ph. Ch. *4*, 497 (1889).

si limitano all' impiego della naftalina e del fenetolo come sostanze disciolte. Da esse, togliendo pure le determinazioni a concentrazioni troppo elevate (sopra 6 per cento) si calcola un valore medio di $k = 66.4$. Questo non appariva però sufficientemente dimostrato.

D'altra parte M. Padoa nel suo lavoro di laurea, eseguito sotto la mia direzione, aveva (usando il difenile e l'etere dimetilico dell' idrochinone) trovato un valore assai più alto e cioè 71. Parendomi opportuno decidere tale questione, pregai il dott. M. Amadori di ripetere esperienze su scala assai più larga e con difenilmetano di varia provenienza. Si fece perciò arrivare difenilmetano dalle fabbriche C. A. F. Kahlbaum, G. Merck e Th. Schuchardt. Il prodotto di Merck dimostrò di contenere acqua in quantità considerevole. Gli altri due invece avevano un punto di fusione soddisfacente e si fecero quindi con ognuno di essi *tre* serie di misure, sciogliendovi rispettivamente naftalina, difenile e *p*-biclorobenzolo.

Il prodotto di Merck e la quantità degli altri due furono poi sottoposti a rigorosa purificazione, distillandoli ripetutamente e raccogliendo solo la frazione che bolliva assolutamente costante, poscia sottoponendola a ripetute congelazioni frazionate. Col prodotto così purificato furono eseguite *cinque* serie di determinazioni, due con naftalina, una con difenile, una con *p*-biclorobenzolo e una con *p*-bibromobenzolo.

I risultali sono riassunti nella tabella seguente:

Solvente: *difenilmetano*, Kahlbaum:

Sostanza sciolta	Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Costante crioscopica (k)
naftalina: $C_{10}H_8 = 128$	1.191	0.62	66.6
	2.265	1.19	67.2
	2.863	1.50	67.0
difenile: $C_{12}H_{10} = 154$	1.034	0.445	67.7
	2.273	0.995	67.4
	4.331	1.86	66.1
p-diclorobenzolo: $C_6H_4Cl_2 = 147$	1.166	0.54	68.0
	2.174	1.00	67.6
	4.081	1.845	66.4

Solvente: *difenilmetano*, Schuchardt:

Sostanza sciolta	Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Costante crioscopica (k)
naftalina	0.812	0.425	66.9
	3.900	2.01	65.9
difenile	1.262	0.555	67.7
	2.245	0.99	67.9
	3.601	1.55	66.2
p-biclorobenzolo	1.119	0.51	67.0
	2.136	0.98	67.4
	4.002	1.815	66.6

Solvente: *difenilmetano*, purificato in laboratorio:

Sostanza sciolta	Concentrazioni	Abbassamenti termometrici	Costante crisocopica (k)
naftalina	0.993	0.525	67.6
	2.024	1.07	67.6
	3.093	1.62	67.0
	1.249	0.67	68.7
	2.407	1.285	68.3
	3.537	1.86	67.3
difenile	0.986	0.435	67.9
	2.077	0.905	67.1
	3.936	1.69	66.1
p-diclorobenzolo	1.124	0.515	67.3
	3.183	1.445	66.7
	4.323	1.96	66.6
p-bibromobenzolo:	1.836	0.52	66.8
$C_6H_4Br_2 = 236$	2.795	0.80	67.5
	4.155	1.18	67.0

Si vede dai dati ora riportati, che esse sono perfettamente concordanti fra loro e dànno il valore medio generale $k = 67{,}2$ superiore di quasi una unità a quello di Eykman, differenza del resto pressochè trascurabile nella pratica. Il numero di Padoa è quindi invece indubbiamente troppo alto ».

Benzofenone. — Venne impiegato come solvente crioscopico da Eykman (loc. cit.) il quale vi sciolse: difenilmetano, timolo, acido fenilpropionico, aldossima. Siccome di queste sostanze quella che dà maggior garanzia di mostrare comportamento normale è il difenilmetano, così il valore di $k = 98$, dato dalle tavole del Landolt-Bornstein, è stato appunto ricavato dai valori avuti con difenilmetano. Nel caso nostro, trattandosi di decidere sul comportamento crioscopico di sostanze differenti pei gruppi $—CH_2—$ e $—CO—$, si presentava il dubbio, che il valore di k così determinato non rispondesse completamente al vero (qualora i due gruppi sunnominati potessero essere isomorfogeni). Conveniva quindi di rideterminare con altre sostanze la costante di depressione molecolare. Non occorse però far questo, perchè alcuni dati numerici pubblicati qualche anno fa da Padoa e Galeati [1] ci permisero di calcolare il valore seguente:

Corpo sciolto:	Valori di k	Media
m-dinitrobenzolo . . .	108.2 — 105.1 — 98.07	103.8
chinone	94.4 — 88.1 — 86.7	89.7
resorcina	107.9 — 100.6 — 93.5	100.7
	Media generale: $k =$	98.0

[1] Gazz. Ch. It., *35*, I, 189 (1905).

che, come si vede, concorda perfettamente col valore, che si ricava dai dati di Eykman.

Questo ci dice subito, che il comportamento crioscopico del difenilmetano sciolto in benzofenone è normale.

Dibenzile. — La costante di depressione molecolare venne determinata da Garelli e Calzolari [1] e posta $k = 72$. Noi avemmo occasione di rifare, per altre ricerche, alcune determinazioni su un campione di dibenzile (proveniente dalla fabbrica Kahlbaum) che ricristallizzammo tre volte dall'alcool ordinario (p. f. 51°,5-52°). I nostri risultati sono pienamente concordanti con quelli avuti dai sopracitati osservatori: anche noi osservammo, che il dibenzile si presta assai bene a fare buone letture crioscopiche.

Solvente, *dibenzile*: $C_6H_5CH_2CH_2C_6H_5$; p. f. 51°,5-52°.
Corpo sciolto, *naftalina*: $C_{10}H_8 = 128$.

Numero d'ordine	Concentraz. in gr. per 100 gr. di solvente	Abbassamento termometrico (Δ)	Costante crioscopica (k)
1	0.843	0.48	72.9
2	2.201	1.24	72.1
3	0.855	0.50	74.8
4	1.923	1.11	73.9
5	3.031	1.605	67.8
		Media:	$k = 72.3$

Col valore $k = 72$ si calcola per mezzo della nota relazione di van't Hoff il calore di fusione $w = 29.3$. Bogojawlenski e Winogradow [2] che ebbero a determinarlo sperimentalmente più tardi, trovarono:

$$w = 30{,}36.$$

Benzile. — Venne impiegato pel primo da Auwers [3] che ne determinò la costante ($k = 105$) con fenetolo, naftalina, dinitrotoluolo. Questo Autore non fa osservare nulla circa il contegno del benzile nel solidificare; noi notammo, che il punto di congelamento della sostanza pura va crescendo man mano che essa rimane fusa, sicchè non si ottengono letture concordanti se non si lascia fuso per lungo tempo il benzile prima di determinare la sua temperatura di solidificazione. Questo fenomeno non è nuovo e non meraviglia chi si occupa di crioscopia.

Il calore di fusione del benzile che si calcola tenendo per k il valore 105 è $w = 20{,}4$, mentre sperimentalmente Bogojawlenski [4] trovò $w = 22{,}25$.

[1] Gazz. Ch. it., *29*, II, 268 (1899).
[2] Zeit. f. phys. Ch., *64*, 251 (1908).
[3] Zeit. f. Ph. Ch., *30*, 300 (1899).
[4] Schriften d. Dorpater Naturfor. Ges., *13*, 1 opp. Ch. Centralblatt, 1905, II, 946.

I. Misure crioscopiche colla coppia:

difenilmetano: $C_6H_5CH_2C_6H_5$; p. f. 26°; p. eb. 259°,
benzofenone: $C_6H_5COC_6H_5$; d. f. 48°.

Le ricerche con questa coppia di sostanze ci vennero facilitate pel fatto che già nella letteratura [1] esistono determinazioni crioscopiche fatte sciogliendo difenilmetano in benzofenone. I pesi molecolari che in questo caso si calcolano pel difenilmetano sono (conformemente a quanto è detto sopra a proposito della costante di depressione molecolare del benzofenone) perfettamente normali (calcolato per $C_7H_{12} = 168$; trovato: 167,4; 164,6; 166,5).

Non avemmo quindi che a determinare crioscopicamente il peso molecolare del benzofenone sciolto in difenilmetano ed in questo caso pure ottenemmo valori normali:

Solvente, *difenilmetano*; p. f. 26°.
Corpo sciolto, *benzofenone*: $C_{13}H_{10}O = 182$.

Numero d'ordine	Concentraz. in gr. per 100 gr. di solvente	Abbassamento termometrico Δ	Peso molecolare (k=67)
6	1.061	0.39	182.3
7	2.190	0.81	181.1
8	3.672	1.34	183.6

II. Misure crioscopiche colla coppia:

dibenzile: $C_6H_5CH_2CH_2C_6H_5$; p. f. 51°,5-52°,
benzile: $C_6H_5COCOC_6H_5$; p. f. 95°.

Le determinazioni fatte, usando il dibenzile come solvente, condussero a valori normali pel peso molecolare del benzile:

Solvente, *dibenzile*; p. f. 52°.
Corpo sciolto, *benzile*: $C_{14}H_{10}O_2 = 210$.

Numero d'ordine	Concentraz. in gr. per 100 gr. di solvente	Abbassamento termometrico Δ	Peso molecolare (k=72)
9	0.597	0.205	209.7
10	1.398	0.485	207.5
11	2.535	0.885	206.3
12	3.652	1.240	212.1
13	0.646	0.22	211.6
14	1.433	0.50	206.4
15	2.305	0.75	221.3
16	1.103	0.38	208.9
17	2.636	0.89	213.3
18	4.671	1.56	215.6
19	6.693	2.22	217.1

[1] Eykman, Zeit. f. Ph. Ch. *4*, 497 (1899).

Più difficili ad eseguirsi sono invece le misure, che si fecero usando il benzile come solvente. Nelle prime determinazioni, in cui si usò il dibenzile come corpo sciolto, ottenemmo pel peso molecolare di questo, valori assai disparati; solo ripetendo le misure ci accorgemmo che la temperatura di congelamento del benzile cresce ogni qualvolta la si ridetermina, e questo fenomeno si ripete per lungo tempo, così che i dati migliori, che potemmo avere, e che qui riportiamo, si ottennero solo dopo che il benzile fu tenuto allo stato fuso per 4-5 giorni, prima di fare la lettura del suo punto di congelamento.

Solvente, *benzile*; p. f. 95°.

Corpo sciolto, *dibenzile*: $C_{14}H_{14} = 182$.

Numero d'ordine	Concentraz. in gr. per 100 gr. di solvente	Abbassamento termometrico Δ	Peso molecolare (k=105)
20	0.7787	0.42	194
21	2.411	1.25	202
22	4.163	2.19	199
23	6.195	3.34	194

Considerando la difficoltà che si ha nel fare buone letture termometriche, noi riteniamo, che i valori del peso molecolare del dibenzile, per tal modo ottenuti, siano tali da poter ammettere un comportamento normale delle due sostanze.

Crediamo che queste misure, sebbene limitate, servano a far ammettere che le sostanze organiche differenti fra loro solo per i gruppi $-CH_2-$ e $-CO-$ hanno comportamento crioscopico normale, quando vengano sciolte reciprocamente l'una nell'altra. Conclusione questa che a noi interessava mettere in rilievo, perchè di essa ci siamo giovati in una precedente Nota.

Chimica. — *Sulla condensazione dell'azo-immide con l'acido fulminico* [1]. Nota I del dott. F. Carlo Palazzo, presentata dal Corrispondente A. Peratoner.

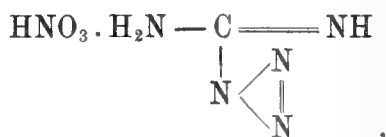
In continuazione delle mie ricerche sopra alcuni prodotti di addizione dell'acido fulminico ai quali si ricollegano notevoli quistioni teoretiche [2], ho intrapreso nell'anno testè passato lo studio della reazione fra l'acido azotidrico e l'acido fulminico, ed ho potuto recentemente assodare che al prodotto *immediato* di essa spetta in effetti quel carattere di notevole instabilità che già avevo indicato come probabile per una triazo-formossima $\genfrac{}{}{0pt}{}{H}{N_3}\!>C=NOH$ [3]. La mia previsione aveva il suo fondamento in alcune

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Roma.

[2] Questi Rendiconti, XVI, I, 545, (1907); Gazz. chim. ital., *39*, II, 249 (1909)

[3] Cfr. *Ueber einige Derivate der Knallsäure*, Verhandl. der Gesellsch. deut. Naturforscher u. Aerzte, 80. Versamml. Cöln 20-26 Sept. 1908, II. Teil 1. Hälfte, pag. 95.

interessanti esperienze del Thiele (1), e più ancora di Hantzsch e Vagt (2), dalle quali appunto risulta che in qualche derivato dell'acido azotidrico il gruppo triazoico si può facilmente aprire e prestarsi quindi, una volta trasformato in catena aperta, alla formazione di un anello *eterociclico* che comprende anche carbonio. Così, dal nitrato di diazo-guanidina del Thiele, per il quale Hantzsch e Vagt hanno poi confutata, com'è noto, la natura di composto diazoico, e dimostrata in sua vece la costituzione di derivato azoimmidico

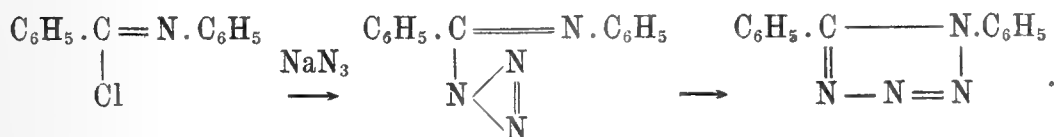
$$\begin{array}{l} HNO_3 . H_2N - C = NH \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\quad\quad\quad\;\; N \langle N \| N \end{array} ,$$

non si riesce, per azione degli alcali, e nemmeno per l'azione, più blanda, dell'etilato sodico, ad ottenere l'azide libera, ma si ricava (sempre che non avvenga scissione in N_3H e $CN . NH_2$) soltanto ammido-tetrazolo:

$$\begin{array}{l} H_2N . C = NH \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; N \langle N \| N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} H_2N . C - NH \\ \quad\quad\;\, \| \quad\quad | \\ \quad\quad\;\, N - N = N \end{array}$$

Più di recente, poi, M. O. Forster (3) ha constatato la sintesi di un N. ossi — C. fenil-tetrazolo nella reazione del triazoturo di sodio sul cloruro dell'acido benzidrossimico:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = N.OH \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; Cl \end{array} \xrightarrow{NaN_3} \begin{array}{l} C_6H_5 . C = N.OH \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; N \langle N \| N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} C_6H_5 . C - N.OH \\ \quad\quad\;\, \| \quad\quad | \\ \quad\quad\;\, N - N = N \end{array} ,$$

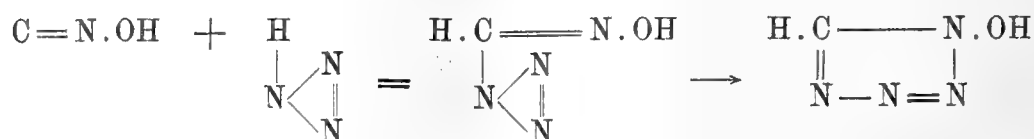
e similmente G. Schroeter (4) ha ottenuto un difenil-tetrazolo facendo agire azotidrato di sodio sul cloruro di benzenil-fenil-immide:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = N . C_6H_5 \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; Cl \end{array} \xrightarrow{NaN_3} \begin{array}{l} C_6H_5 . C = N . C_6H_5 \\ \quad\quad\;\; | \\ \quad\quad\;\; N \langle N \| N \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} C_6H_5 . C - N.C_6H_5 \\ \quad\quad\;\, \| \quad\quad | \\ \quad\quad\;\, N - N = N \end{array} .$$

Anche in questi due casi, come in quello citato per il primo, del cosiddetto nitrato di diazo-guanidina, è sempre il doppio legame fra carbonio e azoto che fa giuoco nella isomerizzazione dell'azide in derivato tetrazolico, e così, p. es., secondo Forster, il doppio legame $> C = N -$ nell'azide

(1) Annalen der Chemie *270*, 1 (1892).
(2) Annalen der Chemie *314*, 339 (1900).
(3) Journ. Chem. Soc. *95*, 183 (1909).
(4) Berliner Berichte *42*, 3359 (1909).

dell'acido benzidrossimico disporrebbe ancora di tanta affinità residua da provocare senz'altro la isomerizzazione del derivato triazoico, indipendentemente da ogni reattivo o catalizzatore.

Ora, secondo le mie esperienze, questa medesima veduta si applica perfettamente al caso dell'acido fulminico; difatti il prodotto che è dato isolare nelle condizioni sotto descritte, dalla reazione della carbilossima sull'acido azotidrico, non è già la corrispondente azide, la triazo-formossima, ma, invece, soltanto un suo isomero, il quale, come subito dirò, possiede tutti i caratteri di un N. ossi-tetrazolo:

$$\begin{array}{ccccccc} C{=}N.OH & + & \begin{array}{l} H \\ | \\ N\!\left\langle\begin{array}{l} N \\ \| \\ N \end{array}\right. \end{array} & = & \begin{array}{l} H.C{=\!=}N.OH \\ \;\;| \\ \;\;N\!\left\langle\begin{array}{l} N \\ \| \\ N \end{array}\right. \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{l} H.C{-\!-}N.OH \\ \;\;\| \qquad\;\; | \\ \;\;N{-}N{=}N \end{array} \end{array}$$

In tal modo, alle sintesi dei tetrazoli finora eseguite mediante l'acido azotidrico (secondo Hantzsch e Vagt, e secondo Forster o Schroeter) se ne aggiunge una nuova, nella quale la formazione transitoria dell'azide, che è comune a tutte, avviene per l'addizione diretta dell'acido azotidrico ad un solo atomo di carbonio bivalente.

Esperienze.

Dall'insieme delle osservazioni da me raccolte in ripetute preparazioni dell'ossi-tetrazolo sopra cennato, risulta con particolare evidenza che anche nella soluzione di fulminato sodico acidificata con acido azotidrico si stabiliscono, del pari che in quelle acidificate con i diversi idracidi alogenici, altrettanti stati d'equilibrio, i quali sono qui ulteriormente complicati dal fatto della isomerizzazione dell'azide. La triazo-formossima, per la quale, in base al confronto degli azoturi alcalini con i sali aloidi alcalini, sarebbe da prevedersi all'incirca una solubilità (negli acidi) intermedia fra quella della cloro- e quella della bromo-formossima, a somiglianza di queste non si precipita in alcun caso dal liquido fortemente acido di azo-immide, ma poichè il composto tetrazolico cristallizza da questo liquido solo dopo qualche tempo, è ovvio supporre che la separazione di esso dipende da un certo valore che deve innanzi tutto assumere la concentrazione della triazo-formossima solubile.

Per l'isolamento dell' N. ossi-tetrazolo ho in generale operato nel modo seguente. Ho distillato la maggior parte dell'azo-immide (basta raccogliere un volume di distillato uguale a $^1/_4$ del liquido acido totale) da una soluzione di 20 grammi di azoturo di sodio acida per acido solforico, e al distillato (per lo più del volume di 50 cmc.), raffreddato a $-12°$, ho aggiunto in unica volta una soluzione di fulminato sodico (40-45 cmc.) proveniente

da 20 gr. di fulminato mercurico puro, e anch'essa raffreddata a —12°. Il rapporto in peso fra le due sostanze corrisponde così, a un dipresso, a 1 molecola di fulminato sodico sopra 2 di azo-immide. Ho lasciato salire spontaneamente la temperatura della miscela a 25°-28°, poscia ho nuovamente raffreddato. Operando in tal modo, si può dopo 5-8 minuti già osservare la formazione di finissimi cristalli aghiformi, la quale sempre più aumenta fino a raggiungere un massimo dopo 20-30 minuti. Si filtra allora alla pompa la massa poltigliosa, si lava 3-4 volte con poca acqua a 0°, e si cristallizza dall'acqua senza molto protrarre l'ebollizione. Il prodotto così ottenuto forma aghi bianchi, lucenti, che fondono a 145° decomponendosi immediatamente dopo di un solo colpo, con viva deflagrazione. Una determinazione d'azoto eseguita sul prodotto cristallizzato due volte dall'acqua mi ha mostrato che la sostanza in parola corrisponde nella sua composizione alla formula grezza $C=NOH.N_3H$.

Gr. 0,0422 di sostanza fornirono cmc. 23,5 di azoto misurati a 13° ed a 752 mm.

	Trovato	Calcolato per CH_2ON_4
N %	65,09	65,11

Intanto, già da parecchi caratteri fisici si riconosce chiaramente che essa non può appartenere alla serie delle formossime sostituite (cloro-, bromo-, jodo-, tiocian-, nitro-formossima), per le quali da recente ho potuto mettere in evidenza, anche dal punto di vista dei caratteri fisici, la più stretta analogia. La sostanza è perfettamente inodora, si scioglie molto bene negli alcooli metilico ed etilico, in acetone, etere acetico, ma, a differenza delle succitate formossime, si scioglie solo mediocremente in etere etilico ed è affatto insolubile, anche a caldo, in benzolo ed in solfuro di carbonio, dal quale ultimo solvente, invece, parecchie delle suddette formossime, compreso l'acido metil-nitrolico (nitro-formossima), cristallizzano splendidamente. D'altra parte i cennati caratteri di solubilità coincidono notevolmente con quelli che sono conosciuti per il tetrazolo di Bladin (¹).

Dal punto di vista della struttura di N. ossi-tetrazolo che attribuisco a questo prodotto sono poi interessanti il contegno con i sali ferrici e con quelli di argento e di mercurio, e più specialmente la completa demolizione a cui esso va soggetto nell'azione degli alcali e degli acidi molto concentrati.

In soluzione acquosa, il composto in quistione fornisce col cloruro ferrico — al pari di molti composti che contengono $>$N.OH in catena eterociclica (²) — una debole colorazione rossa tendente al bruno, la quale non si può menomamente attribuire ad acido azotidrico libero, dappoichè la stessa

(¹) Berichte, *25*, 1412 (1892); cfr. anche Thiele e Ingle, Annalen, *287*, 242-3 (1895).

(²) Cfr. A. Peratoner, questi Rendiconti XI, I, 332 (1902).

soluzione non precipita affatto per aggiunta di solo nitrato di argento; nè il precipitato che si ottiene, aggiungendosi successivamente acetato sodico, consta menomamente di azotidrato e fulminato d'argento. D'altronde la natura unica dei precipitati che la sostanza fornisce coi sali dei metalli pesanti risulta evidente dal solo fatto che il precipitato prodotto dall'acetato mercurico non è bianco, come il fulminato e l'azoturo, bensì di color giallo uovo.

Il contegno del prodotto con gli alcali corrisponde poi pienamente a quello mostrato dallo N. ossi-C. fenil-tetrazolo di Forster. A freddo, e in soluzione diluita, non si verifica alcuna alterazione; in soluzione fortemente alcalina (25-30 %) si produce, per riscaldamento anche blando, un vivo sviluppo di azoto. La quantità di azoto così svolta rappresenta a un dipresso una metà dell'azoto totale, mentre l'altra metà, nella quale va evidentemente compreso l'azoto ossimidico, si elimina sostanzialmente sotto forma di ammoniaca facile a identificarsi.

Gr. 0,0998 di sostanza, fatti bollire con idrato potassico in soluzione al 40 % (dentro un apparecchio analogo a quello di Schulze-Tiemann per l'acido nitrico), fornirono cmc. 24,5 di azoto misurati a 12° ed a 756 mm.

	Trovato	Calcolato per 2N
N %	29,0	32,55

Anche la scissione con acido cloridrico fumante da me eseguita in tubo chiuso, riscaldando per 4 ore a 190-205°, corrisponde esattamente a quella osservata da Thiele e Ingle [1] per il tetrazolo; nella scissione acida una metà dell'azoto si elimina pure allo stato elementare, ed una metà sotto forma di ammoniaca subendo anche qui il gruppo ossimidico riduzione da parte dell'acido formico che viene ossidato in anidride carbonica. Difatti, a scissione completa, ho constatato, nel gas compresso del tubo, anidride carbonica [2], mentre nel liquido acido non ho rinvenuto neppure traccia di acido formico o di idrossilammina. In seno al liquido era cristallizzato del cloruro ammonico; ridisciogliendo a caldo i cristalli ed evaporando a secchezza il liquido cloridrico, ho ottenuto quel sale del tutto scevro di sostanza organica e di idrossilammina, ed in rapporto ponderale con la sostanza primitiva molto vicino a quello di 2 molecole di sale ammoniaco per 1 di ossitetrazolo.

Infine, nella scissione con acido solforico concentrato, la quale avviene a temperatura alquanto più bassa, può facilmente identificarsi, fra gli altri prodotti, anche l'idrossilammina.

In una prossima Nota riferirò sopra un secondo prodotto che si isola ancora dalla reazione dell'acido fulmineo sull'azo-immide, e che, per i suoi caratteri, non costituisce neppur esso la triazo-formossima, bensì, con probabilità, un isomero e anch'esso di natura tetrazolica.

[1] Annalen *287*, pag. 245 (1895).

[2] Dopo completo raffreddamento il tubo venne aperto sopra acqua di barite.

Chimica. — *Di una nuova serie di ammoniacati solidi.* Nota di G. POMA [1], presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Come è noto, l'acqua, l'ammoniaca ed altre numerose basi azotate presentano la tendenza ad associarsi con ioni scarsamente elettroaffini per dar luogo a composti complessi, che assai spesso, in condizioni fisiche opportune, possono esistere tanto allo stato solido che in soluzione.

Lo studio delle proprietà di tali composti, dei loro modi di formazione e dei loro limiti di solubilità presenta un notevole interesse, giacchè tali questioni si riconnettono con problemi sui quali oggi converge la generale attenzione dei chimici e che si riferiscono alla valenza, alla affinità ed allo stato dei corpi in soluzione. Gli idrati e gli ammoniacati infatti, fornirono a Werner gli esempî più dimostrativi su cui fondare la sua teoria sulla valenza, ed essi si prestano nel miglior modo per la determinazione dei numeri di coordinazione [2]; d'altro lato, parecchi autori sono propensi a ritenere che la formazione di complessi tra solvente e soluto sostenga una parte di singolare importanza, nel processo della dissociazione elettrolitica [3].

Per le ragioni ora esposte, credo non sia cosa priva affatto di interesse il descrivere una serie di ammoniacati da me preparata, di un tipo non ancora descritto nella letteratura, i quali partecipano ad un tempo del carattere dei composti complessi e di quello dei sali doppî.

Gli ammoniacati si formano per la unione di una o più molecole di ammoniaca con un catione metallico; nulla ancora si sa di preciso circa l'esistenza di ammoniacati solidi dovuti all'unione di ammoniaca con ioni negativi [4]. Il numero delle molecole di ammoniaca che possono far parte di ammoniacati solidi è variabilissimo per uno stesso sale e dipende, oltre che dalla natura dei sali impiegati, dalle modalità di preparazione e dalle condizioni fisiche alle quali sono sottoposti. Parecchi autori hanno potuto valutare la stabilità di questi sali complessi, così per esempio Isambert [5] misurò la tensione gassosa dell'ammoniaca negli ammoniacati solidi, Matignon [6] ed altri determinarono i loro calori di formazione.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Parma, diretto da G. Plancher.

[2] Werner, *Neuere Auschauungen auf dem Gebiet der anorg. Chemie.* S. 108.

[3] Ciamician. Ztschr. phys. Chemie 6, 403 [1890]; 69, 96 [1909]; Werner. Zeitschr. phys. Chemie 3, 296; 20, 1; Konovaloff. Wied. Ann., 11, 161; Carrara. Gazz., 37, I, 525, ed altri.

[4] Abegg's Handbuch der anorg. Chemie, III, B. III, Abt. S. 76.

[5] Compt. rend., 66, 1259.

[6] Compt. rend., 123, 103.

I metodi di preparazione di questi complessi fino ad ora impiegati sono essenzialmente due: L'uno di essi consiste nel far passare sul sale solido una corrente d'ammoniaca gassosa; l'altro, nel cristallizzare l'ammoniacato dalle soluzioni acquoso- ammoniacali del sale corrispondente; talvolta è opportuno di facilitare la precipitazione del complesso, aggiungendo alla soluzione alcool etilico. Il metodo da me seguito è completamente diverso.

Parte sperimentale.

Versando a poco a poco ed agitando energicamente, in cinquanta centimetri cubici di una soluzione concentrata di ammoniaca acquosa resa satura di ioduro potassico, quindici centimetri cubici di soluzione a circa il venti per cento di solfato di nichel, si ottiene un precipitato voluminoso, colorato, in viola pallido, di cristallini microscopici, che si depongono rapidamente al fondo del recipiente. Il liquido sovrastante rimane incolore; esso non contiene neppure in tracce nè acido solforico, nè nichel, ciò che dimostra essere la precipitazione rispetto ad essi, quantitativa.

Il precipitato venne filtrato alla pompa, lavato con ammoniaca acquosa, con alcool e con etere, poscia, posto tra carta bibula, venne seccato a lieve calore.

Una prima analisi qualitativa permise di riconoscere che esso, oltre al nichel ed all'acido solforico, conteneva iodio, ammoniaca e potassio.

Una porzione pesata dell'ammoniacato solido venne sciolta in acido acetico e portata al segno con acqua distillata in un matraccino tarato da cento centimetri cubici. In diverse parti aliquote del liquido così preparato, vennero determinati quantitativamente, e poscia riferiti a cento centimetri cubici, i costituenti trovati prima, ad eccezione del potassio, che venne calcolato per differenza. Il nichel venne precipitato da una soluzione fortemente ammoniacale per via elettrolitica, usando un anodo rotante, l'ammoniaca venne determinata volumetricamente dopo averla spostata con soda contenente una piccola quantità di solfuro sodico, l'iodio e l'acido solforico coi metodi ordinarî.

Ecco i risultati analitici così ottenuti:

In gr. 4.3794 di ammoniacato solido erano contenuti:

			Trovato %	Teorico per $SO_4Ni(NH_3)_6 2KI$ %
di I	gr.	1.8752	42.88	43.12
" Ni	"	0.4332	9.89	9.97
" NH_3	"	0.7525	17.18	17.33
" SO_4	"	0.7070	16.15	16.30
" K	"	0.5817 (calcolato)	13.28 (calcolato)	13.28
	Gr.	4.3496	99.32	100,00

per ottenere un risultato così soddisfacente, ho dovuto prima analizzare parecchi campioni di questo ammoniacato, ottenendo sempre risultati molto concordanti, sebbene meno buoni di questi ora riferiti. Per togliere tutte le impurità che l'ammoniacato trascina con sè, è necessario lavarlo fuori filtro con ammoniaca acquosa, con alcool e con etere e poscia seccarlo a lievissimo calore. In quest'ultima operazione è necessario procedere con la massima cautela, perchè un riscaldamento o eccessivo o troppo prolungato, produrrebbe assai facilmente perdite di ammonica e liberazione di iodio.

In condizioni perfettamente analoghe, ma saturando la soluzione ammoniacale con bromuro o con cloruro potassico, invece che con ioduro, ho ottenuti i corrispondenti ammoniacati doppi, bromurati o clorurati, che alla analisi risultarono essere della stessa forma di quello precedentemente descritto.

A questo tipo di sali spetta dunque la formula:

$$SO_4\,Ni\,(NH_3)_6\ .\ 2KX$$

nella quale X sta ad indicare un atomo di cloro, di bromo o di iodio.

Tutti tre questi sali sono violetti, però posseggono intensità di colorazione diversa, così quello contenente cloro è più intensamente colorato di quello contenente bromo ed entrambi più di quello contenente iodio. Essi sono igroscopici, tendono a perdere ammoniaca assorbendo in sua vece dell'acqua, mentre il loro colore passa dal violetto al verde. La precipitazione avviene in modo quantitativo, sia per il nichel, che per l'acido solforico, quando si impiega ioduro o bromuro potassico ammoniacale, non così nel caso del cloruro.

Dopo di aver ottenuti i risultati di questa natura impiegando solfato di nichel, ho voluto sperimentare in analoghe condizioni coi solfati di cobalto, di rame, di zinco e di cadmio e con soluzioni ammoniacali sature di IK.

Nel primo caso ho ottenuto un precipitato leggermente colorato in rosa; nel filtrato, che era incolore, non ho trovato nè cobalto nè acido solforico.

Lasciato a sè, il precipitato accennava ad ossidarsi, assumendo una colorazione prima azzurra e poi bruna, contemporaneamente si liberava iodio. Per questo fatto non ho potuto seccarlo perfettamente; questa è probabilmente la ragione per cui i risultati analitici sono meno concordanti coi teorici, di quelli già esposti per l'ammoniacato doppio, ottenuto col solfato di nichel.

L'analisi dell'ammoniacato ottenuto con soluzione acquosa di $Co\,SO_4$ e con soluzione ammoniacale satura di IK, ha dato i seguenti risultati:

In gr. 8.0132 di ammoniacato erano contenuti:

			Trovato %	Teorico per $SO_4\,Co\,(NH_3)_6\,.\,2KI$ %
di	I	gr. 3.372	42.08	43.0
»	Co	» 0.8195	10.23	10.01
»	NH_3	» 1.3520	16.90	17.30
»	SO_4	» 1.307	16.32	16.30

come già nel caso dell'ammoniacato doppio del nichel, così anche in questo, ho creduto inutile dosare il potassio.

Questo risultato dimostra all'evidenza, come anche in questo caso, l'ammoniacato ottenuto, sia un sale doppio della formula:

$$SO_4\,Co\,(NH_3)_6\ .\ 2KI\,.$$

Operando con soluzione ammoniacale satura di BrK invece che con quella di IK, ho ottenuto risultati perfettamente analoghi.

Mescolando una soluzione acquosa di solfato rameico con una ammoniacale satura di IK, si ottiene un precipitato intensamente azzurro, molto instabile; non fu possibile lavarlo, sia perchè esso è assai solubile nelle stesse soluzioni acquose sature di ammoniaca, sia perchè con alcool e con etere si decompone. Analogamente ai casi precedenti, i risultati analitici fanno ritenere che la formula del composto così ottenuto, sia:

$$SO_4\,Cu\,(NH_3)_6\ .\ 2KI\,.$$

Ho avuto risultati simili anche impiegando i solfati di cadmio e di zinco, su di essi però non ho ancora esaurito le mie ricerche.

Mi è sembrato utile stabilire se era possibile ottenere ammoniacati doppi del tipo di quelli ora descritti, quando si sostituisse ai solfati dei metalli pesanti fin qui adoperati, altri sali solubili in acqua, ma provvisti di un anione diverso. Ho così preparato una soluzione abbastanza concentrata di clorato nicheloso, e l'ho versata, con le precauzioni sopra ricordate, in una soluzione acquoso-ammoniacale satura di ioduro potassico; ho ottenuto in tal modo un precipitato cristallino di aspetto perfettamente simile a quello ottenuto prima usando il solfato di nichel. Dopo di averlo filtrato alla pompa, l'ho lavato con acqua ammoniacale, con alcool e con etere e l'ho seccato a lieve calore. Ho sciolto una porzione pesata del prodotto in acido solforico assai diluito e l'ho portata al segno in un matraccino da 100 centimetri cubici L'analisi fu da me condotta nello stesso modo seguito prima, soltanto mi fu necessario eseguire immediatamente la titolazione dell'ione iodio, giacchè la presenza dell'acido clorico causava rapidamente la ossidazione dell'acido iodidrico, mentre per riduzione dall'acido clorico, si andava formando acido cloridrico. Dopo di aver titolato, col metodo Volhard, l'acido iodidrico; per determinare l'acido clorico alcalinizzavo fortemente una parte aliquota della soluzione primitiva con idrato sodico, al liquido aggiungevo una certa quantità di lega di Devarda e poscia riscaldavo su bagnomaria per alcune ore; dopo avere acidificato con $H_2\,SO_4$ e filtrato, titolavo insieme gli ioni cloro e iodio e per differenza calcolavo la quantità di acido clorico presente. Eseguii analogamente la preparazione e l'analisi del prodotto, anche quando, invece delle soluzioni ammoniacali sature di IK, usai quelle di bromuro o di cloruro potassico ottenendo i corrispondenti ammoniacati doppi, bromurato o clorurato.

L'analisi di un campione di quest'ultimo ha dato i seguenti risultati:

In gr. 5.6284 di ammoniacato secco erano contenuti:

			Trovato %	Teorico per $(ClO_3)_2 Ni (NH_3)_6 . 2KCl$ %
di Cl' (ione)	gr.	0.7974	14.47	14.87
" Ni	"	0.6830	12.13	12.30
" NH_3	"	1.1850	21.05	21.39
" ClO'_3	"	1.9300	34.30	35.03

L'analisi degli altri due ammoniacati contenenti bromo e iodio, diede risultati soddisfacenti, simili a quelli ora riportati: mi è quindi lecito affermare che nelle sopra esposte condizioni, si ottengono i tre ammoniacati doppi della formula:

$$(ClO_3)_2 Ni (NH_3)_6 \ . \ 2KX$$

Anche in questo caso si ottiene quantitativamente la precipitazione del sale di nichel impiegato, soltanto quando si usino soluzioni ammoniacali di ioduro e di bromuro potassico.

Ripetendo analogamente il procedimento descritto con clorato cobaltoso, si ottengono gli ammoniacati della formula:

$$(ClO_3)_2 Co (NH_3)_6 \ . \ 2KX$$

in cui X sta a rappresentare un atomo di iodio o di bromo.

In questo caso però non ho potuto ottenere l'ammoniacato contenente cloro e ciò concordemente a quanto ho potuto osservare allorchè operavo con solfato cobaltoso. Non ho ancora studiato la formazione di ammoniacati doppi preparati partendo dai clorati di rame, di zinco e di cadmio.

Finalmente ho cercato di ottenere sali doppi partendo dal nitrato o dal cloruro di nichel, ma fino ad ora i risultati furono negativi. Operando nel solito modo si ottengono bensì precipitati analoghi nell'apparenza a quelli già descritti, ma all'analisi essi risultarono concordemente essere ammoniacati semplici della formula:

$$Ni (NH_3)_6 X_2$$

Sarà interessante stabilire, per la reazione di cui mi occupo, quale influenza abbia, sulla formazione di questi ammoniacati, la natura degli ioni dei sali usati per prepararli. Nel corso di queste ricerche, per esempio, non ho ancora potuto preparare ammoniacati che al posto di X contengano un anione che non sia un alogeno, d'altra parte ho osservato che se invece delle soluzioni ammoniacali di un sale aloide di potassio, si impiegano quelle contenenti un sale corrispondente di sodio o di litio, l'ammoniacato doppio si forma con molto maggior difficoltà.

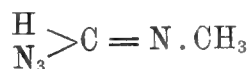
Finalmente credo opportuno mettere in rilievo che la qui descritta reazione, oltre condurre alla preparazione di numerosi ammoniacati doppi, non ancora conosciuti, permette di prepararne altri già noti, con un metodo assai più rapido e comodo di quelli attualmente in uso. Ho osservato infatti che saturando con un sale alcalino terroso assai solubile, una soluzione di ammoniaca concentrata e versando in questa la soluzione acquosa di un nitrato o di un cloruro di un metallo pesante che in soluzione formi facilmente degli ammoniacati, precipita assai spesso un ammoniacato semplice contenente il metallo pesante e l'anione del sale assai solubile, sciolto prima in ammoniaca. Siccome in tutte queste esperienze ho sempre operato con ammoniaca concentrata in grande eccesso, così ho sempre ottenuto i composti esaaminici.

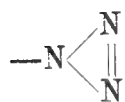
In una Nota che verrà pubblicata quanto prima, cercherò di completare lo studio di queste reazioni.

Chimica. — *Azione dell'acido azotidrico sulla metil-carbilammina. Sintesi di omologhi del tetrazolo* (1). Nota di E. Oliveri-Mandalà, presentata dal Corrispondente A. Peratoner.

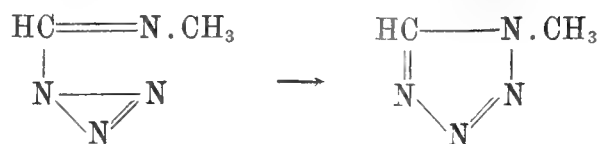
L'acido azotidrico reagisce con molta facilità con gli isonitrili. Dall'azione di esso sulla metil-carbilammina io ho ottenuto un composto che all'analisi è risultato essere formato dall'unione di una molecola di acido azotidrico con una molecola di isonitrile $N_3H.CNCH_3$.

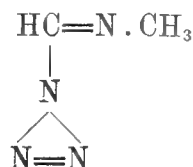
Però questa sostanza, data la sua stabilità, non può essere considerata come un composto di addizione

$$\begin{matrix} H \\ N_3 \end{matrix}\!\!>C=N.CH_3$$

perchè in tale caso, trattata con l'acqua, dovrebbe eliminare acido azotidrico e con gli acidi scomporsi nell'ammina corrispondente ed in acido formico, mentre essa non accenna a decomporsi nemmeno dopo lunga ebollizione. Dagli alcali però la sostanza viene completamente scissa in CO_2, metilammina, NH_3 e azoto; una decomposizione analoga a quella che avviene col tetrazolo.

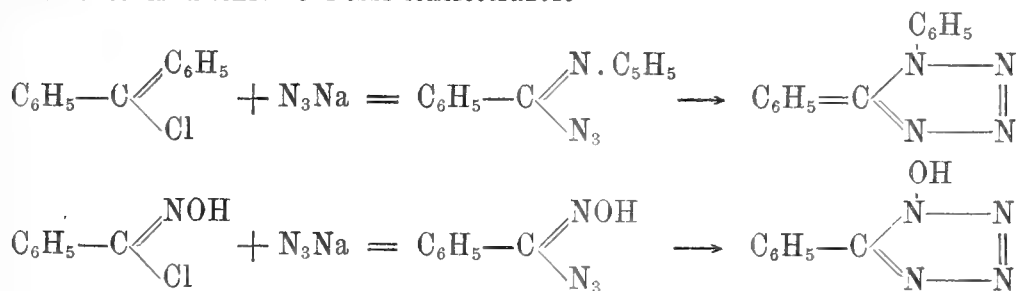
Nella reazione quindi fra l'acido azotidrico e la metil-carbilammina solamente come prodotto intermedio si deve ammettere il composto di addizione $N_3H.CNCH_3$, perchè la facile reazionabilità del gruppo triazo $-N\!<\!\begin{matrix} N \\ \| \\ N \end{matrix}$ dà luogo immediatamente ad una condensazione intramolecolare

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Chimico di Palermo.

con formazione dell'anello eterociclico del tetrazolo

$$\begin{array}{c} HC{=\!=\!=}N.CH_3 \\ | \qquad\quad \\ N{-\!-\!-}N \\ \diagdown\;\diagup \\ N \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} HC{-\!-\!-}N.CH_3 \\ \| \qquad\quad | \\ N \qquad N \\ \diagdown\;\diagup \\ N \end{array}$$

Ora la reazionabilità del gruppo triazo nell'aggruppamento

$$\begin{array}{c} HC{=}N.CH_3 \\ | \qquad \\ N \qquad \\ \diagup\diagdown \qquad \\ N{=}N \qquad \end{array}$$

trova riscontro in alcune reazioni dell'azoturo di sodio eseguite dal Forster [1] sul cloruro dell'acido benzidrossammico e dalla Schroeter [2] sul cloruro di benzanilide, dalle quali si ottenne, passando alle corrispondenti azidi, rispettivamente il difenil- e l'ossi-feniltetrazolo

$$C_6H_5{-}C\begin{array}{l}\diagup C_6H_5 \\ \diagdown Cl\end{array} + N_3Na = C_6H_5{-}C\begin{array}{l}\diagup N.C_5H_5 \\ \diagdown N_3\end{array} \longrightarrow C_6H_5{=}C\begin{array}{l} \qquad C_6H_5 \\ \diagup \overset{|}{N}{-\!-\!-}N \\ \qquad\qquad\quad \| \\ \diagdown N{-\!-\!-}N\end{array}$$

$$C_6H_5{-}C\begin{array}{l}\diagup NOH \\ \diagdown Cl\end{array} + N_3Na = C_6H_5{-}C\begin{array}{l}\diagup NOH \\ \diagdown N_3\end{array} \longrightarrow C_6H_5{-}C\begin{array}{l} \qquad OH \\ \diagup \overset{|}{N}{-\!-\!-}N \\ \qquad\qquad\quad \| \\ \diagdown N{-\!-\!-}N\end{array}$$

Parte sperimentale.

Si fa gocciolare a poco a poco la metil-carbilammina su l'acido azotidrico anidro e diluito con un eguale volume di etere assoluto. Durante la esperienza avviene un leggiero riscaldamento e la temperatura sale di pochi gradi. Indi si mette il tutto a ricadere a b. m. circa un quarto di ora per completare la reazione. Dopo completo raffreddamento si osservano due strati ben distinti, uno superiore oleoso costituito dal prodotto della reazione che odora fortemente di metil-ammina, ed uno inferiore costituito dall'etere. Senza separare i due strati si distilla a pressione ridotta per scacciare l'etere e l'eccesso di carbilammina; rimane così un olio giallo chiaro che col riposo dopo breve tempo solidifica in un ammasso di cristalli durissimi. Seccati su lastra di porcellana porosa e sciolti in etere a caldo, cristallizzano per raffreddamento in prismi duri allungati a base quadrangolare, i quali fondono a 36-37°.

(1) Journ. Chem. Soc. 95, 183, 1909.
(2) Berichte 42, 3360, 1909.

Essi sono molto solubili in acqua e in alcool, discretamente in benzolo, insolubili a freddo in etere, poco a caldo.

I. All'analisi gr. 0,2903 di sostanza fornirono gr. 0,3027 di CO_2 e gr. 0,1405 di H_2O.

II. Gr. 0,0731 di sostanza diedero cc. 41,8 di N a 17° e 763^{mm}.

Su 100 parti:

	Calcolato per $C_2H_4N_4$	Trovato I	Trovato II
C	28,57	28,43	—
H	4,76	5,37	—
N	66,66	—	66,29

Una determinazione di peso molecolare in benzolo conduce ad una formula semplice.

Gr. 0,1227 di sostanza sciolti in gr. 12,99 di benzolo ne abbassarono il punto di congelamento di 0°,47.

K del benzolo = 50

Peso mol. calcolato per $C_2H_4N_4$	Trovato
84	99

Scissione con gli alcali. — Se si fa bollire la sostanza con gli alcali concentrati, essa viene completamente decomposta. Avviene un forte sviluppo di azoto e nel distillato si riscontra assieme a metilammina, dell'ammoniaca. Il liquido rimasto nel palloncino fu fatto bollire con acido solforico. Nel distillato si ricercò l'acido formico con risultato negativo.

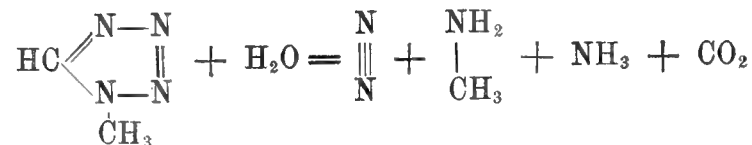
Una determinazione quantitativa di azoto ha dato:

Gr. 0,0687 di sostanza fatti bollire con una soluzione acquosa concentrata di idrato potassico in un piccolo apparecchio Schultze e Tiemann svolsero cc. 19.5 di azoto a 13° e 765^{mm}.

Ed in 100 parti:

	Calcolato per $C_2H_4N_4$	Trovato
2N	33,33	33,53

La decomposizione è andata dunque nel senso espresso dall'equazione seguente:

$$HC\begin{matrix}\diagup N-N \\ \qquad \| \\ \diagdown N-N \\ | \\ CH_3\end{matrix} + H_2O = \begin{matrix}N \\ ||| \\ N\end{matrix} + \begin{matrix}NH_2 \\ | \\ CH_3\end{matrix} + NH_3 + CO_2$$

il che prova che si tratta effettivamente di un derivato del tetrazolo.

Infatti la scissione con potassa è avvenuta analogamente a quella del tetrazolo, il quale decomposto con acido solforico, fornisce quantitativamente due atomi di azoto, ammoniaca e anidride carbonica ([1]).

Mi riservo di estendere queste ricerche ad altri isonitrili, per vedere se tale reazione è di ordine generale per la sintesi dei derivati omologhi del tetrazolo.

Zoologia. — *Ricerche sul numero degli Anofeli infetti nell'Agro romano durante il periodo della cura e della profilassi contro la malaria, nell'anno 1909* ([2]). Nota dei dott. Giovanni Noè ed Ercole Matteuzzi, presentata dal Socio B. Grassi.

Era nostra intenzione attendere che le ricerche invernali e primaverili dell'anno corrente fossero terminate, prima di darne alla stampa i risultati. Ma la fioritura di polemiche, sbocciate in questi ultimi tempi nei giornali politici, intorno all'efficacia ed alla praticità dei metodi profilattici in vigore, ci ha indotti ad anticipare la pubblicazione di quella parte dei nostri studî, che può recare nel dibattito la nota inconfutabile dettata dai fatti positivi. Ed invero, quale risposta migliore al quesito sull'efficacia di una campagna antimalarica che quella data dalla percentuale degli anofeli infetti, riscontrata durante lo svolgimento di quella e stabilita colla più rigorosa cautela? Poichè, se non può sempre accettarsi il giudizio che la percentuale degli anofeli infetti debba crescere coll'aumentare dell'intensità epidemica, sarebbe impossibile ammettere la relazione inversa, cioè, da una parte diminuzione di questa, dall'altra aumento di quella.

Per questo motivo, noi crediamo che l'esame degli anofeli di una località fatta mira di una campagna antimalarica sia il mezzo più sicuro per misurare l'efficacia dell'opera spesa allo scopo di curare la malaria acuta e cronica e soprattutto per mettere sull'avviso il sanitario che credesse di esser riuscito a sopprimere i focolai di infezione.

Ciò, a nostro avviso, non può sempre risultare dall'esame clinico dei soggetti in cura, tenuto conto delle lunghe latenze a cui può andar soggetta la malaria e della possibilità che, in tali condizioni, persone apparentemente risanate alberghino invece gameti e gametociti capaci di infettare anofeli.

Qualunque opera di bonificamento umano dovrebbe anzi sempre essere accompagnata e seguita da una metodica e rigorosa ispezione degli anofeli, la quale, si badi, è assai più facile e negli effetti assai più pratica dell'esame del sangue dei malarici, perchè come già bene osservò il prof. Grassi, nello

([1]) Thiele e Ingle, Liebig's Ann. 287, 241, 1895.

([2]) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

stomaco di un anofele passa assai più sangue che non in un preparato sotto l'occhio di un microscopista (1).

Ciò premesso, ci siamo proposti, colle nostre ricerche, di accertare se, concordemente colle statistiche ufficiali di questi ultimi anni, attestanti una considerevole diminuzione di malaria nell'Agro romano, anche la percentuale degli anofeli infetti sia andata diminuendo a paragone di quella stabilita negli anni 1899 e 1900, nei quali o non fu fatta profilassi medicamentosa o questa fu eseguita in modo incompleto.

Raccolta degli anofeli. — Le nostre ricerche furono concentrate in due località dell'Agro facilmente accessibili, precisamente: *Porto* e *Maccarese*, note come sommamente malariche.

Poche ed inconcludenti ricerche abbiamo fatto ad *Ostia* per la difficoltà di giungervi.

Le zanzare venivano raccolte nei luoghi intorno alle abitazioni, sedi abituali dell'*Anopheles claviger;* cioè, nelle stalle, nei canili, nei pollai, nei porcili, nei fienili, nelle latrine ed in tutti quei piccoli ripari che di consueto si trovano intorno alle case di campagna. Nelle abitazioni abbiamo raccolto sempre poche zanzare, o perchè le retine alle porte ed alle finestre, lasciano penetrare solo scarsissimi anofeli, o perchè, specialmente a Maccarese, il soffitto delle stanze è troppo alto per essere accessibile: in tali casi occorrerebbero scale molto lunghe e ci è stato invece impossibile trovarle.

Esame delle zanzare. — Sulle zanzare si possono fare praticamente due sorta di indagini: l'esame dell'intestino al quale aderisce il parassita durante la maggior parte dello sviluppo anfigonico, e l'esame delle ghiandole salivari, nelle quali si trovano gli sporozoiti destinati ad essere inoculati.

La prima ricerca è relativamente più facile e rapida della seconda, l'abbiamo quindi preferita, come quella che ci permetteva di esaminare una grande quantità di zanzare; prima norma per stabilire una percentuale essendo quella di poter calcolare sopra molto materiale.

Abbiamo però eseguito talora delle ricerche nelle ghiandole salivari e ne sarà fatto cenno a luogo opportuno.

Risultato delle ricerche. — Riferiremo qui il risultato delle ricerche eseguite dal 1° giugno al 31 dicembre, perchè quelle fatte dal 31 dicembre fino ad oggi, verranno pubblicate alla fine del corrente semestre.

GIUGNO.

Località di origine delle zanzare	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	220	4
Maccarese	170	1
Ostia	155	0
	545	5

(1) Grassi B., *Studii di uno zoologo sulla malaria,* 2ª edizione 1901.

Delle 4 zanzare infette di Porto, *una* aveva molte cisti mature, *tre* abbondanti anfionti a stadî medî di sviluppo.

La prima zanzara infetta fu riscontrata il 9 giugno, data, come vedremo in seguito, che coincide quasi con le precedenti constatate da altri autori.

L'unico anofele infetto trovato a Maccarese aveva poche cisti a stadî medî di sviluppo; esso fu osservato il 17 giugno.

Luglio.

Località di origine delle zanzara	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	622	16
Maccarese	526	7
Ostia	289	0
	1437	23

Delle 16 zanzare infette di Porto, 4 avevano sporozoiti alle ghiandole salivali, tre avevano stadi giovanissimi, le altre avevano parassiti a stadî vari intermedî.

Le prime quattro facevano parte di due blocchi diversi di zanzare, di un certo numero delle quali furono appunto esaminate, oltre l'intestino, anche le ghiandole salivari: precisamente su 85 anofeli del primo blocco due avevano le ghiandole salivari piene di sporozoiti, una terza era infetta all'intestino; su 78 del secondo blocco due anofeli erano infetti alle ghiandole salivari (uno abbondantemente) e due all'intestino (uno di questi era appunto quello abbondantemente infetto anche alle ghiandole salivari).

Agosto.

Località di origine delle zanzare	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	972	12
Maccarese	295	2
Torrimpietra	132	0
Palidoro	144	1
Magliana	72	0
	1615	15

Nessuna zanzara esaminata alle ghiandole salivari meno una.

Quasi tutti gli anofeli esaminati avevano parassiti a stadi avanzati di sviluppo; due anofeli di Porto avevano anche parassiti giovanissimi (probabilmente terzo giorno di infezione) insieme con amfionti quasi maturi. Un anofele di Porto aveva soltanto una cisti con corpi bruni; le ghiandole salivari di questo anofele erano immuni.

Fu constatata una grande diminuzione di zanzare a Maccarese ed alla Magliana. In quest'ultima località verso la metà del mese non si potè trovare neppure un anofele. Da circa un mese infatti si erano prosciugati tutti i paludelli circostanti.

Lo stesso era accaduto a Maccarese ove le zanzare abbondavano solo nei caselli ferroviari 35 e 36 cioè verso la palude delle Paglie ed ai caselli 28 e 30 verso il Bottegone: scarsissime al Procoio nuovo.

Settembre.

Località di origine delle zanzare	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	730	6
Maccarese	218	2
Ostia	69	0
	1017	8

Le zanzare di Ostia sono state esaminate anche alla ghiandole salivari. Gli anofeli sono tornati ad abbondare anche a Maccarese.

Ottobre.

Località di origine delle zanzare	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	456	5
Maccarese	407	3
	863	8

Degli otto anofeli infetti cinque avevano stadî giovanissimi.

Novembre.

Località di origine delle zanzare	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	400	5
Maccarese	322	3
	722	8

Delle 400 zanzare di Porto, 92 furono esaminate oltre che all'intestino, anche alle ghiandole salivari; in questo blocco di 92 furono riscontrate due zanzare infette alle ghiandole salivari; una di esse inoltre aveva qualche cisti con corpi bruni (12 novembre).

Gli anofeli erano stati raccolti nelle abitazioni e nelle stalle.

Dicembre.

Località di origine delle zanzare	Anofeli esaminati	Numero degli infetti
Porto	265	3
Maccarese	347	4
	612	7

Di questi anofeli furono esaminati tanto l'intestino quanto le ghiandole salivari. Dei tre riscontrati infetti a Porto uno aveva anfionti quasi maturi (9 dicembre) gli altri due sporozoiti alle ghiandole salivari.

Dei 4 di Maccarese due avevano anfionti in degenerazione bruna; uno di essi presentava anche cisti svuotate, in ambedue però le ghiandole salivari non erano infette; gli altri due erano infetti alle ghiandole salivari. Le zanzare sono state prevalentemente raccolte nelle stalle e nelle grotte; pochissime furono rinvenute nelle case.

Discussione dei risultati. — Dagli specchi precedenti risulta, che dati utili a nostro riguardo sono quelli fornitici dalle ricerche condotte a Maccarese ed a Porto. In queste località fu fatta la maggior raccolta di anofeli, ed ivi furono eseguite con regolarità e metodo la ispezioni opportune. Abbiamo già detto perchè ad Ostia non fu potuto fare altrettanto. Del resto, a noi importava di avere a disposizione, per una statistica più vicina al vero, il maggior numero possibile di dati, concernenti una determinata località: e ciò non poteva ottenersi da indagini troppo estensive. Concentrare e ripetere senza sazietà le osservazioni fu il nostro programma ed è solo in virtù di tale metodo che possiamo trarre dal nostro lavoro conclusioni precise e valevoli.

Senza dubbio, sarebbe stato sommamente interessante insistere nelle ricerche ad Ostia, ove su 513 anofeli non fu rinvenuto alcuno infetto. Ma le condizioni di Ostia esigerebbero almeno una operosità assai maggiore di quella che noi abbiamo data alle ricerche di quest'anno. Ad Ostia infatti c'è un numero enorme di anofeli, mantenuti dai grandi collettori della bonifica, che non asciugano mai. Sterminato poi il numero degli anofeli in giugno ed in luglio nelle case situate in vicinanza del Polder, che costituisce forse il più pericoloso focolare di anofeli di tutta la rete dei canali. Gli anofeli sono quindi ad Ostia in continuo, quotidiano aumento, almeno sino alla fine di luglio e durante il mese di settembre. Ciò posto, la percentuale degli infetti è molto difficile a stabilirsi, od almeno esigerebbe molta assiduità di lavoro; ciò che non abbiamo potuto fare, per le ragioni già addotte.

Del resto, i risultati surriferiti delle indagini eseguite sulle zanzare di Ostia, non debbono recare troppa meraviglia, perchè i 513 anofeli furono raccolti in quattro riprese. (Le zanzare raccolte furono assai di più, forse il

doppio: ma le forti scosse che subiscono i veicoli sulla Via Ostiense ne distrussero gran parte). Le ricerche fatte ad Ostia sono quindi troppo incomplete e scarse per autorizzare una qualsiasi conclusione.

Veniamo invece a considerare le risultanze delle indagini eseguite a Porto ed a Maccarese.

Di Porto furono esaminati complessivamente 3665 anofeli, dei quali 51 furono riscontrati infetti, con una percentuale cioè di 1,31; questa percentuale però sale in luglio fino a 2,57 (16 infetti su 622 esaminati).

Di Maccarese furono esaminati complessivamente 2285 anofeli, dei quali 22 furono riscontrati infetti, con una percentuale cioè di 0,91: anche qui la percentuale è più forte in luglio, elevandosi sino ad 1,33; a dicembre, poi, è un po' superiore ad 1.

L'elevarsi della percentuale in luglio è dovuta molto probabilmente alla consueta immigrazione dalla montagna di braccianti, per i lavori della mietitura e della trebbiatura; questo personale è notoriamente costituito in massima parte di individui che già precedentemente (i più l'anno antecedente) hanno sofferto malaria, contratta in analoghe circostanze; esso rappresenta quindi un pericolosissimo focolare d'infezione che ogni anno si immette nel quadro già fosco del paesaggio malarico, ad aggravarvi l'epidemia. A Porto, ad esempio, quest'anno, verso la metà di luglio, si era già totalmente rinnovato il personale dell'ara Calabresi; quasi tutti gli operai erano stati assaliti dalle febbri malariche ed avevano dovuto, dopo cure locali incomplete, lasciare il lavoro per recarsi all'ospedale.

Un'altra elevazione della percentuale si sarebbe dovuto verificare in ottobre, cioè dopo l'immigrazione delle squadre destinate ai lavori di semina. Quest'anno invece la percentuale in ottobre si è mantenuta relativamente bassa. Forse hanno contribuito a ciò due circostanze: una, l'abbassamento della temperatura, (già piuttosto mite nell'estate decorsa), verificatasi al limitare dell'autunno con un anticipo abbastanza notevole rispetto agli altri anni (specialmente avuto riguardo alla temperatura del mattino e della sera); orbene, all'abbassarsi della temperatura gli anofeli di solito si riparano nelle stalle ove si alimentano quasi esclusivamente del sangue degli animali, oppure nelle case. In queste però il numero degli anofeli — è questa l'altra circostanza a cui alludevamo — fu da noi riscontrato quest'anno sempre scarso, appunto per l'applicazione della protezione meccanica, la quale, benchè incompleta e trascurata dalle persone, ha sempre tuttavia la grande efficacia, forse non ben valutata da tutti gli studiosi di malaria, di evitare che molte zanzare si infettino qualora alcuno degli abitanti, febbricitante o no, abbia gameti circolanti. La profilassi meccanica funziona così non solo come protezione dei casigliani, ma anche come moderatrice dell'infezione degli anofeli.

Per quale ragione, a Maccarese, la percentuale media è così bassa, al disotto cioè di quella (1 per cento) indicata da Grassi nelle ricerche del 1899-1901?

Si potrebbe anche qui addurre come spiegazione il freno dell'applicazione della profilassi meccanica; ma il vero è che la maggior parte degli anofeli infetti proveniva dai caselli ferroviarî compresi fra il 28 e 36 (con che non voglio dire che quivi la percentuale fosse molto superiore). Invece al Procoio, ove non c'è protezione meccanica, le zanzare infette furono rarissime. La spiegazione forse non è difficile, pensando che di popolazione stabile a Maccarese ce n'è pochissima (in agosto e settembre si riduce proprio a pochi individui) e che questa poca usa generalmente curarsi con qualche diligenza, assistita com'è dalla Sezione locale della Croce Rossa. Nel giugno e nel luglio, poi, il numero degli anofeli è enorme a Maccarese, ciò che potrebbe anche contribuire ad abbassare solo apparentemente il numero assoluto degli anofeli infetti, ossia la percentuale; in settembre, poi, quando si verifica la ripresa del quantitativo di anofeli, vi è troppo scarsa popolazione per determinare un'alta percentuale.

Diverse invece sono le condizioni di Porto, ove la popolazione stabile è superiore a quella di Maccarese e soprattutto è più addensata. Forse qui contribuì a mantenere alta la percentuale delle zanzare infette lo stato di salute assai poco soddisfacente della popolazione; a Porto infatti quest'anno c'è stata molta malaria, e grave; la maggior parte poi della popolazione non si usa le cure necessarie. In tali condizioni diviene grave il fatto che l'applicazione delle retìne, tranne ai caselli ferroviarî, ove pure è assai difettosa, rappresenti ormai solo il documento di un periodo storico: le retìne, o non ci sono più, o, dove esistono, cadono a brandelli, rôse dalla ruggine o sfondate dalle bestie o dall'uomo stesso.

Ma rappresentano le cifre riportate le percentuali vere delle zanzare infette?

Il grande numero di zanzare esaminate raccolte a brevi intervalli in blocchi di 200 o 300 per volta, ci affida che la statistica segnata rispecchi realmente o molto approssimativamente lo stato delle cose. Soltanto, noi crediamo che il numero delle zanzare infette sia maggiore di quello da noi indicato. Infatti i nostri calcoli sono fondati semplicemente sull'esame dell'intestino delle zanzare. L'esame delle ghiandole salivari è stato per lo più, come abbiamo detto più sopra, appositamente trascurato. Quando però noi lo abbiamo fatto, abbiamo veduto la percentuale alzarsi considerevolmente. Veggansi infatti le annotazioni che seguono al quadro di luglio. Da esso risulta che su 85 anofeli di Porto, dei quali furono esaminati l'intestino e le ghiandole salivari, due erano infetti alle ghiandole salivari, uno all'intestino; e su 78 esaminati allo stesso modo, alcuni giorni appresso, ne furono trovati tre infetti, uno all'intestino, uno alle ghiandole salivari, un altro all'intestino ed alle ghiandole salivari. Come si vede su 163 anofeli ne furono trovati infetti 4 alle ghiandole salivari. Così pure aumenta la percentuale per Porto in novembre e per Maccarese in dicembre (veggansi gli specchi

relativi) essendosi fatto l'esame delle ghiandole salivari. Non v'ha dubbio quindi che se avessimo potuto estendere la ricerca alle ghiandole salivari di tutti gli anofeli esaminati, la percentuale sarebbe salita.

Non possiamo poi escludere che nonostante la somma cura usata nello esame, qualche caso di infezione non possa esserci sfuggito nei primissimi stadî, specialmente se l'infezione fosse stata scarsa. Ciò è accaduto certamente per le zanzare infette allo stadio di amfionte libero nel lume intestinale; poichè molto frequentemente accade di dover sezionare anofeli contenenti ancora sangue nello stomaco.

Per tutte queste ragioni riteniamo che le cifre 1,31, 0,91 indicate rispettivamente per Porto e per Maccarese rappresentino solo la percentuale minima od almeno una percentuale al di sotto della vera.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

A. Perroncito. — *Sui mitocondri e apparato reticolare interno delle cellule spermatiche e relative modificazioni durante la divisione cellulare.* Pres. dal Socio B. Grassi.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 4°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1909). Fasc. 10°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. Fasc. 12°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 febbraio 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

(*) Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 6 marzo 1910.* **N. 5.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 5°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Deformazione di una sfera elastica, soggetta a date tensioni, nel caso ereditario.* Nota del Socio Vito Volterra.

§ 1. — Risoluzione d'una equazione integrale di 2° grado.

1. Poniamo, facendo uso di una notazione adottata in precedenti lavori,

$$\mathbf{M}_1 f = m_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_1(x\,,y)\, dx$$

$$\mathbf{M}_2 f = m_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \mu_2(x\,,y)\, dx$$

e supponiamo che le due funzioni finite e continue μ_1 e μ_2 siano permutabili (1), cioè si abbia,

$$\int_x^y \mu_1(x\,,\xi)\, \mu_2(\xi\,,y)\, d\xi = \int_x^y \mu_2(x\,,\xi)\, \mu_1(\xi\,,y)\, d\xi\,.$$

Poniamo poi

$$\mathbf{X}_1 f = x_1 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_1(x\,,y)\, dx$$

$$\mathbf{X}_2 f = x_2 f(y) + \int_0^y f(x)\, \xi_2(x\,,y)\, dx\,,$$

(1) Vedi la mia Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali,* Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 20 febbraio 1910.

e cerchiamo di determinare i parametri x_1, x_2 e le funzioni ξ_1 e ξ_2 in modo tale che

$$(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) f = \mathbf{M}_1 f,$$
$$\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 f = \mathbf{M}_2 f.$$

2. Dovremo avere

$$x_1 + x_2 = m_1 \quad , \quad x_1 x_2 = m_2$$
$$\xi_1(x, y) + \xi_2(x, y) = \mu_1(x, y)$$
$$x_1 \xi_2(x, y) + x_2 \xi_1(x, y) + \xi_1 \xi_2(x, y) = \mu_2(x, y);$$

quindi x_1 e x_2 saranno le radici della equazione di secondo grado

$$x^2 - m_1 x + m_2 = 0,$$

mentre ξ_1 e ξ_2 soddisfaranno alle equazioni integrali di 2° grado

$$\int_x^y \xi_i(x, \zeta)\, \xi_i(\zeta, y)\, d\zeta - \int_x^y \xi_i(x, \zeta)\, \mu_1(\zeta, y)\, d\zeta$$
$$+ (x_i - x_s)\, \xi_i(x, y) = - \mu_2(x, y) + x_i \mu_1(x, y)$$

ove i ed s rappresentano i numeri 1 e 2, oppure 2 e 1 respettivamente.

Supponiamo le radici x_1 e x_2 diverse fra loro: allora, applicando la regola data nella Nota precedentemente citata, avremo che $\xi_1(x, y)$, $\xi_2(x, y)$ si otterranno prendendo successivamente il segno $+$ e il segno $-$ nella formula

$$\frac{1}{2}\mu_1(x, y) \pm \frac{\sqrt{m_1^2 - 4m_2}}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \left(\frac{2m_1 \mu_1 + \mu_1^2 - 4\mu_2}{m_1^2 - 4m_2}\right)^n.$$

Le potenze e i prodotti delle μ_1 e μ_2 nella serie suddetta debbono considerarsi come operazioni di composizione. In virtù della teoria generale, avremo che *la serie stessa sarà sempre uniformemente convergente.*

§ 2. — Risoluzione di una equazione integro-differenziale ausiliaria.

3. Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$z^2 \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2} + z \mathbf{M}_1 \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \mathbf{M}_2 f(y, z) = \varphi(y, z) \tag{1}$$

in cui $\varphi(y, z)$ è una funzione finita e continua.

Essa potrà ancora scriversi

$$z \frac{\partial}{\partial z}\left[z \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \mathbf{X}_1 f(y, z)\right] + \mathbf{X}_2 \left[z \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} + \mathbf{X}_1 f(y, z)\right] = \varphi(y, z);$$

e perciò, applicando i resultati ottenuti in una Nota precedente [1], ne otterremo la soluzione finita e continua, calcolando dapprima:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\Psi(x\,,z) = &\frac{1}{z^{x_1}}\int_0^z \zeta^{x_1-1}\left[\varphi(x\,,\zeta)+\int_0^x \varphi(\xi\,,\zeta)\,\mathrm{V}_1\!\left(\log\frac{\zeta}{z}\,|\,\xi\,,x\right)d\xi\right]d\zeta\\ &-\frac{1}{z^{x_2}}\int_0^z \zeta^{x_2-1}\left[\varphi(x\,,\zeta)+\int_0^x \varphi(\xi\,,\zeta)\,\mathrm{V}_2\!\left(\log\frac{\zeta}{z}\,|\,\xi\,,x\right)d\xi\right]d\zeta,\end{aligned}$$

quindi costruendo:

$$(3)\qquad f(y\,,z) = (\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1)^{-1}\,\Psi(y\,,z),$$

in cui si intende che

$$\mathrm{V}_1(z\,|\,x\,,y) = \sum_1^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n!}\,\xi_1^n(x\,,y)$$

$$\mathrm{V}_2(z\,|\,x\,,y) = \sum_1^{\infty}{}_n \frac{z^n}{n!}\,\xi_2^n(x\,,y)\,,$$

mentre le potenze di ξ_1 e ξ_2 denotano resultati di operazioni di composizione.

§ 3. — Sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

4. Facciamo uso delle notazioni introdotte nella Nota: *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia* [2] e poniamo [3]

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = xt_{11} + yt_{12} + zt_{13}\\ \mathrm{V} = xt_{21} + yt_{22} + zt_{23}\\ \mathrm{W} = xt_{31} + yt_{32} + zt_{33}\end{cases}$$

$$\Theta = 2(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_2)\,\theta\,.$$

Nella ipotesi che non esistano forze di massa, avremo

$$\Delta^2 t_{11} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \qquad \Delta^2 t_{23} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial z}$$

$$\Delta^2 t_{22} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} \qquad \Delta^2 t_{31} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial x}$$

$$\Delta^2 t_{33} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} \qquad \Delta^2 t_{12} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial y}$$

$$\Delta^2\Theta = 0\,;$$

[1] Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 6 febbraio 1910.
[2] Rend. Acc. dei Lincei, seduta del 19 dicembre 1909.
[3] Cfr. Almansi, Memorie della R. Acc. di Torino, 1897.

quindi

$$\Delta^2 U = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 V = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

$$\Delta^2 W = \frac{\partial}{\partial z}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right)$$

e per conseguenza

$$(5)\qquad \begin{cases} U = U_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ V = V_1 + (r^2 - R^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ W = W_1 + (r^2 - R)^2\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

ove $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante e U_1, V_1, W_1, f sono funzioni armoniche, mentre

$$(6)\qquad r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f = \frac{1}{4}\left(x\frac{\partial \Theta}{\partial x} + y\frac{\partial \Theta}{\partial y} + z\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \Theta\right) = \frac{1}{4}\left(r\frac{\partial \Theta}{\partial r} - \Theta\right).$$

5. Se l'origine è nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U_1, V_1, W_1 saranno determinate quando si conoscano le tensioni che sollecitano la sfera al contorno. Tenendo poi conto che dalle (5) e (4) e delle relazioni che legano le tensioni alle deformazioni, si ha

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} + 2r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \\ &= t_{11} + t_{22} + t_{33} = (3\mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_1)\,\theta = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)^{-1}(3\mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_1)\,\Theta, \end{aligned}$$

colla eliminazione di Θ fra questa ultima relazione e la (6) resulterà che f dovrà soddisfare l'equazione integro-differenziale

$$(8)\qquad r^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \mathbf{A}_3\left(r\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2}f\right) = \frac{1}{2}\left(\Theta_1 - r\frac{\partial \Theta_1}{\partial r}\right)$$

in cui

$$\Theta_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z}$$

$$\mathbf{A}_3 = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)^{-1}(3\mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_1).$$

L'equazione integro-differenziale (8) rientra nel caso contemplato nel paragrafo precedente, quindi si potrà calcolare f, ottenuta la quale si avranno U, V, W.

Ciò fatto si troverà θ dalla relazione (vedi form. 7))

$$\theta = (3A_2 - 4A_1)^{-1}\left(\Theta_1 + 2r\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

e poichè le (4) possono scriversi

$$x(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}) = U$$
$$y(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}) = V$$
$$z(A_2 - 2A_1)\,\theta + A_1(x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}) = W$$

potremo ricavare immediatamente i trinomii

$$2x\gamma_{11} + y\gamma_{12} + z\gamma_{13}\ ,\quad x\gamma_{21} + 2y\gamma_{22} + z\gamma_{23}\ ,\quad x\gamma_{31} + y\gamma_{32} + 2z\gamma_{33}$$

dai quali, col metodo dato dal prof. Almansi [1], si calcoleranno gli spostamenti allorchè si conoscerà lo spostamento e la rotazione della particella che giace al centro della sfera.

6. Nei problemi relativi alla terra, allorchè si vuol tener conto della sua elasticità, non vi ha dubbio che i fenomeni ereditarii debbono avere una influenza non trascurabile. L'analisi precedente offre il mezzo di calcolare in modo completo gli effetti della ereditarietà, qualunque sia la scelta che si faccia della legge di ereditarietà, purchè si supponga la *ereditarietà lineare*. Si noti che le operazioni a cui si deve ricorrere sono sviluppi in serie i cui termini sono ottenuti con operazioni di composizione e quindi sono in generale rapidamente convergenti, giacchè, nella operazione di composizione, ogni potenza ed ogni composizione di più funzioni, conduce ad una quantità il cui ordine di grandezza è affetto da un divisore eguale al fattoriale relativo all'esponente o al numero delle funzioni che si compongono.

Errata-Corrige di Memorie precedenti.

Vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. 1909, fasc. 9, Nota: *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità*, a pag. 299 ultima riga

$$\int_{t_0}^{T}\sum_{hk}\varphi_{hk/is}(\tau\,,t)\,\gamma'_{hk}(\tau)\,d\tau \quad \textit{leggi} \quad \int_{t}^{T}\sum_{hk}\varphi_{hk/is}(\tau\,,t)\,\gamma'_{hk}(\tau)\,d\tau\,.$$

Vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910, fasc. 4, Nota: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, a pag. 178, 3ª riga dell'Art. 19 (§ 8)

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_h\, m_{ih}^{(p-i)}\, m_{hs}^{i} \quad \textit{leggi} \quad \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}{}_h\, m_{ih}^{(p-r)}\, m_{hs}^{(r)}\,.$$

A pag. 180, 2ª riga dell'Art. 20 (§ 3), dalle relazioni funzionali *leggi* dalle relazioni algebriche e funzionali.

[1] Vedi Memoria citata precedentemente.

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo rigido.* Nota IV del Corrisp. E. ALMANSI.

1. Ho esaminato, nelle Note precedenti, l'azione esercitata da una massa liquida in moto, sopra un corpo *fisso* S_0. Io mi propongo ora di estendere questa ricerca al caso più generale che il corpo S_0 sia pure in movimento, supponendo sempre che la massa liquida occupi interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ del corpo, ed un'altra superficie chiusa, immobile, σ'.

Nella espressione dell'azione A, che è definita dalla formula

$$A = \int_\sigma p\lambda\, d\sigma, \qquad \left(\int_\sigma \lambda\, d\sigma = 0\right) \tag{1}$$

per ciò che riguarda il movimento della massa liquida devono figurare soltanto le componenti di velocità u, v, w, relative a quell'istante a cui si riferisce il valore di A che vogliamo determinare. Potranno pur figurarvi (oltre alla densità ϱ) quantità che dipendano solo da λ, nonchè dalla posizione e dal movimento del corpo in quell'istante, *e negl'istanti successivi*: quantità che saranno considerate come note.

In particolare comparirà nell'espressione di A la funzione φ, armonica e regolare in S, che sopra σ e σ' soddisfa le condizioni $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lambda$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

Noi introdurremo, inoltre, una funzione ψ, pure armonica e regolare in S, che nei punti di σ e σ' soddisfi la condizione

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = N = u\alpha + v\beta + \omega\gamma,$$

α, β, γ detenotando al solito i coseni direttori della normale n che penetra in S.

Nei punti della superficie fissa σ' sarà $N = 0$. Nei punti di σ la N sarà nota, conoscendosi il movimento di S_0, anche negl'istanti successivi a quello cui si riferisce A. La stessa funzione ψ sarà pertanto da ritenersi come nota (a meno di una costante addittiva) in quell'istante *e nei successivi.*

Essa rappresenta il potenziale di velocità relativo ad un movimento della massa liquida, compatibile col dato movimento di S_0.

Porremo, riferiti i punti dello spazio ad un sistema $(x\, y\, z)$ di assi *fissi*:

$$u_0 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w_0 = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{2}$$

$$u_1 = u - u_0, \quad v_1 = v - v_0, \quad w_1 = w - w_0. \tag{3}$$

Sarà allora, in tutto lo spazio S,

(4)
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0,$$

e nei punti di σ e σ':

(5)
$$u_1\alpha+v_1\beta+w_1\gamma=0.$$

Le funzioni u_0, v_0, w_0 sono continue. Invece le u, v, w, quindi anche le u_1, v_1, w_1 potranno avere delle discontinuità. Ma se $d\omega$ è un elemento di superficie sul quale il vettore $(u_1\, v_1\, w_1)$ è discontinuo, le sue proiezioni, come quelle del vettore $(u\, v\, w)$, sopra una normale a $d\omega$, dovranno essere uguali.

2. Posto

$$f'=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial x}-(v\zeta-w\eta),\ \text{ecc.},$$

sarà, come nella Nota III,

$$A=\varrho(B+C),$$

ove

$$B=\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dS,$$

$$C=\int_S\left(f'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+f''\frac{\partial\varphi}{\partial y}+f'''\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dS.$$

L'integrale C rappresenta una quantità nota. Quanto a B, poichè $u=u_0+u_1$, ecc., ponendo

$$B_0=\int_S\left(\frac{\partial u_0}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dS,$$

$$B_1=\int_S\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dS,$$

sarà:

$$B=B_0+B_1.$$

L'integrale B_0 è pure noto. Ma noi possiamo dargli una forma più semplice, osservando che $\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$, ecc. Integrando per parti, e tenendo presenti le proprietà della funzione φ, avremo:

(6)
$$B_0=-\int_\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda\,d\sigma.$$

Per trasformare l'integrale B_1 introdurremo la funzione

$$Q_1 = u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} . \tag{7}$$

Supporremo poi definita la funzione λ, e con essa la φ, anche negl'istanti successivi al tempo t a cui si riferisce il valore di A. Onde sarà, posto $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi'$:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + u_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} .$$

E perciò

$$B_1 = \int_S \frac{\partial Q_1}{\partial t} dS - B_1' ,$$

ove

$$B_1' = \int_S \left(u_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) dS .$$

Con una integrazione per parti, e chiamando Σ l'insieme delle due superficie σ e σ' che limitano lo spazio S, avremo

$$B_1' = -\int_S \varphi' \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) dS - \int_\Sigma \varphi'(u_1 \alpha + v_1 \beta + w_1 \gamma)\, d\Sigma ,$$

trasformazione lecita, anche se esistono delle superficie ω su cui u_1, v_1, w_1 siano discontinue, per la continuità di φ', e della componente, secondo le normali ad ω, del vettore $(u_1\, v_1\, w_1)$.

In virtù delle formule (4) e (5) sarà $B_1' = 0$; e per conseguenza:

$$B_1 = \int_S \frac{\partial Q_1}{\partial t} dS = \int_S \frac{dQ_1}{dt} dS - \int_S \left(u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS .$$

Ma $\int_S \frac{dQ_1}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_S Q_1\, dS$; e $\int_S Q_1\, dS = 0$, come si riconosce eseguendo su questo integrale, dopo sostituita a Q_1 la sua espressione (7), una trasformazione analoga a quella eseguita sopra B_1'. Dunque:

$$B_1 = -\int_S \left(u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS .$$

Poichè $A = \varrho(B + C)$, e $B = B_0 + B_1$, ponendo $B' = C + B_1$, ossia

$$\begin{aligned} B' = \int_S \left(f' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + f'' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f''' \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dS - \\ - \int_S \left(u \frac{\partial Q_1}{\partial x} + v \frac{\partial Q_1}{\partial y} + w \frac{\partial Q_1}{\partial z} \right) dS , \end{aligned} \tag{8}$$

sarà:

$$A = \varrho(B_0 + B'). \tag{9}$$

Abbiamo così un'espressione di A che soddisfa alle condizioni richieste.

Ma noi possiamo dare ad A un'espressione diversa, e tale, che nel caso in cui il corpo S_0 sia fisso, ci riconduca immediatamente ad una delle formule stabilite nelle Note precedenti.

Poniamo perciò

$$Q = u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{10}$$

$$Q_0 = u_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{11}$$

Sarà allora, per le formule (7) e (3), $Q_1 = Q - Q_0$; e per la (8):

$$B' = \int_S \left\{ \left(f'\frac{\partial\varphi}{\partial x} + f''\frac{\partial\varphi}{\partial y} + f'''\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \left(u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right\} dS +$$
$$+ \int_S \left(u_0\frac{\partial Q_0}{\partial x} + v_0\frac{\partial Q_0}{\partial y} + w_0\frac{\partial Q_0}{\partial z}\right) dS.$$

Nel primo integrale la quantità sotto il segno è uguale a $-[Q]^2$, essendo, come nella Nota III

$$[Q]^2 = u^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \cdots + 2vw\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} + \cdots$$

Il secondo integrale si riduce a $-\int_\sigma Q_0\,N\,d\sigma$. Onde sarà

$$B' = -\int_S [Q]^2\,dS - \int_\sigma Q_0\,N\,d\sigma;$$

e per le formule (9) e (6):

$$A = -\varrho\int_S [Q]^2\,dS - \varrho\int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda + Q_0\,N\right) d\sigma. \tag{12}$$

Quando il corpo S_0 è fisso, sarà $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$, $N = 0$; si ritrova così la formula

$$A = -\varrho\int_S [Q]^2\,dS$$

della Nota III.

Il termine

$$-\varrho\int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda + Q_0\,N\right) d\sigma$$

che compare allorchè il corpo si muove, è indipendente dal movimento della massa liquida: esso dipende solo (oltre che da ϱ e da λ) dalla posizione e dal movimento di S_0. La presenza della derivata di ψ rispetto al tempo mostra però che questo termine non dipende soltanto dal movimento (traslazione e rotazione) del corpo S_0 *al tempo* t.

3. Noi vogliamo porre sotto un'altra forma l'integrale

$$B_0 = -\int_\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda \, d\sigma,$$

che figura nella formula (12).

A tale scopo definiremo la funzione λ, anche negl'istanti successivi a t, supponendo che per *qualunque* posizione del corpo S_0 nell'interno di σ', si abbia

$$\lambda = X\alpha + Y\beta + Z\gamma,$$

ove X, Y, Z rappresentano tre funzioni delle variabili x, y, z, regolari in *tutto* lo spazio racchiuso da σ', che soddisfano all'equazione:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

Se A rappresenta la componente, secondo uno degli assi coordinati, della forza o della coppia cha agisce sul corpo, sarà:

$$\lambda = -\alpha, \text{ quindi } X = -1, \; Y = 0, \; Z = 0, \text{ ecc.};$$

oppure

$$\lambda = -\gamma y + \beta z, \text{ quindi } X = 0, \; Y = z, \; Z = -y, \text{ ecc.}$$

Dunque λ è sempre espressa nel modo indicato.

Avremo pertanto:

$$B_0 = -\int_\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \, d\sigma;$$

od anche, Σ denotando, come nel § 2, l'insieme delle superficie σ e σ':

$$B_0 = -\int_\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \, d\Sigma + \int_{\sigma'} \frac{\partial \psi}{\partial t} (X\alpha + Y\beta + Z\gamma) \, d\sigma'.$$

Dei due integrali che costituiscono il secondo membro dell'equazione, il primo possiamo trasformarlo in un integrale esteso ad S. Il secondo, poichè σ' è una superficie fissa, ed $X\alpha + Y\beta + Z\gamma$ conserva, in ogni suo punto, un valore costante, può mettersi sotto la forma di una derivata esatta

rispetto al tempo. Tenendo presente, nel trasformare il primo integrale, la equazione (14), avremo:

$$B_0 = \int_S \left\{ X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + Z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} \right\} dS +$$
$$+ \frac{d}{dt} \int_{\sigma'} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma'.$$

Ora, non dipendendo X, Y, Z dal tempo, posto

$$(14) \qquad \theta = X \frac{\partial \psi}{\partial x} + Y \frac{\partial \psi}{\partial y} + Z \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

sarà

$$X \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + Y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + Z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{dt} - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right);$$

e per conseguenza, osservando che

$$\int_S \frac{d\theta}{dt} dS = \frac{d}{dt} \int_S \theta\, dS,$$

$$\int_S \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) dS = - \int_\Sigma \theta N\, d\Sigma = - \int_\sigma \theta N\, d\sigma:$$

$$B_0 = \frac{d}{dt} \left\{ \int_S \theta\, dS + \int_{\sigma'} \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma' \right\} + \int_\sigma \theta N\, d\sigma.$$

Ma per le formule (14) e (13):

$$\int_S \theta\, dS = - \int_\Sigma \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\Sigma.$$

Quindi:

$$B_0 = - \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi (X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\sigma + \int_\sigma \theta N\, d\sigma,$$

ossia:

$$B_0 = - \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi \lambda\, d\sigma + \int_\sigma \theta N\, d\sigma:$$

formula che presenta la proprietà (utile nell'applicazione a casi particolari) di non contenere derivate rispetto al tempo sotto i segni d'integrazione.

4. Riprendiamo la formula (12) che scriveremo, sostituendo a

$$- \int_\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} \lambda\, d\sigma,$$

ossia a B_0, l'espressione trovata:

$$A = - \varrho \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi \lambda\, d\sigma + \varrho \int_\sigma (\theta - Q_0)\, N\, d\sigma - \varrho \int_S [Q]^2\, dS,$$

o più semplicemente:

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + A_1,$$

essendo:

$$\Phi = -\varrho \int_\sigma \psi \lambda \, d\sigma,$$

$$A_1 = \varrho \left\{ - \int_S [Q]^2 dS + \int_\sigma (\theta - Q_0) N \, d\sigma \right\}.$$

Poniamo $R = \theta - Q_0$. Sarà:

$$A_1 = \varrho \left\{ - \int_S [Q]^2 dS + \int_\sigma R N \, d\sigma \right\}; \tag{15}$$

e per le formule (14), (11) e (2):

$$R = \left(X - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(Y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(Z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Il termine A_1 dipende dal movimento della massa liquida; e per movimenti *simili* è proporzionale al quadrato della velocità in un punto. Se infatti moltiplichiamo u, v, w per una costante c, $[Q]^2$ risulta moltiplicato per c^2; N, quindi anche la funzione ψ, ed R, per c; dunque RN per c^2.

L'altro termine che figura in A è la derivata, rispetto al tempo, di una quantità Φ *indipendente dal movimento della massa liquida.*

Matematica. — *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Quando si voglia risolvere il problema di Dirichlet mediante uno strato semplice, distribuito sul contorno del campo che si considera, una prima quistione, che si presenta, è di vedere se esistono o no strati semplici aventi valori nulli nei punti del contorno stesso; ovvero, riferendosi all'equazione integrale di 1ª specie, a cui il problema dà luogo, di vedere se il nucleo (Kern) corrispondente è non chiuso o chiuso. Per i campi a *tre* dimensioni è noto che il nucleo è sempre chiuso, ossia che lo strato semplice, avente valori nulli nei punti del contorno, ha la densità uguale allo *zero*. Non accade lo stesso per il caso delle aree piane. Il Picard in una recente pubblicazione [1], limitandosi al caso di un contorno circolare, ha notato che per la circonferenza di raggio 1 il nucleo è non chiuso, mentre per qualunque altra circonferenza il nucleo è sempre chiuso. Nella presenta Nota

[1] *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIX, anno 1910, pp. 77-97.

dimostro l'esistenza di infinite linee piane chiuse (che chiamo *speciali*), per le quali il nucleo è non chiuso, ossia per ognuna delle quali esiste uno strato semplice logaritmico avente valori nulli lungo la linea stessa. Allora si presenta subito la seguente quistione: data una linea piana chiusa, sarà essa speciale o no? Qui do delle condizioni sufficienti perchè una linea non sia speciale, e delle condizioni necessarie (in generale non sufficienti) perchè una linea sia speciale; e dimostro ancora alcune proprietà delle linee speciali e non speciali, le quali possono contribuire a risolvere ogni volta la quistione proposta.

Del problema di Dirichlet mediante uno strato semplice e di altri problemi, che ad esso si ricollegano, mi occuperò in una prossima comunicazione.

1. Sia C una linea piana chiusa, la quale non si intersechi in alcun suo punto e per la quale siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1°) abbia una tangente determinata in ogni suo punto, variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto;

2°) esista un numero fisso positivo a tale che, indicando con $\widehat{nn'}$ l'angolo formato dalle normali n, n' in due punti qualsiasi s, s' di C, rivolte verso l'area piana finita limitata da C, e con r' il vettore $\overline{ss'}$, si abbia:

$$\widehat{nn'} < ar'.$$

Riferiamo i punti del piano C a due assi cartesiani ortogonali x, y; ed indichiamo con s l'arco della curva C, contato a partire da un suo punto arbitrario; con σ l'area piana finita racchiusa da C; con σ' l'area piana infinita limitata pure da C; e con r il vettore che congiunge il punto generico (ξ, η) del piano con un punto qualsiasi $s \equiv (x, y)$ di C. Quando il punto (ξ, η) è nell'interno dell'area σ, sarà indicato con P; quando è nell'interno dell'area σ', sarà indicato con P'; quando si trova su C, sarà indicato con la corrispondente lunghezza s' dell'arco di curva C. In questo ultimo caso il corrispondente vettore r, conformemente a quanto fu fatto sopra, sarà indicato con r'.

Osserviamo che, se si pone:

$$\alpha(s, s') = \frac{1}{2\pi} \frac{d \log r'}{dn},$$

sarà

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d \log r'}{dn'} = \alpha(s', s);$$

e la funzione $\alpha(s, s')$ sarà sempre finita e, tranne al più per $s = s'$, continua.

Ciò premesso, indichiamo con $v(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C, e consideriamo lo strato semplice:

$$\mathrm{V}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{C}} v(s) \log r \, ds.$$

Posto:

$$\overline{\frac{dV}{dn'}} = \lim_{P=s'} \frac{dV}{dn'} \quad , \quad \overline{\overline{\frac{dV}{dn'}}} = \lim_{P'=s'} \frac{dV}{dn'} ,$$

si ha, come è noto [1],

$$\overline{\frac{dV}{dn'}} = \tfrac{1}{2} v(s') + \int_C v(s) \, . \, \alpha(s', s) \, ds , \tag{1}$$

$$\overline{\overline{\frac{dV}{dn'}}} = - \tfrac{1}{2} v(s') + \int_C v(s') \, . \, \alpha(s', s) \, ds \ [2]. \tag{2}$$

Teoremi sulle funzioni armoniche.

2. Diremo che una funzione $A(\xi, \eta)$ è armonica in un campo piano finito σ limitato da una o più linee, il cui complesso indicheremo con C, se essa è finita e continua in tutto il campo σ (i punti di C inclusi), se ha le derivate prime finite e continue in tutto il campo σ (i punti di C, al più, esclusi), se esiste ed è finita e continua lungo C l'espressione $\overline{\frac{dA}{dn}}$, e se nei punti dell'interno di σ soddisfa all'equazione di Laplace.

Diremo che una funzione $A(\xi, \eta)$ è armonica in un campo piano infinito σ' limitato da C, se essa, oltre alle condizioni analoghe a quelle poste per la precedente $A(\xi, \eta)$, soddisfa all'altra di annullarsi all'infinito come $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$.

Come è noto, valgono per la $A(\xi, \eta)$ le seguenti formole:

$$\int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma + \int_C A \overline{\frac{dA}{dn}} \, ds = 0 , \tag{3}$$

$$\int_C \overline{\frac{dA}{dn}} \, ds = 0 , \tag{4}$$

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' - \int_C A \overline{\overline{\frac{dA}{dn}}} \, ds = 0 , \tag{3$'$}$$

$$\int_C \overline{\overline{\frac{dA}{dn}}} \, ds = 0 . \tag{4$'$}$$

[1] Vedi ad es. per le tre dimensioni Lauricella: *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica matematica,* Nuovo Cimento. ser. V, vol. XIII, 1907, pp. 1-81.

[2] Le formole (1), (2) sono state dimostrate, ponendo condizioni meno restrittive sia per la linea C, che per la funzione $v(s)$ [Vedi G. Pucciano, *Studio sui potenziali logaritmici di strato lineare semplice e doppio, e delle loro derivate prime,* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XXIII, anno 1907, pp. 374-393].

Rammentiamo ancora che se $B(\xi, \eta)$ è una funzione finita e continua in tutto il campo σ', la quale ha le derivate prime finite e continue in tutto il campo σ', esclusi al più i punti di C, nei punti dell'interno di σ' soddisfa all'equazione di Laplace, e per ϱ abbastanza grande si comporta come $\log \varrho$, mentre le sue derivate prime si comportano come $\frac{1}{\varrho}$, ed inoltre è tale che l'espressione $\frac{\overline{\overline{dB}}}{dn}$ esiste ed è finita e continua lungo C, sussiste la formola:

$$\int_C \left(B \frac{\overline{\overline{dA}}}{dn} - A \frac{\overline{\overline{dB}}}{dn} \right) ds = 0 . \tag{5}$$

3. *Se la funzione armonica* $A(\xi, \eta)$ *del campo* σ' *ha valore costante lungo* C, *essa deve essere identicamente nulla in tutto il campo* σ'.

Infatti dalla (3)′ si ha, indicando con H il valore costante di $A(\xi, \eta)$ su C,

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' - H \int_C \frac{\overline{\overline{dA}}}{dn} ds = 0 ;$$

e perciò, in virtù della (4)′,

$$\int_{\sigma'} \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\sigma' = 0.$$

Di qui, tenuto conto che la $A(\xi, \eta)$ si annulla all'infinito, risulta la proposizione enunciata.

Strato a valore costante lungo C.

4. Si considerino le due seguenti equazioni integrali omogenee:

$$0 = w_1(s') + 2 \int_C w_1(s) . \alpha(s, s')\, ds , \tag{6}$$

$$0 = v_1(s') + 2 \int_C v_1(s) . \alpha(s', s)\, ds . \tag{7}$$

La (6), come è notorio, ammette la soluzione $w_1(s) =$ costante; quindi *la* (7) *ammetterà una soluzione almeno* $v_1(s)$, *la quale,* IN VIRTÙ DELLA PROPRIETÀ DELLA $\alpha(s', s)$, *sarà finita e continua in tutto il campo* C.

5. Ciò premesso, sia $v_1(s)$ una soluzione qualsiasi dell'equazione (7), e si formi con questa soluzione lo strato semplice:

$$V_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v_1(s) . \log r . ds . \tag{8}$$

Dalle (1), (7) risulta:

$$\overline{\frac{dV_1}{dn}} = 0;$$

quindi *lo strato* V_1 *nei punti di* C *ha un valore costante.*

Dalle (2), (7) si ha poi:

$$\overline{\overline{\frac{dV_1}{d\nu}}} = -v_1(s). \tag{9}$$

Rammentiamo che per ϱ abbastanza grande si ha per uno strato qualsiasi $V_1(\xi, \eta)$:

$$V_1(\xi, \eta) = \log \varrho \int_C v_1(s)\, ds + \frac{1}{\varrho} M(\xi, \eta), \tag{10}$$

$$\frac{dV_1}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int_C v_1(s)\, ds + \frac{1}{\varrho^2} N(\xi, \eta), \tag{11}$$

dove le funzioni $M(\xi, \eta)$, $N(\xi, \eta)$ e le loro derivate prime sono finite, continue ed inferiori in valore assoluto ad una quantità, che si può fissare.

Di qui segue che *per una soluzione qualsiasi* $v_1(s)$ *dell'equazione integrale* (7) *si deve avere*:

$$\int_C v_1(s)\, ds \neq 0 .$$

Infatti nel caso contrario la $V_1(\xi, \eta)$ sarebbe una funzione armonica nel campo σ'; e quindi, in virtù del teorema al § 3, dovrebbe essere identicamente nulla in questo campo. Allora si avrebbe:

$$\overline{\overline{\frac{dV_1}{dn}}} = -v_1(s) = 0$$

lungo la linea C, contro l'ipotesi.

6. Siano $v_1(s)$, $v_2(s)$ due soluzioni qualsiasi dell'equazione integrale (7). In virtù della proposizione testè dimostrata, si dovrà avere:

$$M_1 = \int_C v_1(s)\, ds \neq 0 \quad , \quad M_2 = \int_C v_2(s)\, ds \neq 0 .$$

Ora si determini una costante b in modo che sia:

$$M_2 - bM_1 = 0;$$

e si consideri la funzione:

$$v_3(s) = v_2(s) - bv_1(s) .$$

Essa sarà una soluzione dell'equazione integrale (7); e poichè:

$$\int_C v_3(s)\,ds = \int_C \{v_2(s) - bv_1(s)\}\,ds = 0\,,$$

così dovrà aversi lungo C:

$$v_3(s) = 0\,,$$

ossia:

$$v_2(s) = bv_1(s)\,.$$

Di qui segue, come complemento al risultato stabilito nel § 4, che *l'equazione integrale* (7) *ammette una sola soluzione, determinata a meno di un coefficiente costante* [1].

7. Per fissare le idee, si determini $v_1(s)$ in modo che sia:

$$\int_C v_1(s)\,ds > 0\,.$$

Tenendo conto della (10) si ha che la corrispondente funzione $V_1(\xi\,, \eta)$ prende il suo minimo valore (costante) su C; quindi sarà in un punto generico di C:

$$\frac{\overline{\overline{dV_1}}}{dn} \leq 0\,;$$

e in virtù della (9) si avrà lungo C:

$$v_1(s) \geq 0\,. \tag{12}$$

Di qui risulta, avuto riguardo alla forma (8) dello strato $V_1(\xi\,, \eta)$, che *se la curva* C *è tale che esiste un punto nell'area* σ, *per il quale* $\log r$ *non muta mai di segno e non si annulla in tutti i punti nei quali la* $v_1(s)$ *è diversa da zero, il valore costante di* $V_1(\xi\,, \eta)$ *nei punti di* C *sarà certamente diverso da zero*; ed in particolare *sarà negativo per tutte le linee* C, *le quali possono essere contenute in un cerchio di raggio* 1, *sarà positivo per tutte le linee* C, *le quali possono abbracciare un cerchio di raggio* 1.

Si ha ancora che *condizione necessaria (in generale non sufficiente) affinchè lo strato* $V_1(\xi\,, \eta)$ *sia uguale allo zero nei punti di* C *è che la linea* C *sia intersecata da qualunque circonferenza di raggio* 1 *col centro nell'area* σ.

[1] La prima dimostrazione che io detti di questa proposizione nella mia Nota: *Sulla risoluzione del problema di Dirichlet col metodo di Fredholm e sull'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei solidi elastici indefiniti*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, t. XV, ser. 5ª, anno 1906, pp. 611-619, dipende dal teorema di Liapounoff sulla continuità delle derivate normali di doppio strato, e richiede condizioni più restrittive sulla natura della linea C.

Chiameremo *linea speciale* una linea C, il cui corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$ si annulla nei punti di C.

Esistenza di infinite linee speciali.

8. Si consideri una linea C, si dia alla corrispondente funzione $v_1(s)$, soluzione dell'equazione integrale (7), il segno positivo, e si indichi con H il valore costante che il corrispondente strato $V_1(\xi, \eta)$ prende nei punti di C. Osserviamo che per ϱ abbastanza grande la $V_1(\xi, \eta)$ avrà valori maggiori di qualunque numero positivo arbitrariamente dato; sicchè, in virtù della continuità, dato ad arbitro un numero H′ maggiore di H, esisterà nell'area infinita σ' limitata da C un luogo C′ di punti (ξ, η) tali che:

$$V_1(\xi, \eta) = H'.$$

Dimostriamo anzitutto che il luogo C′ abbraccia C, ossia che non è possibile allontanarsi indefinitamente dai punti di C sul piano, senza incontrare in qualche punto il luogo C′.

Infatti, congiunto mediante una linea piana qualsiasi $\varDelta$ un punto arbitrario P di C con un punto qualsiasi P″ dell'area σ', nel quale la funzione $V_1(\xi, \eta)$ abbia un valore $H'' > H'$, si ha, in virtù della continuità, che un punto almeno di C′ deve far parte della linea $\varDelta$.

Da quanto precede risulta intanto che farà certamente parte del luogo C′ una linea $\varGamma$ chiusa, abbracciante C.

Aggiungiamo che nessun altro punto del piano discosto da $\varGamma$ può far parte del luogo C′. Infatti nel caso contrario questo punto, secondo che si troverà nell'interno dell'area finita limitata da C e da $\varGamma$, o nell'interno dell'area infinita limitata da $\varGamma$, rappresenterà un punto, non facente parte del contorno, nel quale la funzione $V_1(\xi, \eta)$ piglia il suo valore massimo o minimo. Il che è impossibile.

Per la medesima ragione la linea $\varGamma$ non può intersecarsi in alcun suo punto.

Possiamo dunque concludere che *il luogo C′ è formato da una linea chiusa semplice, che non si interseca in alcun suo punto e che abbraccia la linea C.*

9. Indichiamo con n' la direzione della normale nei punti di C′ rivolta verso l'area finita da essa racchiusa, e con s' l'arco della curva C′.

Osserviamo che, essendo i punti di C′ discosti da C, le derivate prime di $V_1(\xi, \eta)$ lungo la linea C′ saranno finite e continue.

Ciò premesso, si consideri un punto (ξ, η) qualsiasi interno all'area

piana finita σ_1 limitata da C e da C'. Applicando la formola di Green, si avrà:

$$\mathrm{V}_1(\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}}\left\{\log r\,\overline{\overline{\frac{d\mathrm{V}_1}{dn}}} - \mathrm{V}_1\frac{d\log r}{dn}\right\}ds + $$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}'}\left\{\log r\frac{d\mathrm{V}_1}{dn'} - \mathrm{V}_1\frac{d\log r}{dn'}\right\}ds'$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}}\left\{\log r\,.\,v_1(s) + \mathrm{H}\frac{d\log r}{dn}\right\}ds +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}'}\left\{\log r\frac{d\mathrm{V}_1}{dn'} - \mathrm{H}'\frac{d\log r}{dn'}\right\}ds';$$

e poichè:

$$\int_{\mathrm{C}}\frac{d\log r}{dn}ds = 0 \quad , \quad \int_{\mathrm{C}'}\frac{d\log r}{dn'}ds' = -2\pi,$$

risulterà, in virtù della (8),

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}'}\log r\frac{d\mathrm{V}_1}{dn'}ds' + \mathrm{H}'.$$

Posto allora:

$$v_1'(s') = -\frac{d\mathrm{V}_1}{dn'},$$

si avrà che lo strato:

$$\mathrm{V}_1'(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}'}v_1'(s')\log r\,ds'$$

prende in tutti i punti dell'area finita limitata da C' (i punti di C' inclusi) il valore costante H'.

La formola (4), applicata all'area finita σ_1, ci darà poi:

$$-\int_{\mathrm{C}}\overline{\overline{\frac{d\mathrm{V}_1}{dn}}}ds + \int_{\mathrm{C}'}\frac{d\mathrm{V}_1}{dn'}ds' = 0,$$

ossia:

$$\int_{\mathrm{C}}v_1(s)\,ds - \int_{\mathrm{C}'}v_1'(s')\,ds' = 0. \tag{13}$$

Si osservi che la differenza $\mathrm{V}_1(\xi,\eta) - \mathrm{V}_1'(\xi,\eta)$ prende nei punti di C' il valore *zero*; inoltre, in virtù delle (10), (11) e della (13), per ϱ abbastanza grande essa si comporta come $\frac{1}{\varrho}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$; sicchè, in forza del teorema dimostrato al § 3, *dovrà aversi in tutta l'area infinita σ'' limitata da* C':

$$\mathrm{V}_1(\xi,\eta) = \mathrm{V}_1'(\xi,\eta).$$

10. *Si consideri una linea chiusa* C_1 *qualsiasi, tale che nei suoi punti non sia* $\mathrm{V}_1(\xi,\eta)$ *uguale a costante.* Si indichi con $\mathrm{V}_1^{(1)}(\xi,\eta)$ lo strato

distribuito lungo la linea C_1, avente nei punti di C_1 stessa un valore costante; e si determini la corrispondente densità $v_1^{(1)}(s_1)$ in modo che sia:

$$(14) \qquad \int_C v_1(s)\, ds = \int_{C_1} v_1^{(1)}(s_1)\, ds_1 .$$

Dimostriamo che *non esiste alcuna linea* C', *abbracciante le due linee* C, C_1, *nei punti della quale sia*:

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = \text{costante}.$$

Infatti, in virtù della (14), la funzione $V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ è armonica nel campo infinito σ'' limitato da C'; e quindi dovrebbe aversi in tutto il campo σ'' (i punti di C' inclusi):

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0 .$$

Ora la funzione $V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta)$, essendo analitica in qualunque cerchio ω avente il centro in un punto qualsiasi di σ'' (in particolare di C') e tutto discosto da C e da C_1, sarebbe uguale allo *zero* in tutti i punti di ω e quindi ancora in tutti i punti dell'interno dell'area infinita σ''' limitata da C_1 o da C e C_1, secondo che la C_1 abbraccia o non abbraccia la linea C. Allora, in virtù della continuità, anche nei punti di C_1 dovrebbe aversi:

$$V_1(\xi, \eta) - V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0 ,$$

contrariamente all'ipotesi fatta.

11. Da ciò che precede *risulta l'esistenza di infinite linee speciali distinte*.

Infatti sia C una linea chiusa qualsiasi, contenuta nell'interno di un cerchio Γ di raggio 1, i cui punti siano discosti dalla circonferenza γ di Γ. Scelta la corrispondente $v_1(s)$ positiva, il corrispondente strato semplice logaritmico $V_1(\xi, \eta)$ avrà su C un valore costante negativo; per cui esisterà una linea C' abbracciante C, nei cui punti sarà: $V_1(\xi, \eta) = 0$. Quindi, in virtù del teorema dimostrato al § 9, sarà C' una linea speciale.

Ciò posto, si consideri una nuova linea chiusa C_1, contenuta nell'interno di Γ e discosta da γ, e tale inoltre che nei suoi punti non sia: $V_1(\xi, \eta) = \text{costante}$. Indichiamo con $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ lo strato distribuito lungo la linea C_1 ed avente un valore costante nei suoi punti. Supposto di avere scelto il segno positivo per la corrispondente densità $v_1^{(1)}(s)$, avremo che il valore costante di $V_1^{(1)}(\xi, \eta)$ nei punti di C_1 sarà negativo; per cui esisterà una linea C_1' abbracciante C_1, nei cui punti sarà $V_1^{(1)}(\xi, \eta) = 0$. Questa linea C_1' sarà allora una linea speciale, la quale, in virtù del teorema dimostrato al § precedente, sarà distinta da C'.

Si consideri ora una linea chiusa C_2 nell'interno di Γ e discosta da γ, e tale inoltre che nei punti di essa non sia nè $V_1(\xi, \eta) = \text{costante}$, nè

$V_1^{(1)}(\xi, \eta) =$ costante. Esisterà una corrispondente linea speciale C'_2, distinta da C' e da C'_1.

Seguitando a ragionare nella medesima maniera, *risulterà appunto la esistenza di una serie infinita* $C', C'_1, C'_2, \ldots$ *di linee speciali tutte distinte*, corrispondenti alla serie indefinita $C, C_1, C_2, \ldots$ di linee chiuse scelte con la legge ora indicata.

Proprietà delle linee speciali.

12. In virtù del risultato al § 7 si ha che una linea speciale qualsiasi non può abbracciare, nè essere abbracciata da una circonferenza di raggio 1. Più in generale qui vogliamo dimostrare che *una linea speciale qualsiasi non può mai abbracciare (o essere abbracciata da) un'altra linea speciale.*

Infatti, supponiamo che una linea speciale C' possa essere abbracciata da un'altra linea speciale C''. Si considerino gli strati $V'(\xi, \eta)$, $V''(\xi, \eta)$, distribuiti rispettivamente su C', C'' ed aventi rispettivamente su queste linee valori nulli. Supponiamo determinate le corrispondenti densità $v'(s')$, $v''(s'')$ in modo che sia:

$$\int_{C'} v'(s')\, ds' = \int_{C''} v''(s'')\, ds''.$$

Allora l'espressione $V'(\xi, \eta) - V''(\xi, \eta)$ per ϱ abbastanza grande si comporterà come $\frac{1}{\varrho}$ e le sue derivate prime come $\frac{1}{\varrho^2}$; per conseguenza essa rappresenterà nell'area infinita σ'_1 limitata da C'' una funzione armonica. Potremo quindi applicare la formola (5) del § 2, la quale ci darà:

$$\int_{C''} \left\{ V'' \frac{\overline{\overline{d(V' - V'')}}}{dn''} - (V' - V'') \frac{\overline{\overline{dV''}}}{dn''} \right\} ds'' = 0;$$

e poichè lungo C'' si ha:

$$V'' = 0 \ , \ \frac{\overline{\overline{dV''}}}{dn''} = - v''(s'') ,$$

così si dovrà avere:

$$\int_{C''} V' . v'' . ds'' = 0 .$$

Ora questa uguaglianza è impossibile; perchè la $v''(s'')$ nei punti di C'' non è identicamente nulla e nei punti stessi di C'' si ha:

$$V' > 0 \quad , \quad v'' \geq 0 .$$

Da questo teorema risulta, come corollario, la seguente proposizione: *una linea C è certamente non speciale, se esiste una linea speciale che l'abbraccia o che è da essa abbracciata.*

13. Aggiungiamo ancora il seguente risultato: *Se per una linea qualsiasi* C *non speciale si sceglie*, come si è sempre fatto, *il segno positivo per la densità* $v_1(s)$ *del corrispondente strato* $V_1(\xi, \eta)$, si ha che *il valore costante di* $V_1(\xi, \eta)$ *nei punti di* C *è positivo o negativo, secondo che esiste una linea speciale* C' *abbracciata da* C *o che abbraccia* C.

Infatti, sia C tale che esista una linea speciale C' da essa abbracciata. Se il valore costante della corrispondente $V_1(\xi, \eta)$ fosse negativo, esisterebbe una linea speciale C'', la quale dovrebbe abbracciare C e quindi anche C'. Ciò che è impossibile.

Supponiamo ora che la linea C sia tale che esista una linea speciale C' abbracciante C. Se il valore costante della $V_1(\xi, \eta)$, corrispondente alla linea C, fosse positivo, a *fortiori* dovrebbero essere positivi i valori di $V_1(\xi, \eta)$ nei punti di C'; ed allora, indicando con $V'(\xi, \eta)$ lo strato distribuito lungo la linea C' ed avente valori nulli nei punti della C' stessa, e supposta determinata la corrispondente densità $v'(s')$ in modo che sia:

$$\int_{C'} v'(s')\, ds' = \int_{C} v_1(s)\, ds ,$$

avremo, ragionando come al § precedente, la seguente uguaglianza:

$$\int_{C'} V_1 \,.\, v'(s')\, ds' = 0 ,$$

che è assurda.

Astronomia — *Osservazioni astrofisiche e fotografiche della cometa 1910* a, *eseguite nel R. Osservatorio di Catania.* Nota del Corrispondente A. Riccò.

L'Accademia è già stata informata dal prof. Millosevich della scoperta e della posizione e corso della cometa, dedotti dalle osservazioni fatte nel R. Osservatorio al Collegio Romano. Ho l'onore di comunicare all'Accademia una Nota preliminare sulle osservazioni astrofisiche che abbiamo potuto fare all'Osservatorio di Catania nelle condizioni sfavorevoli causate dal chiarore del crepuscolo e poi anche da quello della luna, dalla brevità dell'intervallo fra il tramonto del sole e quello della cometa, ed inoltre dal tempo ostinatamente e singolarmente cattivo per Catania.

In seguito sarà pubblicato uno studio più completo delle dette osservazioni e delle fotografie fatte.

Prima che l'Osservatorio di Catania avesse notizia della comparsa di questa cometa, essa fu scorta per caso il 22 gennaio, poco dopo il tramonto del sole, da mio figlio Ugo, giovanetto dotato di vista molto acuta. Corremmo subito agli strumenti, ma prima che questi fossero puntati la cometa era già scomparsa dietro le nubi a ponente.

Si fece appena a tempo a vederla anche col binocolo; aveva il nucleo lucidissimo, circa come stella di prima grandezza, la chioma pure assai lucida, la coda dritta, poco divergente, quasi verticale. Il nucleo e tutta la parte più lucida della cometa erano di colore decisamente giallo-rossiccio.

Per il giorno seguente le osservazioni furono così organizzate:

Riccò all'equatoriale *Cooke* di 15 cm. apertura: osservazioni visuali, dirette e spettroscopiche.

Bemporad all'equatoriale *Steinheil* di 8 cm. apertura, fornito di fotometro registratore a cuneo, avrebbe tentato di fare misure fotometriche.

Horn all'equatoriale fotografico di 33 cm. apertura e 344 cm. lunghezza focale, al quale avevamo unita una seconda camera con obbiettivo doppio *Zeiss* di 11 cm. apertura e 44 cm. lunghezza focale, che avevo giusto acquistato e poi fatto montare dal meccanico dell'Osservatorio C. Strano, col proposito di studî astro-fisici sulla cometa di Halley; e ne avevo determinata rigorosamente la posizione del fuoco il 3 ed il 4 gennaio. Al medesimo equatoriale avevamo attaccata pure una terza camera fotografica, munita di obbiettivo doppio Voigtländer di 5 cm. apertura e 20 cm. lunghezza focale; per modo che si potevano fare simultaneamente tre fotografie della cometa, ottenendo immagini di diversa grandezza ed intensità.

Osservazioni visuali.

22 gennaio: dalle ore 15 in poi ho cercato inutilmente la cometa: tramontato il sole vi sono nubi ad ovest; alle 17^h45^m, in uno squarcio fra le nuvole, vedo bene la cometa. Nel *Cooke* col minore ingrandimento 35 il nucleo ha forma di disco molto vivo e ben distinto, la chioma è falcata, passante per il nucleo, la coda ha contorno parabolico; è diritta, opposta al sole; tutta la parte più lucida della cometa ha colore rossiccio.

23 gennaio: è nuvoloso; il 24 la cometa ha lo stesso aspetto come al 22, ma si osserva che il lato nord è più lucido e più nettamente terminato dell'altro; nel mezzo della chioma e della coda vi è uno spazio oscuro. La cometa ha il colore rossiccio molto sentito. Il prof. Bemporad trova col fotometro che lo splendore del nucleo è pari a quello di una stella di 3^a. Si tenta l'osservazione spettroscopica, ma la cometa tramonta dietro i fabbricati.

25 e 26 gennaio: nuvolo; al 27 si trova la cometa col *Cooke* a 17^h 57^m: è poco distinta, ma crescendo l'oscurità, diviene sempre più bella. Ha

lo stesso aspetto come al 24, però lo spazio oscuro interno è meno deciso, ed al lato sud si nota un'altra massa assai men luminosa, come seconda coda, che ha il lato sud un poco più lucido del resto, e convesso verso sud. La tangente alla parte più lucida del lato nord piega di circa 3° verso nord dalla verticale; ma poi il detto lato nord, che è sensibilmente convesso, volge verso sud, cosicchè l'insieme della cometa ad occhio nudo si vede prossimamente verticale fino ad *α Pegasi*; poi la coda volge con forte curvatura ancora più a sud e l'estremità si perde sotto *γ Pegasi*: ciò dà una lunghezza di circa 30°.

Il prof. Bemporad trova che lo splendore del nucleo è circa eguale a quello di una stella di 4ª.

Collo spettroscopio oculare *Clean*, applicato davanti all'oculare di ingrandimento 75, si vede lo spettro continuo del nucleo assai lucido e completo dal rosso al violetto, con tre nodi lucenti, corrispondenti al luogo delle tre bande note degli idrocarburi; il più forte ed esteso nel verde, e forse è doppio; un altro minore nel bleu; un altro men deciso nel giallo: non riesco a distinguere la riga gialla del sodio, forse perchè confusa colla banda gialla a causa della poca dispersione dello spettroscopio.

28 gennaio. L'aspetto della cometa è come ieri, ma è meno luminosa. Al prof. Bemporad risulta un leggero aumento della luce del nucleo rispetto a ieri: ma l'osservazione fotometrica è stata fatta in condizioni molto sfavorevoli. Col piccolo spettroscopio a fessura (senza cannocchialino) di Dubosq si vedono le tre bande degli idrocarburi, però poco estese: ma osservando la cometa mentre tramonta dietro i fabbricati, ho notato che le dette bande si vedono anche un po' dopo che il nucleo è scomparso.

29, *30*, *31 gennaio* e *1° febbraio*, nuvolo.

2 febbraio. Vista la cometa fra le nubi: la parte più vicina al nucleo è allargata molto a triangolo o ventaglio: il lato nord è sempre più lucido ed alquanto convesso. La luce della cometa è molto diminuita; il 3 febbraio fra le nubi si è trovata la cometa molto debole, cosicchè si vede difficilmente ad occhio nudo. Nel cannocchiale il nucleo è ancora distinto, ma la coda è quasi invisibile: pare abbia la forma di prima: non è percettibile la colorazione rossiccia.

Dopo, sia a causa delle nubi, sia per la debolezza della luce della cometa, non si è potuto più fare su di essa osservazioni astrofisiche.

Fotografie.

Le 18 fotografie eseguite dal dott. Horn, e più o meno riuscite secondo le condizioni del cielo, ebbero le seguenti esposizioni:

Equatoriale fotografico.

Mese	Giorno	Esposizione (T. M. di Catania)	Posa
		h m h m	
Gennaio	24	5,56 — 6,1	5^m
"	24	6,9 — 6,26	17
"	27	6,13 — 6,35	22
"	28	6,21 — 6,35	14
"	31	6,25 — 6,34	9
Febbraio	2	6,31 — 6,46	15
"	3	6,30 — 6,51	21

Obbiettivo Zeiss.

Mese	Giorno	Esposizione (T. M. di Catania)	Posa
		h m h m	
Gennaio	24	5,56 — 6,1	5^m
"	24	6,9 — 6,26	17
"	27	6,13 — 6,35	22
"	28	6,26 — 6,34	8
"	31	6,25 — 6,34	9
Febbraio	2	6,31 — 6,46	15
"	3	6,30 — 6,51	21

Obbiettivo Voigtländer.

Mese	Giorno	Esposizione (T. M. di Catania)	Posa
		h m h m	
Gennaio	27	6,13 — 6,35	22^m
"	28	6,26 — 6,34	8
Febbraio	2	6,31 — 6,46	15
"	3	6,30 — 6,51	21

Ho l'onore di presentare all'Accademia come saggio una diapositiva ottenuta da una fotografia fatta all'equatoriale fotografico, dove un minuto d'arco è rappresentato da 1 mm., una diapositiva ottenuta da una fotografia fatta coll'obbiettivo *Zeiss*, dove un grado è rappresentato da 7 $^1/_2$ mm., ed una diapositiva ottenuta da una fotografia fatta coll'obbiettivo *Voigtländer*, dove un grado è rappresentato da 3 $^1/_3$ mm. Si vede subito che le immagini fotografiche corrispondono alla descrizione ed ai disegni fatti dietro l'osservazione visuale.

Conclusione.

Dunque per questa cometa abbiamo prossimamente l'eguaglianza della immagine visuale colla fotografica, mentre in altre comete, per esempio nelle recenti di Daniel e di Morehouse, la differenza delle due immagini era notevolissima. Ciò significa che in questa cometa le principali radiazioni erano comprese nella parte dello spettro capace d'impressionare l'occhio umano e nello stesso tempo la lastra fotografica al bromuro d'argento (non ortocromatica), cioè radiazioni comprese specialmente tra il verde ed il violetto; mentre nelle altre due comete citate è noto che vi era abbondanza di radiazioni violette ed ultraviolette. Le nostre osservazioni spettroscopiche di questa cometa, per quanto incomplete, dimostrano infatti abbondanza di raggi visibili nello spettro del nucleo, continuo e molto esteso, cui si aggiungono le radiazioni bleu, verde e gialla degli idrocarburi, come pure quelle gialle del sodio, che altri osservatori, sia prima di noi, sia con mezzi più potenti, hanno potuto vedere e fotografare.

La colorazione giallo-rossiccia della cometa in discorso non è fatto nuovo: fu notevolissima nella cometa Wells e nella grande del 1882. Nella prima di queste comete la radiazione del sodio era così grande da dare una immagine della parte lucida della cometa nella fessura allargata dello spettroscopio. L'altra cometa dello stesso anno, la 1882 II, quando era vicina al perielio, aveva uno spettro ricco di radiazioni metalliche, ed io osservai che allontanandosi la cometa dal perielio quelle radiazioni scomparivano, mentre quelle degli idrocarburi si facevano sensibili e poi sempre più distinte; ed infine restavano soltanto le tre bande degli idrocarburi medesimi con traccia di spettro continuo. Nello stesso tempo, anzi ben presto, scompariva la colorazione gialla della cometa, e restava il colore azzurrino (1).

Questi fenomeni delle comete sono conformi alla esperienza di Hasselberg (2), il quale ha fatto vedere che se si ha un tubo di Geissler contenente un idrocarburo e sodio, al passaggio della corrente elettrica si vedono solo le bande degli idrocarburi; ma se si scalda, diviene visibile e sempre più brillante la riga del sodio, mentre le bande degli idrocarburi si indeboliscono; lasciando raffreddare si producono i fenomeni inversi.

Ciò prova che le dette variazioni dello spettro delle comete sono dovute al riscaldamento prodotto in esse dal sole nel passaggio al perielio.

(1) Mem. della Soc. degli Spettr. ital, vol. XII, 1883, pag. 217.

(2) Memorie idem, vol. XI, 1882, pag. 31 (2°).

Geologia. — *Il profilo geologico del Sempione.* II. *Il Monte Cistella, la Valle della Cairasca e la galleria elicoidale di Varzo* (Profili 3, 4, 5, 7). Nota del Socio CARLO DE STEFANI [1].

Prima di passare alla Cairasca esaminiamo la cresta dal Pizzo de' Diei al Corno Cistella, che forma lo spartiacque fra la Cairasca e il Devero. Essa segna il culmine dell'ellissoide Sempione-Toce e nello stesso tempo risponde quasi all'asse minore dell'ellissoide stessa, alquanto più prossimamente però alla estremità sua di S. O. Considerando gli strati della suddetta cresta nella direzione dell'asse minore dell'ellissoide, dal Rio Bondolero, anzi dal Helsenhorn a N. O., fino al Corno Cistella a S. E. (prof. 3), si vede che a N. O. sul Bondolero, dove appaiono alla superficie solo i Calceschisti (n. 4), questi scendono ordinariamente di circa 10°-30° a N. O.; essi diventano poi orizzontali come le altre rocce adiacenti sulla cresta; ma però ad Est del Corno Cistella accennano a scendere per brevissimo tratto e con inclinazione di 5° verso S. E., ricoprendo l'ellissoide. Sul versante del Devero tutti gli strati mostrano le testate a picco ed orizzontali, salvo la lieve tendenza estrema a S. E. (prof. 8). Ivi, sopra i Micascisti (n. 2), scarsissimi come già si disse, sulla destra del Devero, è il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3) altissimo; poi sono i Calceschisti con Micascisti gneissici intercalati (n. 4) abbastanza alti sul Bondolero, ristretti sulle cime, e al di sopra, il Pizzo de' Diei, il Cistella ed il Corno omonimo sono formati dal *Gneiss* a due miche, detto di Lebendun e di Valgrande (n. 5) isolato ed interrotto. È un *testimonio* un superstite alla denudazione, che si connette più lungi con lo stesso *Gneiss* il quale sopra i Calceschisti si ritrova in alto sulla sinistra del Bondolero, nel M. Moro in Val Dentro e in Val Grande. In principio, d'accordo, parmi col Gerlach, vidi in quel *Gneiss* un indizio di rovesciamento e l'estremo lembo di una piega ricoprente, proveniente da N. O. Oggi invece lo riguardo come residuo di un ricoprimento regolare della zona n. 5 dell'ellissoide; che infatti ha la sua continuazione oltre che a N. O., anche a S. E. sul Toce e nella Valle dell'Isorno e tutto intorno negli *Gneiss* scistosi di Crevola, di Preglia ecc., che cingono quasi tutta l'ellissoide. Così pure i calceschisti sottostanti figurano, a uso copertura, nel Pizzo del Forno a N. O., indi oltre il Toce e tutto intorno anche dalla foce di Val Divedro in Toce fino sopra Gondo (prof. 1, 3, 4, 5, 6), dove pur sono identici quantunque nelle Carte geologiche siano segnati quasi tutti solo come *Gneiss* e come una fascia diversa dalle rocce precedenti, senza dubbio per la mano diversa che redasse la Carta in quel tratto. A tale continuazione

[1] Vedi questi Rendiconti fasc. 3°, 1° sem. Seduta del 6 febbraio 1910.

delle rocce della cresta del Cistella ed alla conseguente copertura regolare dell'ellissoide, accenna pure il fatto che a S. O. della cresta, verso la Cairasca ed il Sempione, tutte le masse rocciose scendono con relativa rapidità verso S. O. (prof. 7, 8).

La Carta Svizzera, redatta quivi dallo Stella, segna il limite delle rocce con esattezza sulla sinistra della Cairasca. Mi sembra però che alcune frane esterne assai potenti e le rispettive faglie abbiano leggermente complicato la stratigrafia, in quanto alcuni strati si abbassano più di quanto la naturale inclinazione comporterebbe. Intanto però nell'alto della Fresaia e del Rio di Varzo la zona dei Calceschisti (n. 4) scende già assai (prof. 8), ed altri lembi ancora, sempre al di sopra dello *Gneiss* (n. 3), se ne vedono a mezza costa tra il Rio Callaiolo, la Fresaia, il Rio Maulone e il Rio di Varzo affluenti alla sinistra della Cairasca e della Diveria.

Il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3) che sulla destra del Devero è assai alto, qui sulla sinistra della Cairasca è ridotto a circa 1000 m. e più in basso a circa 600 m. d'altezza. Esso però, anco a sinistra della vallata, chiude palesemente l'anticlinale e l'ellissoide così a S. a valle di Varzo , come a N. a monte di Gebbo (prof. 3, 4, 5). Nemmeno qui si presenta in esso alcun indizio di piega sdraiata. Sotto esso *Gneiss* (n. 3) si presenta la stessa serie n. 2 dei Micaschisti di Baceno (prof. 4, 7); però con altezza e con estensione maggiori che non sul Devero e paragonabili a quelle che hanno sul Toce. Sono Micaschisti granatiferi e staurolitici, accompagnati da Micascisti molto quarzosi a due Miche, da Micaschisti gneissici e da Scisti nodulosi, Calcescisti, Cipollini, alquanti Calcari e Anidriti. La Carta Svizzera segna in qualche punto quei Micaschisti sotto gli *Gneiss*; ma nei tratti maggiori, dando più importanza alle affinità coi Calceschisti superiori (n. 4) che alle differenze, li segna addirittura come Calceschisti della zona 4. Se litologicamente, come dicevo, e come sempre avviene, vi è talora molta affinità, però stratigraficamente e cronologicamente essi ne sono diversi e più antichi, appartenendo alla zona 2. Essi sono la esatta ed immediata continuazione dei Micaschisti di Baceno e del Toce che risorgono oltre la cresta del Cistella (prof. 8). Questa prima chiara e netta constatazione di fatto è assai importante per lo scopo nostro.

Passiamo alla destra della Cairasca e della Diveria, che ne è la continuazione.

Ivi Calceschisti della zona 4 sulle creste in alto non se ne vedono, eccetto alle cime del Pizzo Teggiolo (prof. 5, 6), dove sono sovrapposti ed accompagnati da Calcari, Cipollini e Anidrite, e sono estesi in superficie nel versante orientale del Pizzo ma ben poco alti in potenza. Sotto di essi si estende il *Gneiss* d'Antigorio (n. 3), il quale forma un anticlinale ben appariscente e chiuso così in alto, come a N. a monte del Riale rimpetto a Croso e come a S. della Diveria, là dove le si unisce la Cairasca e dove entra la galleria elicoidale

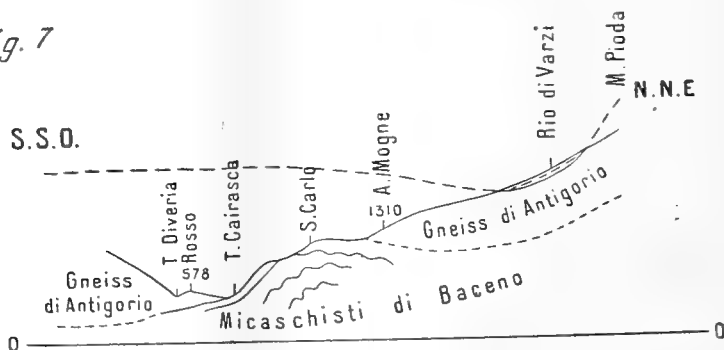
di Varzo (prof. 5). In questo lato sud ne son poi formati per lunghissimo tratto i due versanti della Diveria. Qui a S. il *Gneiss* pare anche più esteso, poichè per lungo tratto si susseguono strati orizzontali o quasi, a cominciare intorno a Trasquera sulla destra della Cairasca e seguitando a S., soggetti a leggerissime parziali curvature, o appena pendenti ad E. rimpetto a Varzo, finchè verso Campeglia, diventando quasi verticali, si nascondono sotto i terreni più recenti. Invece dall'entrata della Cairasca in Diveria (prof. 4, 5) verso N. il *Gneiss* sale leggermente formando l'ala S. O. dell'anticlinale o l'unghia estrema dell'ellissoide che dire si voglia, e sale lentamente fino al Pizzo Teggiolo per scendere poi molto più rapidamente a chiudere l'ala N. rimpetto Croso. Sotto il Pizzo Teggiolo ha un'altezza inferiore a quella che ha in Val Devero, pari a quella ordinaria sulla sinistra della Cairasca. Sotto l'anticliuale gneissico, a soli m. 2500 dal gran *tunnel*, la Carta del Gerlach, e meno bene ancora la Carta Svizzera, segnano solo uno scarso e basso lembo di Micaschisti di Baceno (n. 2) nei dirupi verticali lungo la Cairasca. Invece essi acquistano estensione grandissima quanto sulla sinistra della valle; altro accertamento di fatto che ha grande importanza pel caso nostro. Infatti si estende assai alto l'anticlinale dei Micaschisti granatiferi, staurolitici, quarzosi, coi soliti Calceschisti, Calcari, Anidrite, e talora con schisti nodulosi e cloritici, con abbondanti banchi quarzosi. Questi ultimi scisti rispondono litologicamente a quelli della zona 4 sovrastante al *Gneiss* d'Antigorio, ed a loro volta trovano poche analogie nella continuazione dell'anticlinale in Val Devero ed in Val di Toce, dove prevalgono i Micascisti granatiferi, qui sulla Cairasca più scarseggianti.

Alta serie di frane anche provenienti dal *Gneiss*, e di detriti morenici, copre il suolo a giustificare la difficoltà di un pronto riconoscimento del terreno; ma dovunque è scoperto il suolo primitivo, a Vallerosa, a Ciojna, al Riale si scopre la zona n. 2. Il *Gneiss* non forma che i dirupi della sommità.

La morfologia aiuta il discernimento della stratigrafia. La pendenza all'uscita della valle Cairasca verso la Diveria nel *Gneiss* d'Antigorio a destra della Cairasca è di 8° ad O. (prof. 7): ma quasi tosto, all'imbocco Est della galleria di Trasquera, gli strati del Micascisto, del Cipollino marmoreo, dell'Anidrite immediatamente e regolarmente sottostanti al *Gneiss*. insieme con gli strati inferiori di questo, si inclinano di 12° a S. 30 O. Però sulla opposta sinistra riva della Cairasca, all'imbocco più orientale della Galleria elicoidale di Varzo, i Cipollini e gli scisti nodulosi sottostanti acquistano localmente una inclinazione di più di 45°. Questa si mantiene per poco, poichè più sopra e a monte le pendenze sono molto minori, essendo gli strati quasi orizzontali fino verso il Bragio e Fracchia, quantunque non manchino pieghe secondarie, per es. nei cipollini cloritici sotto Oro del Vino che hanno pendenze invertite a N. E. A monte di Fracchia e Vallerosa e specialmente a S. di

Ciojna gli strati si rialzano con curva più ardita, ma le pendenze si mantengono di circa 8° a S. O., come anche a sinistra della valle sotto Maulone. Ad ogni modo, essi hanno una scesa, sebbene non molto rapida, verso la grande Galleria del Sempione. A N. O. questi stessi strati del Micaschisto granatifero e staurolitico chiudono regolarmente l'anticlinale.

Non mancano qua e là delle infinite rotture, delle pieghettature e delle ondulazioni secondarie, ma non viene alterato l'andamento generale degli strati.

Non vi ha dunque la menoma traccia superficiale di pieghe sdraiate nei Micascisti n. 2 e negli *Gneiss* d'Antigorio n. 3; e nei banchi o negli strati esterni sempre ben visibili non vi ha affatto indizio di quegli andamenti supposti nelle interpretazioni recenti date pel *tunnel* del Sempione.

Ma prima di parlare del gran *tunnel*, premettiamo qualche parola sulla galleria elicoidale detta di Varzo.

Questa descrive un circolo e corre tutta nella zona sottostante al *Gneiss* d'Antigorio, cioè nello Schisto n. 2.

La galleria, a partire dal versante sud, traversò successivamente m. 800 di Micaschisti, m. 850 di Calceschisti e di zona calcareo scistosa, m. 900 dei soliti Micaschisti, e ancora m. 400 di zona calcareo-scistosa e di Calceschisti.

Questa galleria, l'unica della ferrovia del Sempione che traversi gli Schisti n. 2, dà un'idea della multiforme costituzione di questi. La serie che essa presenta può essere completata con quella breve successione di strati micaschistosi, calcarei e anidritici che stanno immediatamente sotto al *Gneiss* n. 3, all'imbocco est della Galleria di Trasquera (prof. 7). Questi strati, pendenti, coi *Gneiss* coi quali sono concordanti, 12° a S. 30 O. sono in quel luogo i più alti della zona schistosa n. 2. Essi coprono a Nord la breve zona di Micaschisti nei quali è aperta l'entrata S. od O. della galleria elicoidale, mentre a S. stanno direttamente sopra ai Cipollini nei quali è aperta l'imboccatura N. od E. della stessa galleria. Ragionevolmente si ritiene che questa zona di Cipollini, Calcescisti e calcari dell'im-

boccatura N, risponda alla zona complessa delle stesse rocce che fu incontrata fra le progressive 560 e 1440 dall' imbocco S. Sotto tale zona sèguita l'alta serie dei Micascisti e Scisti cloritici n. 2. In breve spazio si ripete qui quella variabilità di rocce che si verifica in ogni altro punto della zona scistosa n. 2, specialmente nella valle della Cairasca. I calceschisti, i cipollini, le lenti di calcare, ed in minor proporzione l'anidrite, si alternano per ogni dove, e inopportunamente, come già dicevo, fu creduto che calcari e anidrite formassero zone speciali, e possibilmente sincrone fra loro al confine dei Micascisti. La successione degli strati incontrata dalla galleria elicoidale non presenta anomalie di sorta rispetto alla successione di strati più vicini o più lontani della stessa zona n. 2. Del *Gneiss* d'Antigorio non fu trovata alcuna traccia negli strati più antichi traversati dalla galleria, nè, giudicando dall'esterno, si poteva trovare. La supposizione che esso si ripresenti a profondità è fondata soltanto sulla ipotesi del carreggiamento.

Nelle sorgenti incontrate nelle zone calcaree durante lo scavo della galleria elicoidale si è voluto trovare un indizio che quelle zone a N. si pieghino a sinclinale, riattaccandosi coi calcari verso Nembro e Campo, perchè se le dette rocce disposte a cupola si immergessero in tutti i lati sotto lo *Gneiss* non dovrebbero ricevere tributo di acque meteoriche. Però non vedo la necessità di siffatte supposizioni, perchè in realtà gli strati calcarei si alzano a N. e ad E. della Cairasca venendo a contatto con la superficie e sorbendone acque. Non si può dunque citare la galleria elicoidale di Varzo fra le conferme di una piega sdraiata e di un ricoprimento nella galleria del Sempione avente direzione ortogonale a questa. D'altra parte, se questo ricoprimento esistesse a levante ed esistesse in pari modo a settentrione, da qual parte sarebbero sopraggiunte, come un bolide selenitico, le rocce del Sempione?

Fig 3
N.O.
Punta di Boccareccio
M. Moro
P. d'Orogna
2466
Rio Bondolero
2087
Pº de Diei
M. Cistella
2880
Sencio
Foppiana
Mozzio
Alpe Grignasca
Alpe dell'Acqua Supº
T. Isorno
S.E.
Gneiss di Antigorio
Micaschisti e Calceschisti di Baceno
1060
810
Bagni
F. Toce
Gneiss di Antigorio
0
Le Caldaie
Prepiano
Profilo 8
Prof 8
Fig. 4
N.O.
Val dentro
M. Croppo
Val tendra
Punta Mara
R. Croso
Fontana
R. Fresaia
1350
Calandra
1374
A. Mognie
Coggia
Alpe Gugey
1643
C. Balmei
F. Toce
S.E
linea della Antigorio
Gneiss di
Cairasca
Piano della Galleria
Diveria
Micaschisti e Calceschisti di Baceno
Gneiss di Antigorio
362
Ojra
0
Prof 8
Fig. 5
N.O.
R. Ciampese
R. Valle
1380
Pizzo Teggiolo
Trasquera
1033
T. Diveria
573
Rio del Mezzodì
Alpe Nugno
1035
Alpe Groppo
1129
T. Diveria
Gabbio mollo
408
A. Chieva
C. Rata
395
F. Toce
S.E.
Gneiss di Antigorio
Micaschisti e Calceschisti di Baceno
0
Spiegazione dei segni
Morene, frane, alluvioni
Gneiss schistosi di Monteleone
Calceschisti di Dèvero
Gneiss schistosi di Vallè
Calcari e Anidriti di Teggiolo
Scala 1:100000
4 Km.

Matematica. — *Alcune proprietà degli integrali di certe classi di equazioni differenziali.* Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Corrispondente ERNESTO PASCAL.

1. In una Nota testè pubblicata in questi Atti [1], il prof. E. Pascal dimostra che le tangenti alle curve integrali dell'equazione $\frac{dy}{dx} = P_n(y)$, ove $P_n(y)$ è un polinomio di grado n in y a coefficienti funzioni di x, condotte per i punti aventi la medesima ascissa inviluppano una curva algebrica di ordine n.

Questo risultato si può riguardare come un caso particolare di una proposizione assai generale, che qui stabiliremo insieme con altre analoghe per gli integrali di certi sistemi di equazioni.

2. Sia

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^py}{dx^p}, \dots \frac{d^ky}{dx^k}\right) = 0 \tag{1}$$

un'equazione differenziale d'ordine k, ove f si suppone simbolo di funzione continua in un campo C rispetto a tutti gli argomenti e di più razionale in $\frac{d^py}{dx^p}$ e $\frac{d^ky}{dx^k}$ con $0 \leq p < k$.

Sia data una famiglia di ∞^{n+1} curve piane rappresentata dall'equazione

$$F(X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

razionale in X, Y e negli $n+1$ parametri a_1, a_2, a_{n+1} ove è $n \geq k$.

Se $x_0, y_0, y_0', \dots y_0^{(p-1)}, y_0^{(p+1)} \dots, y_0^{(k-1)}$ sono k valori assegnati ad arbitrio (purchè contenuti nel campo C) si consideri la semplice infinità Γ_p di curve integrali di (1) soddisfacenti alle $k-1$ condizioni

$$y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0', \dots \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = y_0^{(p-1)}, \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = y_0^{(p+1)}, \dots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}$$

per $x = x_0$.

Or bene noi mostreremo che

l'inviluppo delle curve di (2) *osculatrici in* $x_0 y_0$ *alle curve integrali* Γ_p *è una curva algebrica.*

[1] E. Pascal, *Osservazione su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali*, Rend. della R. Accad. dei Lincei (5), t. 18, 1909, 2° semestre.

Colla nota regola di derivazione delle funzioni implicite si dedurrà dalla (2) derivando n volte

$$\frac{d^i Y}{dX^i} = F_i(X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}) \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

ove le F_i sono funzioni razionali in $X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}$. Indicheremo con $\overline{F}$ e con $\overline{F}_i$ ciò che diventano F e F_i quando si è posto $X = x_0$, $Y = y_0$.

Dall'equazione (1) si ottengono mediante $n - k$ derivazioni successive

$$\frac{d^{k+i}y}{dx^{k+i}} = f_i\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^{k+i-1}y}{dx^{k+i-1}}\right) \qquad (i = 1, 2, \dots n - k),$$

ove le f_i sono ancora razionali in $\frac{d^py}{dx^p}$ e $\frac{d^ky}{dx^k}$; denoteremo con $\overline{f}_i$ ciò che diventa f_i quando si ponga

$$x = x_0, y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0', \dots \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} = y_0^{(p-1)},$$
$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} = y_0^{(p+1)}, \dots \frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}} = y_0^{(k-1)}.$$

Infine denotiamo con $\overline{f}$ ciò che diviene f quando, oltre alle predette sostituzioni, si faccia $\frac{d^ky}{dx^k} = \overline{F}_k$.

Ciò posto, l'eliminazione degli $n + 1$ parametri $a_1, a_2, \dots a_{n+1}$ fra le $n + 2$ equazioni

$$F(X, Y, a_1, a_2, \dots a_{n+1}) = 0,$$

$$\overline{F} = 0, \overline{F}_1 = y_0' : \overline{F}_2 = y_0'', \dots \overline{F}_{p-1} = y_0^{(p-1)}, \overline{F}_p = \frac{d^py}{dx^p}, \overline{F}_{p+1} = y_0^{(p+1)} \dots$$
$$\dots \overline{F}_{k-1} = y_0^{(k-1)}, \overline{f} = 0, \overline{f}_1 = \overline{F}_{k+1}, \overline{f}_2 = \overline{F}_{k+2}, \dots \overline{f}_{n-k} = \overline{F}_n$$

porterà ad un'equazione

$$\Phi\left(X, Y, \frac{d^py}{dx^p}\right) = 0; \tag{3}$$

che per ogni valore c attribuito a $\frac{d^py}{dx^p}$ rappresenterà la curva di (2) osculatrice alla curva integrale di (1) della varietà Γ_p, corrispondente a $\frac{d^py}{dx^p} = c$.

La (3) è razionale nei tre argomenti. L'inviluppo delle curve (3) ha per equazione quella che risulta dalla eliminazione di α fra le due equazioni

$$\Phi(X, Y, \alpha) = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0$$

avendo, per comodità, scritto α in luogo di $\frac{d^p y}{dx^p}$; e poichè essa equazione sarà razionale in X e Y, la proposizione enunciata è dimostrata completamente.

3. Come caso particolare, si supponga $p=0$, $k=1$ e per curve (2) si prendano le ∞^2 rette del piano. Allora l'equazione (1) sarà della forma

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{s=r}^{n} A_{rs}\, y^{s-r} \left(\frac{dy}{dx}\right)^r = 0, \tag{4}$$

ove A_{rs} sono funzioni di x o, in particolare, costanti. Un facile calcolo mostra che in questo caso la (3) diviene

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{h=0}^{q} \sum_{k=0}^{n-q} (-1)^k \binom{h+k}{k} A_{h+k,\, n-q+h} (X - x_0)^{n-q-k}\, Y^h y^q = 0. \tag{5}$$

L'inviluppo T delle tangenti alle curve integrali di (4) nei punti della retta $x = x_0$ ha per equazione il discriminante della (5) considerata come equazione algebrica di grado n in y, eguagliato a zero.

Se si osserva che i coefficienti delle potenze di y sono razionali interi in X e Y di grado n al più, si vede tosto che l'inviluppo T è una curva algebrica di ordine non superiore ad $n(2n-1)$.

L'ordine di T può essere inferiore a $n(2n-1)$: se la $\frac{dy}{dx}$ entra al massimo al grado m, l'ordine T sarà $m(2n-1)$ al più, essendo allora i coefficienti delle potenze di y al più di grado m in X e Y. Due sottocasi sono notevoli:

1°. La (4) è della forma

$$\sum_{k=0}^{m} A_k \left(\frac{dy}{dx}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} B_k y^k = 0 \qquad (m < n).$$

Se si calcola il discriminante in parola è facile vedere che il suo grado si riduce a $m(n+m-1)$. Basta fare $m=1$ per avere il caso studiato dal prof. Pascal.

2°. La (4) è della forma

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \left(\frac{dy}{dx}\right)^k - \sum_{k=0}^{m} B_k y^k = 0 \qquad (m < n).$$

Allora i coefficienti di y^q nell'equazione, di cui si deve calcolare il discriminante, sono in X e Y di grado q per $0 \leq q \leq n-m-1$, o sono di grado n per $q > n-m-1$, quindi l'ordine dell'inviluppo T non supera

$$\frac{(n-m-1)(n-m)}{2} + (m+1)\,n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}.$$

4. Sia dato un sistema di due equazioni differenziali d'ordine k

$$(6)\qquad \begin{aligned} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}\right) = 0, \\ \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}\right) = 0, \end{aligned}$$

ove le f e φ sono, in un determinato campo C, continue rispetto a tutti gli argomenti e razionali in $\frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}$, delle quali non può mancare la stessa in entrambe le equazioni, e razionali pure in una derivata d'ordine inferiore a k, ad es. in $\frac{d^p z}{dx^p}$.

Sia data una varietà di ∞^{2n+2} curve storte rappresentate dalle equazioni

$$(7)\quad H(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}) = 0 \quad K(X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}) = 0$$

razionali in $X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}$.

Se $x_0, y_0, z_0, y_0', z_0', \dots y_0^{(p-1)}, z_0^{(p-1)}, y_0^{(p)}, y_0^{(p+1)}, z_0^{(p+1)}, \dots y_0^{(k-1)}, z_0^{k-1}$ sono $2k$ valori fissati ad arbitrio in C, si consideri la semplice infinità $\Gamma_{p,z}$ di curve integrali del sistema (6) che soddisfano, per $x = x_0$, alle condizioni

$$(8)\qquad y = y_0, z = z_0, \frac{d^p y}{dx^p} = y_0^{(p)}, \frac{d^i y}{dx^i} = y_0^{(i)}, \frac{d^i z}{dx^i} = y_0^{(i)}$$
$$(i = 1, 2, \dots p-1, p+1, \dots k-1).$$

Allora sussiste la proposizione:

Le curve osculatrici in x_0, y_0, z_0 alle curve integrali $\Gamma_{p,z}$ appartengono ad una superficie algebrica.

Col derivare n volte le (7) rispetto ad X, si traggono le $2n$ derivate

$$\frac{d^i X}{dX^i} = \Phi_{yi}, \quad \frac{d^i Z}{dX^i} = \Phi_{zi} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

che sono funzioni razionali di $X, Y, Z, a_1, a_2, \dots a_{2n+2}$. In esse si faccia $X = x_0, Y = y_0, Z = z_0$ e si indichino le equazioni che ne risultano con $\overline{\Phi}_{yi} : \overline{\Phi}_{zi}$, come pure denotiamo con $\overline{H}, \overline{K}$ i primi membri delle (7) ove si sono fatte le stesse sostituzioni.

Col derivare le (6) $n - k$ volte rispetto ad x, si traggono le derivate

$$\frac{d^{k+i} y}{dx^{k+i}} = f_i, \quad \frac{d^{k+i} z}{dx^{k+i}} = \varphi_i \qquad (i = 1, 2, \dots n-k)$$

che sono funzioni razionali in $\frac{d^p z}{dx^p}, \frac{d^k y}{dx^k}, \frac{d^k z}{dx^k}$. Indichiamo con $\overline{f}, \overline{\varphi}, \overline{f}_i, \overline{\varphi}_i$

ciò che divengono f, φ, f_i, φ_i quando si fa in esse $x = x_0$, $\frac{d^pz}{dx^p} = \overline{\Phi}_{zp}$ e le sostituzioni (8).

Allora l'eliminazione dei $2n+2$ parametri $a_1, a_2, \dots a_{2n+2}$ fra le $2n+4$ equazioni

$$\mathrm{H}=0\,,\ \mathrm{K}=0\,,\ \overline{\mathrm{H}}=0\,,\ \overline{\mathrm{K}}=0\,,\ \overline{f}=0\,,\ \overline{\Phi}_{yp}=y_0^{(p)}\,,\ \overline{\Phi}_{zp}=\frac{d^pz}{dx^p}$$

$$\overline{\Phi}_{yi}=y_0^{(i)}\,,\ \overline{\Phi}_{zi}=z_0^{(i)} \qquad (i=1\,,2\,,\dots p-1\,,p+1\,,\dots k-1)$$

$$\overline{\Phi}_{y,k+r}=\overline{f}_r\,,\ \overline{\Phi}_{z,k+r}=\overline{\varphi}_r \qquad (r=1\,,2\,,\dots n-k)$$

porta a due equazioni

$$\Psi_1\left(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z}\,,\frac{d^pz}{dx^p}\right)=0 \quad , \quad \Psi_2\left(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z}\,,\frac{d^pz}{dx^p}\right)=0$$

che rappresentano, per ogni valore c di $\frac{d^pz}{dx^p}$, la curva di (7) osculatrice a quella curva di Γ_{zp} che corrisponde a $c=\frac{d^pz}{dx^p}$. Essendo le due equazioni razionali in $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \frac{d^pz}{dx^p}$, il luogo delle predette curve osculatrici è una superficie algebrica.

Per $p=0$, si ha il corollario:

Le curve di (7) *osculatrici alle curve integrali* Γ_{0z} *soddisfacenti alle condizioni* $\frac{d^iy}{dx^i}=y_0^{(i)}$, $\frac{d^iz}{dx^i}=z_0^{(i)}$ $(i=1\,,2\,,\dots k-1)$ *che si appoggiano alla retta* $x=x_0\,, y=y_0$, *o ad una curva algebrica* $\theta(y\,,z)=0$ *in un piano* $x=x_0$ *se le* (6) *sono razionali anche in* y, *o ad una curva algebrica qualunque* $\theta_1(x\,,y\,,z)=0\,,\theta_2(x\,,y\,,z)=0$ *se le* (6) *sono razionali anche in* x, *appartengono ad una superficie algebrica.*

Come caso particolare, se le (6) sono del primo ordine dei gradi m ed n rispetto ai tre argomenti $z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ e dei gradi r ed s rispetto alle due derivate, le tangenti alle curve integrali appoggiantesi alla retta $x=x_0$, $y=y_0$ è una rigata di ordine $mr+ns$; e se le (6) sono lineari in $z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ la rigata è una quadrica.

5. Infine dimostriamo la proposizione:

Le superfici della varietà di ∞^{n+1} *superfici*

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y}\,,\mathrm{Z}\,,a_1\,,a_2\,,\dots a_{n+1})=0\,, \tag{9}$$

ove F *è razionale in tutti gli argomenti, osculatrici agli integrali del sistema di equazioni differenziali di primo ordine*

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x , y , z) \ , \quad \frac{dz}{dx} = \varphi_1(x , y , z) \, , \tag{10}$$

che si appoggiano ad una retta $x = x_0 , y = y_0$ *se* f *e* φ *sono razionali in* z, *o ad una curva algebrica* $\theta(y , z) = 0$ *posta in un piano* $x = x_0$ *se* f *e* φ *sono razionali anche in* y, *o ad una curva algebrica qualunque* $\theta_1(x , y , z) = 0$, $\theta_2(x , y , z) = 0$ *se* f *e* φ *sono razionali anche in* x, *inviluppano una superficie algebrica.*

Dalle (10) si deducono per derivazione

$$\frac{d^iy}{dx^i} = f_i(x , y , z) \qquad \frac{d^iz}{dx^i} = \varphi_i(x , y , z) \qquad (i = 2 , 3 , \dots n) \, ,$$

e dalla (9) ritenendo Z e Y funzioni di X si ottiene derivando n volte rispetto ad X

$$F_i\left(X , Y , Z , \frac{dY}{dX} , \frac{dZ}{dX} , \dots \frac{d^iY}{dX^i} , \frac{d^iZ}{dX^i} , a_1 , a_2 , \dots a_{n+1}\right) = 0 \quad (i = 1 , 2 , \dots n).$$

Si indichi con $\bar{F}$ e $\bar{F}_i$ ciò che divengono F e F_i quando si fa

$$X = x_0 , Y = y_0 , Z = z , \frac{d^rY}{dX^r} = f_r , \frac{d^rZ}{dX^r} = \varphi_r \qquad (r = 1 , 2 , \dots i) \, .$$

Allora se si elimina $a_1 , a_2 , \dots a_{n+1}$ fra le $n + 2$ equazioni

$$F = 0 , \bar{F} = 0 , \bar{F}_i = 0 \qquad (i = 1 , 2 , \dots n)$$

si ha un'equazione

$$\Psi(X , Y , Z ,) = 0$$

che rappresenta per ogni valore di z la superficie di (9) osculatrice alle curve integrali di (10) in un punto della retta $x = x_0 , y = y_0$. L'inviluppo di codeste superficie ha per equazione, l'equazione algebrica in XYZ che nasce dall'eliminazione di z fra

$$\Psi = 0 \ , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \, .$$

In particolare i piani osculatori alle curve integrali di (10) appoggiantesi alla retta $x = x_0 , y = y_0$, se f_1 e φ_1 sono lineari in y e z, inviluppano un cono quadrico.

Negli altri casi dell'enunciato, le dimostrazioni sono analoghe.

Matematica. — *Sopra speciali trascendenti che si connettono colle teorie dei numeri.* Noa di ENRICO ZONDADARI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica — *Sugli accelerometri a liquido.* Nota del dott. EMILIO ODDONE, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

1. Gli studî sismologici fatti recentemente dal prof. Lo Surdo, libero docente di Fisica terrestre nel R. Istituto di Studî superiori di Firenze, hanno destato tra gli specialisti vivo interesse e speranzosa aspettativa.

Dal luglio 1909 egli pubblicò quattro Note di sismologia dirette tutte allo scopo concreto della determinazione in misura assoluta dell'intensità dei macrosismi. Mi si permetta di ricapitolarle brevemente:

La prima Nota, intitolata: *Il funzionamento dei sismografi* [1] è una breve rassegna di orientamento sul problema sismografico. La seconda Nota dal titolo: *Sulle osservazioni sismiche* [2], pone il quesito se sia possibile che un sismografo registri direttamente l'accelerazione, anzichè, come si è tentato di fare finora, lo spostamento del suolo, e vi risponde affermativamente.

Mettendo l'integrale generale, dell'equazione completa

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega, \tag{1}$$

sotto la forma:

$$a = \frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{\omega}{\tau}t\right) + \frac{1}{\beta^2}\frac{\omega}{\tau}\left[\left(\frac{2}{\beta} + t\right)e^{-\beta t} - \frac{2}{\beta}\right] \tag{2}$$

ottiene un primo termine che dà in ogni istante lo spostamento che corrisponde esattamente al valore dell'accelerazione e rappresenta la soluzione idealmente perfetta del problema; ed un secondo termine, che ha per causa il periodo proprio del sistema oscillante. Quest'ultimo perturba; talchè converrà fare assumere ad esso un valore piccolissimo.

Per ciò β dev'essere tanto più grande quanto più grande è il valore di $\frac{\omega}{\tau}$. È bensì vero dice l'A. che aumentando β, diminuendo cioè il pe-

[1] Il Nuovo Cimento, 1909, pag. 129.

[2] Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, fasc. 6°, sec. sem. 1909. Anche il Nuovo Cimento, 1909, pag. 201.

riodo proprio del sistema oscillante non smorzato $T = \frac{2\pi}{\beta}$, si viene a diminuire la sensibilità, data da $\frac{1}{\beta^2}$, ma si vede subito che la parte perturbatrice (secondo termine) al crescere di β tende più rapidamente a zero che non lo spostamento idealmente perfetto della massa (primo termine).

E continua: *nei sismografi, quando si vuole che la registrazione rappresenti il più fedelmente possibile l'andamento dell'accelerazione sismica, bisogna che il periodo proprio del sistema oscillante sia il più piccolo possibile.* È questa una prima condizione perchè nell'equazione differenziale due termini tendano a sparire, e l'accelerazione sismica divenga semplicemente proporzionale allo spostamento della massa inerte. Per rimediare alla già accennata difficoltà, che se si diminuisce il periodo proprio viene a diminuire la sensibilità, suggerisce di applicare un fortissimo ingrandimento. Termina facendo notare che i sismologi scelgono invece il periodo proprio dei sismografi molto grandi, per cui ottengono curve che non rappresentano nè lo spostamento, nè l'accelerazione.

In una terza e quarta Nota dal medesimo titolo (1), l'autore dà il principio del nuovo strumento che deve realizzare le condizioni fondamentali di possedere lo smorzamento critico ed avere piccolo il periodo proprio per via del fortissimo ingrandimento. L'apparecchio, destinato ai soli macrosismi, è a liquido e si basa sull'effetto della pressione idrostatica dovuta all'inerzia. L'apparato inteso alla determinazione di una delle componenti orizzontali, consiste in un tubo orizzontale rigidamente collegato al suolo, tubo che termina da una parte e dall'altra in due sottili tubulature ad angolo retto. Esso contiene una colonna liquida imprigionata, la quale sotto gli impulsi del suolo in moto, imparte per inerzia un movimento di va e vieni alle due colonnine liquide verticali. Il sistema potrà portarsi allo smorzamento critico grazie alla possibità di variare la lunghezza e quindi la resistenza al moto del liquido nei tubi capillari; il periodo proprio potrà portarsi ad essere il più piccolo possibile, essendo in facoltà dell'esperimentatore di aumentare il rapporto delle sezioni dei vasi comunicanti.

Per la determinazione della componente verticale, la colonna è in piedi, sostenuta dalla pressione di un gas racchiuso in apposito bulbo.

La quarta Nota rileva l'arbitrarietà ed i difetti delle scale sismiche in uso e torna a raccomandare gli accelerometri a liquido, i quali senza richiedere grandi mezzi e cognizioni speciali rendono possibile la determinazione dell'intensità di un terremoto in valore assoluto, mediante la relazione semplicizzata:

$$\Omega = \beta^2 a .$$

(1) Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, fascicolo 10°, sec. sem. 1909 e vol. XIX, fasc. 1°, primo sem. 1910. Anche il Nuovo Cimento, vol. XVIII, fasc. 11° e 12°, 1909.

La Nota si chiude col dare le caratteristiche di alcuni modelli costruiti e coll'accennare che da zero a duecento unità c. g. s. la verifica sperimentale confermò le conclusioni teoriche.

2. L'oggetto della presente Nota è di discutere la teoria degli apparati sismici sopradescritti.

Il prof. Lo Surdo nel dare la teoria dei suoi apparecchi (per es. quello orizzontale della fig. 3ª, Rend. R. Acc. dei Lincei, Vol. XVIII fasc. 10 pag. 440) attribuisce alla pressione antagonista per lo spostamento unitario il valore $2n\sigma g$; fa eguale ad $L\sigma$ la massa per unità di sezione; dà eguale a $\frac{2ng}{L}$ la corrispondente accelerazione antagonista; assegna il valore

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2ng}}$$

al periodo proprio del sistema non smorzato e quello $\frac{L}{2g}$ alla sensibilità del sistema. L è la lunghezza del tubo orizzontale; n è il rapporto d'ingrandimento dei vasi comunicanti; σ è la densità del liquido. Infine, conforme al principio teorico che il periodo proprio del sistema oscillante non smorzato deve essere il più piccolo possibile, suggerisce di aumentare l'ingrandimento n, con che, secondo lui, *aumentando il rapporto delle sezioni, possiamo impicciolire il periodo senza diminuire la sensibilità.*

Vediamo se queste affermazioni sono esatte ed incominciamo dal valore del periodo proprio del sistema non smorzato.

Consideriamo l'apparato della detta fig. 3ª e scegliamo una posizione intermedia in cui il livello in ogni tubetto di sezione s disti di x dalla posizione di equilibrio. Il dislivello fra i tubetti sarà $2x$ e per uno spostamento infinitamente piccolo dx, la forza motrice $\sigma g s 2x$, compirà un lavoro $\sigma g s 2x dx$. A parte i vortici e la dissipazione nel cambiamento improvviso di sezione, l'equazione di continuità dice che $sV = Sv$, essendo v la velocità nel tubo orizzontale di sezione S, V quella nei tubetti di sezione s.

Sia H la distanza verticale dal centro di figura di detto tubo al menisco dei tubetti quando il liquido è in equilibrio statico. L'energia cinetica del sistema è

$$E = \frac{2Hs\sigma \,.\, V^2}{2} + \frac{LS\sigma \,.\, \frac{V^2}{n^2}}{2}$$

E se al tempo t una delle colonnine è cresciuta di x, e l'altra diminuita di altrettanto, l'energia potenziale è

$$U = \frac{H+x}{2}(H+x)s\sigma g + \frac{H-x}{2}(H-x)s\sigma g + U_0 = (H^2+x^2)s\sigma g\,.$$

Applicando l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E}{\partial V} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0\,,$$

si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left(2\mathrm{H}s\sigma + \frac{\mathrm{LS}\sigma}{n^2}\right)\mathrm{V} + 2xs\,g\sigma = 0\,,$$

e riducendo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2g}{2\mathrm{H} + \frac{\mathrm{L}}{n}}\,x\,,$$

e quindi

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g} + \frac{\mathrm{L}}{2ng}}\,.$$

Paragonata quest'ultima formula còn quella del prof. Lo Surdo vediamo che ne differisce pel termine sotto il radicale $\frac{\mathrm{H}}{g}$.

Questo termine ha tutt'altro che una importanza secondaria, non potendo mai annullarsi completamente e precisando il periodo minimo sotto il quale non può discendere T per quanto grande diventi n. Dei due $\frac{\mathrm{H}}{g}$ è il termine grande, $\frac{\mathrm{L}}{2ng}$ è il termine piccolo, e se mai quest'ultimo era il termine che potevasi trascurare (¹).

Ciò dimostrato, richiamiamo il suggerimento caposaldo nel lavoro del prof. Lo Surdo che aumentando il rapporto delle sezioni si possa impicciolire a piacimento il periodo senza diminuire la sensibilità. Vedremo tosto che la diminuzione non è più di un ordine da corrispondere al suo scopo. Prendiamo ad es. tre apparecchi a tubo orizzontale aventi eguali dimensioni ($\mathrm{L} = 49$ cm, e $2r = 3$cm), e le sezioni dei tubetti così che nell'uno n valga 10 e negli altri 100 e 200. Le altezze dell'*acqua* nei tre apparecchi siano

(¹) Nel frattempo è apparsa nei Comptes Rendus, tom. 150, n. 7, pag. 363, 1910, una Nota del prof. Lippmann dal titolo: *sismographe à colonne liquide*. Il principio teorico è ancora quello noto della possibilità di avere gli spostamenti rapidi del suolo quando il periodo proprio del sistema è il più grande possibile rispetto al periodo dei moti sismici. Per avere periodi grandi, suggerisce un apparecchio simile, ma inverso a quello del prof. Lo Surdo. Facendo grande la sezione dei tubi verticali e chiamandola S e facendo piccola quella s del tubo orizzontale, l'espressione $\frac{l}{2gn}$ si cambia in $\frac{ln}{2g}$; la quale spiega come i periodi possano diventare molto grandi fino a 141 sec. e più. Dei due termini sotto il radicale, che anche nel caso Lippmann entrano nell'espressione di T, è però $\frac{ln}{2g}$ il termine grande e $\frac{\mathrm{H}}{g}$ il termine piccolo, per cui rispetto a quello, è lecito trascurare $\frac{\mathrm{H}}{g}$; e così ha fatto il prof. Lippmann.

eguali. Per quanto cerchiamo di metterci nelle condizioni più favorevoli di un H molto piccolo, non potremo avere H guari più corto di 7 cm. altrimenti per poco che a sia superiore ai 0,03 cm., nel caso del maggior ingrandimento, la colonnina rientrerebbe nel tubo e con essa dell'aria. Secondo la formula del prof. Lo Surdo il periodo sarebbe di $0^s,3$ quando l'ingrandimento è di 10, e $0^s,1$ e $0^s,07$ quando l'ingrandimento è rispettivamente di 100 e 200. Questo rapido decrescimento di T, che porta ad un rapido aumento di β, permetterà forse di trascurare il secondo termine dell'integrale generale (2). Però dalla mia formula il periodo viene da due a dieci volte tanto, precisamente di $0^s,6$ coll'ingrandimento di 10 e $0^s,5_4$ e $0^s,5_3$ cogli ingrandimenti di 100 e 200. La riduzione del periodo al crescere dell'ingrandimento n, è poco sensibile. Fosse H eguale a 20 cm. i valori assoluti dei periodi ($0^s,9_7$; $0^s,9_2$; $0^s,9_2$) sarebbero notevolissimi, per nulla inferiori a quelli che assume il suolo scosso da terremoto (in generale non superiori ad 1 sec.) e il loro decremento sarebbe di appena $0^s,05$! [1].

Queste cifre calcolate vennero trovate in accordo con alcune determinazioni dirette del periodo d'oscillazione del liquido in un tubo ad U che aveva le costanti sopraindicate ed un ingrandimento di circa 228. Vero è che qui si aveva a fare con oscillazioni smorzate per via dell'attrito interno, però di una notevole influenza di esso attrito io non mi accorsi: con 18 cm. di acqua nei tubetti il liquido oscillava a 55° con periodo non gran che diverso da quello coll'acqua a 20°, quantunque l'attrito a freddo (0,01) fosse doppio dell'attrito a 55° (0,005).

Dopo ciò è quasi superfluo il dire che diminuendo di poco il T, crescerà di poco il β, per cui è da dubitare che il secondo termine della (2) sparisca, e quindi rimane pure dubbioso che lo spostamento a sia legato al valore dell'accelerazione dalla semplice relazione $\beta^2 a = \Omega$.

Nemmeno la sensibilità (spostamento dei menischi nei rami verticali per unità di accelerazione) sarà indipendente da H. La teoria dice che per uno stesso spostamento della tavola oscillante, il fattore della sensibilità a diminuisce al crescere del periodo che assume il sistema [2]; dovrà dunque diminuire al crescere di H.

[1] Che se poi gli stessi apparecchi conservano inalterata la massa d'acqua, nella supposizione che per l'ingrandimento 10, sia H eguale a 2 cm., vengono pei rispettivi ingrandimenti di 10, di 100 e di 200, tre periodi teorici eguali a $0^s,4$; $0^s,9$ $1^s,3$ ossia T anzichè diminuire al crescere dell'ingrandimento, andrebbe aumentando.

[2] Questa proposizione si dimostra graficamente descrivendo su due sistemi coordinati due curve $a = f(t)$ di diverso periodo e sovrapponendo loro le curve integrali semplici e doppie: $\int a dt$ e $\int dt \int a dt$. La somma delle tre ordinate dà ad ogni istante lo spostamento x della tavola oscillante e si vede che nella curva a periodo maggiore, a parità di x corrispondono gli a minori.

Il citato professore dice che fino a 200 unità c. g. s. trovò buon accordo tra i valori di $\beta^2 a$ ed i valori dell'accelerazione sperimentalmente determinati alla tavola oscillante. Come si spiega quest'accordo se in via generale la relazione non è valida? Facciamo la congettura che ciò possa dipendere dalle condizioni casuali e speciali in cui avrà operato l'A. Vi è infatti un caso nel quale la relazione $\frac{2ng}{L}a = \Omega$ sembra avverarsi, ma non è quando per $\alpha = \beta$ il periodo proprio del sistema non smorzato è il più piccolo possibile, ma bensì quando detto periodo sta prossimo al periodo della tavola oscillante. La tabella seguente dà il risultato di alcune osservazioni provvisorie, secondo le quali, dando alla tavola un moto orizzontale di periodo eguale a quello proprio del liquido nel tubo e variando l'ampiezza di moto della tavola oscillante, la proposizione del prof. Lo Surdo circa vale.

Apparato orizzontale con ingrandimento di circa 228:

$H = 4^{cm},5$ T suolo = T proprio del sistema non smorzato $= 0^s,4$ circa.

x	$\frac{4\pi^2 x}{T^2}$	$\frac{2g}{L} \cdot na$	na
cm.			cm.
0.1_1	27 cm. gr. sec.	29 cm. gr. sec.	0.7
0.1_7	60 »	63 »	1.4
0.4_5	150 »	125 »	2.9

L'eguaglianza approssimata dei rispettivi valori di $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ e $\frac{2g}{L} na$ si può porre sotto la forma:

$$\frac{4\pi^2 x}{4\pi^2 \frac{2nH + L}{2ng}} = \frac{2g}{L} na$$

da cui

$$\frac{x}{a} = \frac{2nH + L}{L}$$

che dovrebbe fornire la spiegazione teorica del fatto. I moti del suolo e del sistema sono in opposizione e lo spostamento del suolo sta allo spostamento del liquido nel tubo nel rapporto delle inerzie per unità di sezione: la totale $2nH + L$ e la parziale L del tubo orizzontale.

Ma all'infuori di alcuni casi speciali, riteniamo che nel caso generale dei macrosismi che non hanno il periodo proprio dell'apparecchio, non sussista la relazione del prof. Lo Surdo. È piuttosto prevedibile che se il periodo del suolo sarà maggiore del periodo proprio del sistema, il metodo Lo Surdo

darà dei valori dell'accelerazione in eccesso [1], se il periodo del suolo sarà minore di quello del sistema ed indurrà delle oscillazioni forzate, il metodo stesso darà dei dati in difetto. Eccone alcuni esempî ottenuti coll'apparato orizzontale con ingrandimento eguale a 228.

Per H = 4 cm.; T proprio = $0^s,4$; T suolo = $0^s,2$; per $x = 0^{cm},7$ viene Ω cinque volte maggiore dell'Ω dedotto dalla formola $\frac{2g}{L} na$. Per H = $4^{cm},5$; T proprio = $0^s,4$; T suolo = $0^s,6$; per $x = 0^{cm},4_5$ viene Ω sperimentale metà dell'Ω dedotto dall'apparato e dalla relazione Lo Surdo. Per H = 7 cm.; T proprio = $0^s,5$; T suolo = $0^s,2$; per $x = 0^{cm},2$ viene l'Ω sperimentale nove volte maggiore dell'Ω ricavato dall'apparecchio.

Le altezze sono state scelte così da avvicinarsi alle condizioni di aperiodicità date dalla $\alpha = \beta$.

Geologia. — *Osservazioni morfologiche sull'alto bacino del Noce (Tirreno).* Nota del dott. R. Almagià, presentata dal Socio G. Dalla Vedova.

Il tronco superiore della vallata del Noce, a monte di Trècchina, a chi lo abbracci tutto quanto dall'alto di uno dei monti che lo circondano, p. es. dalle vette del Sirino, sembra a primo aspetto un bacino chiuso. A nord lo rinserra la dorsale formata dalla Serra Malombra (1332 m.), dalla Rocca Rossa (1412 m.), dalla Serra della Secchia, dalla Serra dell'Alto (1207 m.) e dal M. Cervaro (1170 m.), ad est la cresta del Sirino (M. del Papa 2007 m.) con quella sua propaggine meridionale che forma la Costa della Neviera, poi la Serra Rotonda (1288 m.), il Castello di Starsìa (1401 m.) il M. La Spina (1649 m.), i monti che recingono il Campo del Galdo (un bacino carsico di cui parleremo più avanti), la Serra del Monaco e la dorsale che termina col M. Messina (1027 m.); ad ovest la Serralunga (1483 m.), il M. Coccovello (1512 m.), la Serra della Grotta (1288 m.) e la Serra Pollino (1093 m.). Soltanto verso l'angolo sud il Noce si è aperto un passaggio tra i ripidi fianchi del M. Messina e la scoscesa parete della Serra Pollino, e, inoltrandosi in una gola angusta e selvaggia, esce in piano e si avvia verso il Tirreno. In altri tre punti la chiostra dei monti è poi profondamente intaccata: ad ovest nella sella Vascelli (632 m.) a nord del M. Coccovello, per cui passa la strada nazionale Lagonegro-Sapri, più a sud nel passo della Colla (605 m.) tra il M. Coccovello e la Serra della Grotta, per cui passa

[1] L'espressione $\frac{2g}{L} na$ diminuisce al crescere di T perchè na si fa piccolo, ma l'altra espressione $\frac{4\pi^2 x}{T^2}$ diminuisce più rapidamente per via del T quadrato al denominatore.

la strada Trecchina-Maratea; ad est nella sella detta il Cavallo (840 m.) tra Noce e Sinni, traversata dalla strada Lagonegro-Latronico; a queste potrebbe aggiungersi anche, all'estremo nord-ovest, l'intaccatura a sud del M. Cervaro, sullo spartiacque tra Noce e Bussento (778 m.), pure valicata da una strada rotabile.

L'aspetto di bacino chiuso che la vallata presenta è in relazione con un fatto importante della sua recente storia geologica: che cioè, come risulta dalle ricerche di G. De Lorenzo, cui si debbono i migliori studî sulla geologia di questa regione, il fondo della valle stessa fu già occupato da un lago quaternario (¹). Questo lago — del quale oggi rimangono scarse tracce consistenti in letti isolati di ghiaie con sabbie ed argille (²) e anche in brevi e mal definiti terrazzi — si estendeva a sud, battendo alle falde del Coccovello, fino a Trecchina, a sud-est fino ai piedi della rupe di Lauria, ad est fino al piede degli ultimi sproni del Sirino sovrastanti a Nemoli. Esso si vuotò quando la erosione delle acque scavò la su mentovata gola tra la Serra Pollino e il M. Messina; il tronco inferiore del Noce servì da emissario.

L'alto bacino del Noce offre un interessante campo di studî così al geologo, per la grande varietà delle formazioni che vi appaiono e per i complessi problemi tettonici che esse presentano, come anche al geografo, poichè si presta come poche altre a indagare l'influenza molteplice e varia degli agenti esterni nel modellamento delle forme superficiali. Scopo di questa Nota è di illustrare brevemente proprio quest'ultimo punto, additando i fattori che nel più recente passato si esercitarono e tuttora si esercitano a modificare la plastica del suolo conferendole aspetti caratteristici; in particolare richiameremo l'attenzione su una speciale categoria di tali fattori, finora meno considerata, e pur importantissima nei suoi effetti svariati e lontani.

Della geologia della regione basterà perciò un assai breve accenno (³). Le zone più elevate e le vette dei monti sono in generale costituite da calcari secondari, più o meno compatti, talora dolomitici, o anche da dolomia pura. Calcari cretacei e liasici, talvolta imbasati sulla dolomia principale (M. Cervaro, M. Rotondo), costituiscono tutta la dorsale che limita ad ovest il bacino, raggiungendo una potenza enorme nel massiccio cretaceo del Coccovello; calcari pure cretacei s'incontrano, in pile di gran spessore, a sud, nel M. Messina e nelle Sierre Nocara, Dieco, Pastorella e Rotonda, mentre il gruppo della Spina è formato da dolomia, come i monti a sud di Trècchina, nei quali essa sostiene i calcari giuraliasici (Serre La Grotta e Parruta);

(¹) Cfr. De Lorenzo G. *Studi di geologia nell'Appennino meridionale,* in Atti della R. Accad. di Sc. fis. e matem. di Napoli, ser. II, vol. VIII, pp. 118-120.

(²) Il lembo più esteso che io abbia osservato è quello su cui è costruito il paese di Trecchina.

(³) Esso è condotto in base alle indicazioni del f. 210 della carta geologica al 100.000 (1908) e ad osservazioni personali.

infine calcari compattissimi del trias costituiscono gran parte dei gruppi del Sirino, del Papa, della Serra Malombra, della Rocca Rossa ecc.; la dolomia riappare nei monti a nord di Lagonegro (M. Nicola, Serra dell'Alto, Serra Pertusata). Ma nella Montagna del Sirino e nei gruppi vicini (Serra Malombra, M. Lofarno) appaiono largamente diffusi, di solito nelle zone meno elevate, anche scisti triasici policromi con noduli di selce; questi s'incontrano eziandio in strati molto spessi e con vivaci gradazioni di colore — dal rosso al verde dal giallo all'azzurro — nelle colline a nord di Lagonegro, nei monti Gurmara, Milego ecc. Il fondo delle vallate, così lungo il Noce, come lungo i principali affluenti, è invece costituito da formazioni eoceniche che ricuoprono i calcari di ogni età: esse consistono principalmente in scisti argillosi ed argille variegate e scagliose. Lungo le valli trasversali queste formazioni risalgono fino a notevoli altezze, anzi in corrispondenza alle quattro intaccature della chiostra montuosa dianzi accennate, esse giungono fino a costituire la zona spartiacque; in particolare è da notare che ad est, tra la Serra Orticosa, propaggine meridionale del M. Papa, e la Serra Rotonda, la dorsale spartiacque tra Sinni e Noce, per la lunghezza di circa 5 chilometri, è costituita esclusivamente da queste formazioni argilloscistose dell'eocene.

I principali processi che in un passato recente hanno lavorato a determinare l'attuale morfologia della regione, ed in parte ancora lavorano energicamente a modificarla, si possono raccogliere sotto tre categorie.

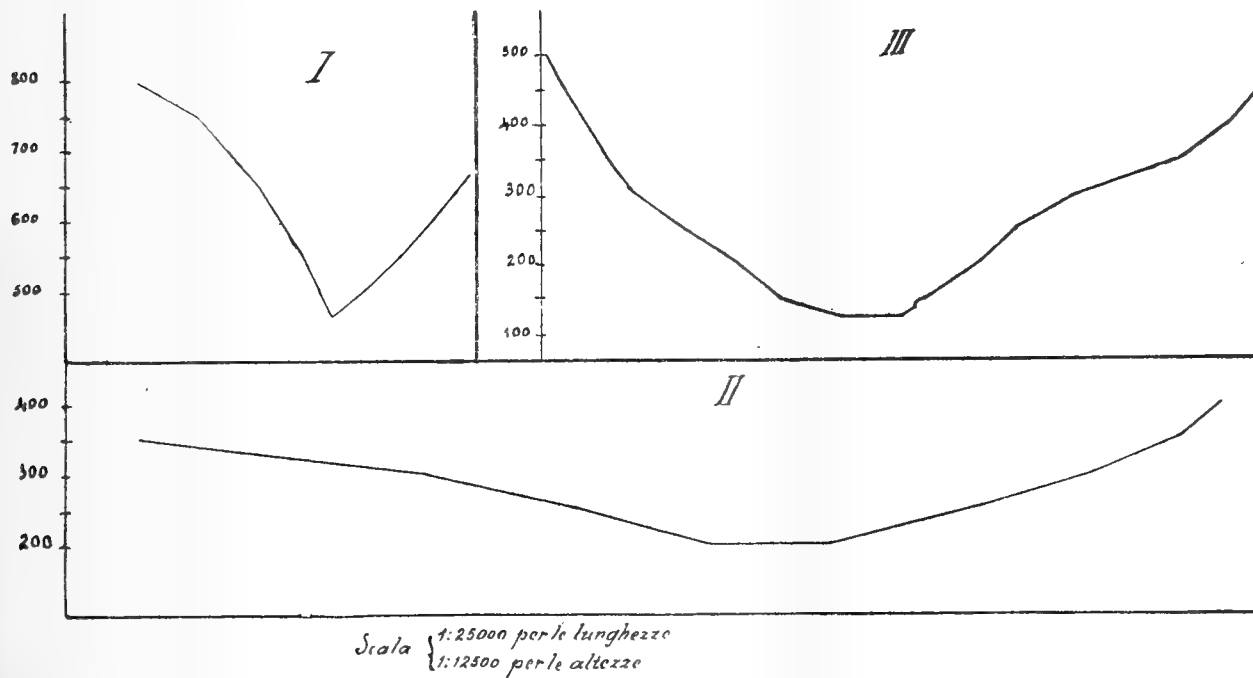
I. Nelle zone più elevate, per lo meno nel gruppo del Sirino, a determinare l'attuale plastica del suolo hanno contribuito fenomeni glaciali. La larga vallata ad U che si apre sul fianco settentrionale del M. Papa ad est della Spalla dell'Imperatrice, fu certamente modellata e forse anco scavata da un assai notevole ghiacciaio, le cui tracce ci son date oggi dalla morena terminale che, all'altezza di circa 1500 m., sbarra la valle in forma di morbide collinette distese per una larghezza di 400 m.; a tale sbarramento si deve l'origine del lago Remmo, piccolo bacino di forma regolarmente ovale, all'altezza di 1517 m. Anche la contigua Valle del Cacciatore, ad ovest della Spalla dell'Imperatrice, fu occupata e quindi modellata da un ghiacciaio poco meno esteso in lunghezza del precedente, la cui morena terminale appare in forma di un cordone detritico lungo un chilometro e mezzo e largo un centinaio di metri; anche qui lo sbarramento di una vallecola laterale ha dato origine ad un laghetto (L. Zapàno). Un più breve ghiacciaio occupava un altro vallone sul fianco meridionale del M. Papa, che presenta pure il caratteristico profilo ad U; altre tracce glaciali (ciottoli striati, lembi morenici ecc.) s'incontrano in più luoghi nel gruppo del Sirino [1].

[1] Cfr. De Lorenzo G., *Avanzi morenici di un antico giacciaio del Monte Sirino nei dintorni di Lagonegro,* Rend. Accad. Lincei, Cl. di sc. fis., 1892, II sem., pp. 348-353; *Il postpliocene morenico del gruppo montuoso del Sirino in Basilicata,* id. id., 1893, II sem. pp. 317-20.

II. Se il fenomeno glaciale ha avuto azione ristretta e forse limitata alla zona del Sirino superiore a 1500 m., più largamente diffusi appaiono, nel dominio delle formazioni calcaree, i fenomeni carsici. L'erosione meccanico-chimica delle acque sui fianchi ripidi dei monti calcarei, ha spesso avuto come risultato di foggiar questi in forme molto regolari di coni, talora a cima tronca: caratteristici il M. Cervaro, il M. Arenazzo e il M. Rotondo a NO di Lagonegro; la Serra Rotonda, isolata appendice della Serralunga e soprattutto il regolarissimo e imponente cono, pur detto Serra Rotonda, a NE di Lauria; oltremodo caratteristico il M. Coccovello, altro cono enorme a base ellittica, con la sommità mozzata, terminante cioè con un piano inclinato da sud a nord. Le doline, localmente indicate col nome generico di *fosse*, sono frequenti: tutto sforacchiato ne è l'ora detto piano che forma la vetta del Coccovello, chiamato appunto *Piano delle Fosse;* una più grande dolina si osserva alle sue falde meridionali, poco ad ovest del Passo della Colla, e altre sparse sui monti a sud di Lauria. A fenomeni carsici si ricollega poi certamente l'origine di quattro più estese cavità, tutte occupate probabilmente un tempo da laghi, ora, salvo una, asciutte in tempi normali. Esse sono: il Lago della Rotonda, il Campo del Galdo, l'Uovo di Vacca ed il Lago Sirino.

Il lago della Rotonda è una conca di forma ovale, lunga circa 1900 m., larga in media un po' meno di 500, posta proprio allo spartiacque tra Noce e Sinni, fra la Serra Rotonda, la Serra di Tornesiello e il Castello di Starsia; il fondo è leggermente inclinato da SO a NE, e non lungi dall'angolo orientale si ha la massima depressione, 907 m.; a nord evvi una slabbratura, ove l'orlo della conca è alto appena una quindicina di metri sul fondo; oltrepassandolo, si scende verso il Sinni. All'epoca della mia visita (28 agosto 1908) il lago era interamente asciutto ed in gran parte coltivato a granturco e legumi; ma nelle parti più basse eran evidenti tracce di acqua da poco scomparsa; seppi infatti che l'acqua vi stagna normalmente nell' inverno e non se ne va che nella tarda primavera; cavità aperte nel fondo che l'assorbano, peraltro non appaiono. È probabile che le acque assorbite vadano sotterraneamente ad alimentare il Sinni, il cui alveo è circa 180 m. più basse del fondo del lago. Varcato l'orlo SO, alto circa 950 m., s' incontra una tipica dolina ellissoidale a fondo piatto col diametro maggiore lungo circa 60-65 m. (da ESE a ONO); essa si appoggia a SE alla ripida pendice della vetta segnata m. 1016 sulla carta; dalle altre parti è circondata da un orlo alto 9-12 m.; il fondo è a circa 935 m. (aneroide).

Il Campo del Galdo a SE di Lauria (spartiacque Noce-Lao), chiuso tra la Sierra di Dieco, il M. la Spina e la Serra Grande, è alquanto più vasto: misura infatti oltre 3 km. in lunghezza con una larghezza media di circa 600 m. In origine però era molto più largo ed aveva forma presso che triangolare, ma oggi esso è invaso sul lato nord da una tipica conoide di deie-

zione, formata da due torrenti, il Vallone del Salice e l'Acqua Siccaro [1] che scendono dal M. La Spina. Asciutti interamente all'epoca della mia visita (30 agosto 1908), essi convogliano d'inverno, nei loro larghi letti ciottolosi, poca acqua che si raccoglie nella parte più bassa del Campo detta *Il Pantano* (705 m.). Anche in questa parte però la conca era di agosto tutta a secco e coltivata; l'acqua si doveva trovare tuttavia a piccola profondità sotto il fondo (non più di 2-3 m.) come dimostrò l'ispezione di alcuni pozzi verso il lato NO. Quivi — proprio all'angolo NO — una soglia

Tre sezioni trasversali della Valle del Noce. — I. Al piede della Serra Nucitu: ambo i versanti sono incisi nelle formazioni calcaree. — II. Poco a valle del confluente col Torbido: ambo i versanti sono incisi nelle formazioni argillose e franose dell'eocene. — III. Poco prima dell'imbocco della gola di Trècchina: il versante sinistro, più ripido, è costituito da calcare; sul destro, alquanto più sdraiato, il calcare è ricoperto in basso da una sottile coltre argillosa.

alta 744 m. (aner.) separa il Campo dalla vallecola di un fosso che affluisce al Caffaro (Gaglione, Noce) e qui passa la strada nazionale che traversa tutto il Campo, risalendo anche la conoide. E difficile dire se le acque assorbite dal fondo, tributino al Noce, ovvero ai torrenti che formano il Lao, ma la prima ipotesi è da ritenersi, per ragioni stratigrafiche, più probabile.

La cavità che porta il caratteristico nome di Uovo di Vacca è a SO del Campo del Galdo da cui la separa la dorsale della Serra Grande. Il fondo,

[1] I due nomi dei torrenti mancano nella carta topografica (f. 210, II).

di forma presso che circolare, col diametro di 500-600 m., è all'altezza di circa 925 m.; circondata da ogni parte da pareti erte e ripide, la cavità è aperta solo verso NE, dove la limita un orlo alto appena 12-14 m., superato il quale, si scende in un vallone inciso nei fianchi della Serra, che va a finire nel Campo del Galdo. Il fondo della cavità è, anche d'inverno, ordinariamente asciutto, poichè l'acqua piovana viene immediatamente assorbita; vi sono anche alcuni fabbricati.

Il lago Sirino si trova al piede meridionale della montagna omonima, sulla sinistra della strada che conduce da Lagonegro a Lauria, a 784 m., di altezza (aner.). Il piccolo bacino di forma ellittica un po' irregolare, lungo circa 250 m., largo al massimo la metà, si apre nelle formazioni argillo-scistose dell'eocene che rivestono con sottile mantello i sovrastanti calcari triasici della Costa del Capraro o Mazzapecore. Alimentato da un breve e limpido ruscello, che si dilata e impaluda prima di raggiungere il lago, questo è privo di emissario visibile; uno smaltitoio si aprì veramente all'improvviso nell'autunno 1903 all'angolo SE per lo sprofondamento di un tratto della riva e la conseguente formazione di un piccolo pozzo naturale nel quale le acque si inabissavano; esso peraltro fu poscia ostruito artificialmente con pietre. Oggi dunque il lago viene smaltito per via sotterranea, e non è improbabile che le acque alimentino qualche sorgente dei dintorni, forse quelle della Ferriera di Nemoli, come è opinione della gente del luogo. Il livello del lago, che all'epoca della mia visita (27 agosto 1908) era presso che in massima magra, è soggetto durante l'anno ad oscillazioni di un metro e forse più, come si rileva da tracce ben visibili sulle rive; non mi fu possibile di conoscere la profondità che peraltro non deve essere considerevole. La temperatura dell'acqua era il 27 agosto alle 9 del mattino 10°,6 (all'ombra), essendo quella dell'aria 19°,3; il colore verdastro. Il lago alberga molto pesce.

III. Nelle zone più basse della regione considerata, occupate dalle formazioni a base argillosa dell'eocene, la plastica del suolo è determinata principalmente da quelle forme accelerate e intensificate dei processi denudatori, che si possono abbracciare col nome generico di frane; ad esse si associa l'opera dell'erosione, pur esercitantesi spesso in forma accelerata [1]. Nelle pendici che scendono ai corsi d'acqua, il terreno è quasi ovunque in-

[1] La nomenclatura italiana dei varî processi di demolizione è ancora alquanto incerta. Qui, sull'esempio di alcuni più recenti scrittori tedeschi, noi adoperiamo il vocabolo *erosione* per indicare genericamente tutti i processi che agiscono in senso lineare, e il vocabolo *denudazione* per designare quelli che si esercitano di preferenza in superficie. Veramente per questi ultimi è in uso in tedesco, accanto alla voce « denudazione » (o il corrispondente germanico *Entblössung*), la voce *Abtragung* che potrebbe tradursi con *asportazione*; ma noi abbiamo voluto evitare di aggiungere un altro neologismo ai tanti già introdotti in questo campo, e più o meno generalmente accolti.

stabile o semovente [1]; il tipo di frane che predomina è quello di scorrimenti, estesi, ma di solito poco profondi, della crosta argillosa, che, fessurandosi d'estate per azione del calore solare, s'impregna poi d'acqua nella stagione umida e scivola per l'aumento di peso e per l'impulso dell'acqua stessa. Fenomeni di questo genere io ho osservato in forma cospicua lungo il Vallone Bitonto, i cui fianchi si convertono d'inverno in un vero mare di viscida fanghiglia semovente, lungo il Vallone Lupo, e sulla destra del Gaglione; gli abitanti dànno il nome di *calanche* o *sciòddole* alle frane di questo tipo. Dove il terriccio coltivato ricuopre le argille, i movimenti si verificano ugualmente, perchè l'acqua penetra sotto l'*humus*, scorre sulle argille sottostanti e le rammollisce, finchè esse, quando l'inclinazione del pendìo sia sufficiente, per la pressione del terreno sovrapposto si mettono in moto cercando una nuova posizione di equilibrio. Nelle pendici coperte di bosco, gli scorrimenti, in genere più profondi, sono lentissimi, talora impercettibili: si rivelano peraltro dalla posizione inclinata degli alberi, come appare nel Bosco di S. Maria sulla sinistra del Torbido.

Non mancano poi esempî di frane più grandiose: scoscendimenti improvvisi di potenti zolle di argilloscisti, come quello imponente che accadde nel dicembre 1878 in contrada Rosa alle sorgenti del Torbido, o lenti scorrimenti di tutta intera la coltre argillosa sul letto calcareo soggiacente, come si verifica a Lauria, sulla sinistra del Gaglione. Quivi appunto, tutta la falda, spessa certamente molte diecine di metri, che ricuopre gli strati di calcare cretaceo della Serra Pastorella e della Serra S. Elia, è impegnata in un lento, ma continuo sdrucciolamento verso il Gaglione: le case più basse di Lauria Inferiore e buona parte di Lauria Superiore vengono travolte nel movimento, facilitato da acque filtranti, che probabilmente formano un velo fra le argille e i calcari. Anche il ciglione dirupato e in più luoghi a picco della Serra Pastorella, dove il calcare è fessurato e cariato, è compromesso nel movimento: a Lauria Superiore più volte (p. es. nel 1740 e nel 1826) il crollo di una parte dello sprone che sosteneva le case del rione Olmo, recò gravissimi danni.

Gli effetti morfologici delle frane si rivelano sia nel modellamento delle valli, sia nella conformazione dei dossi montuosi, dove questi sono costituiti esclusivamente dalle formazioni argillose, sede delle frane stesse. In generale la rapida denudazione sui fianchi delle valli conferisce ad esse un aspetto più maturo di quello che dovrebbero avere, accelerandone il ciclo evolutivo; il profilo trasversale appare piatto e sdraiato, perchè l'inclinazione delle pendici laterali è piccola e il fondo largo. Nella valle del Noce, che è ancora allo stadio di giovinezza, caratterizzato di solito da un profilo

[1] Cfr. Bruno G. B., *Le frane di Lauria.* L'ingegneria civile e le arti industriali, 1891, pp. 49-59.

trasversale a forma spiccata di V, si alternano invece ai tronchi con tale profilo, tronchi con profilo molto più sdraiato; questi ultimi corrispondono all'attraversamento dei terreni franosi dell'eocene. Angusta e incassata fin sotto la Serra Nucitu a sud di Lagonegro (cfr. la sezione I), la valle si apre e si allarga poi in corrispondenza ai confluenti del Vallone Lupo e del Bitonto, riprende il caratteristico profilo trasversale a V nei dintorni di Rivello, ove i suoi fianchi sono costituiti da formazioni calcaree solo in parte rivestite da una sottile coltre argillosa, poi si allarga nuovamente, assumendo un profilo assai piatto, tra il confluente della Fiumara del Bosco e quello del Gaglione, nel tronco cioè dove le frane hanno il massimo sviluppo (sez. II), infine si restringe ancora presso la gola di Trècchina (sez. III).

L'influenza dei processi denudatori nel modellamento dei dossi montuosi appare manifesta nei dintorni del Passo della Colla e soprattutto nella regione detta « Il Cavallo » tra Sinni e Noce, dove le formazioni argillose si estendono, come già si disse, fino a costituire per lungo tratto la linea di displuvio. Qui i movimenti del suolo agiscono appunto nel senso di arrotondare ed abbassare le dorsali spartiacque, e ad essi si associa l'erosione regressiva dei torrenti, pure esercitantesi in forma accelerata, data la piccola resistenza dei terreni superficiali. La già ricordata frana in contrada Rosa si staccò proprio presso lo spartiacque Noce-Sinni, che qui è alto 1022 m. circa; ma il torrente Torbido, guadagnando a ritroso, tende ad intaccarlo ed abbassarlo vieppiù. Più energicamente lavorano allo stesso effetto i piccoli corsi d'acqua formanti il Gaglione, la cui erosione regressiva si esercita proprio nel punto dove lo spartiacque è più depresso (840 m.); quivi le sorgenti del vallone Alzo Jornillo, uno dei due rami principali del Gaglione, distano appena un chilometro dal letto del Sinni; è perciò assai probabile, come ha già segnalato il De Lorenzo (1) la decapitazione del Sinni stesso, che qui corre all'altezza di 780 m. circa, da parte del Gaglione, il cui alveo nel punto di riunione dei due valloni che lo formano, è invece a 420 m. (2); è un caso di cattura facilmente prevedibile per un avvenire relativamente vicino.

All'erosione regressiva si deve del pari l'arretramento delle tre vallette di Mala Mogliera, del Lupo e del Vallone Grande, cui corrispondono tre intaccature della linea displuviale; il torrente Lupo è particolarmente attivo, poichè anche qui all'opera dell'erosione si aggiunge quella delle frane nella coltre argillosa che forma la dorsale spartiacque.

Lo studio delle condizioni morfologiche dell'alto bacino del Noce non è senza importanza nei riguardi antropogeografici, specialmente per ciò che riflette l'azione delle frane e fenomeni affini sulla viabilità, sulle culture,

(1) Gfr. De Lorenzo, *Studî di geol. nell'App. merid.*, pag. 121.

(2) L'alveo del Noce, che pel Gaglione rappresenta il livello di base dell'erosione, si trova, alla confluenza col Gaglione stesso, a 180 m. s. liv. mar.

sulla sicurezza degli abitati. Qui basti accennare alla grande instabilità delle strade: quella da Lagonegro a Lauria, più volte spostata e danneggiata, ha dovuto subire un gran numero di varianti, al pari del tronco Lauria-Trecchina; della strada rotabile che univa Nemoli alla nazionale per Sapri e di quella da Trecchina a Rivello oggi non resta quasi più traccia. Quanto agli abitati, si è già fatto parola delle condizioni precarie in cui versano le due Laurie. In tal modo le rapide mutazioni nella plastica del suolo si rendono manifeste anche per le conseguenze indirette che riguardano l'uomo; più esattamente potrebbero accertarsi tali mutazioni se si possedessero carte topografiche di quattro o cinque secoli fa da paragonare con le attuali; si traccerebbe allora la storia morfologica della regione e si avrebbe modo di valutare la somma di lavoro compiuto in un dato tempo dagli agenti modificatori di cui si è discorso; valutazione che pur sarebbe di grande interesse ma che attualmente riesce presso che impossibile.

Mineralogia. — *L'andalusite di Musso (Lago di Como)* [1]. Nota del dott. Emilio Repossi, presentata dal Corrispondente Ettore Artini.

I gneiss minuti ed i micascisti, a volta a volta granatiferi e staurolitiferi, con intercalazioni anfibolitiche, noti nella letteratura col nome di *micascisti del Legnone*, si stendono con pari potenza anche sulla sponda destra del lago di Como, affiorando dai dintorni di Rezzonico fin sopra Gravedona e formando la massa principale del Bregagno. In essi si notano assai di frequente lenticciole e straterelli quarzosi bianchi, qualche volta leggerissimamente rosei o violacei, spesso arricciati, sempre in perfetta concordanza con le rocce finamente scistose e quasi filladiche che li includono. In qualche punto queste lenti quarzose raggiungono la potenza di due, tre ed anche quattro decimetri, come ad esempio nelle adiacenze di Musso, ed allora vengono talvolta utilizzate come fondente nelle vicine ferriere di Dongo.

Presso Musso appunto, ossia poche decine di metri più a sud della nota lente calcareo-marmorea sulla quale sono gli avanzi del castello che da questo borgo prende nome, e precisamente nelle immediate vicinanze della frazione di Genico, ad un centinaio di metri sul lago, in una di quelle lenti quarzose ed in un blocco da esse staccato rinvenni i cristalli d'*andalusite*, che formano oggetto della presente Nota. Essi sono adunque in condizioni di giacitura affatto normali e pressochè identiche a quelle dell'Alpe Lisens e di Pitzthal nel Tirolo, di Montavon nel Vorarlberg, della val Fluela e del ghiacciaio di Scaletta nei Grigioni, e di molte e molte altre località ancora, ma

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio mineralogico del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

hanno per noi un singolare interesse perchè sono i primi che si rinvengono, almeno per quanto io so, in simili condizioni in territorio italiano.

A somiglianza degli esemplari delle località ora ricordate, delle quali si occuparono molti studiosi, ed in ispecial modo il v. Zepharovich [1], l'Haefele [2], il Rompel [3], il Gemböck [4], il Gramann [5], i cristalli di *andalusite* di Musso, quantunque sempre e interamente compresi entro il quarzo, sembrano talvolta impiantati nella roccia che interclude il quarzo stesso, roccia che, nel caso particolare del quarzo andalusitifero di Genico, è precisamente un gneiss a due miche, ricco di cristalli di staurolite grossi e ben formati. È da notarsi che in questo gneiss non ho constatata la presenza dell'andalusite; la qual cosa trova perfetto riscontro in quanto osservarono altri autori in giacimenti analoghi, come ad esempio a Lisens, nella Pitzthal, ecc.

Le lenti quarzose, con o senza andalusite, sono rivestite da una specie di corteccia micacea, in cui spesso la biotite è alterata in clorite, e sulla loro superficie sono talvolta adagiati cristalli di staurolite, ma nella loro massa, almeno nei casi da me osservati, non sono compresi, oltre i cristalli d'andalusite, ed anche questi sventuratamente assai rari, che i suoi prodotti d'alterazione, piccole quantità di sillimanite e lamine o leccature muscovitiche. Sotto questo riguardo pertanto le lenti andalusitifere di Musso si differenziano abbastanza marcatamente da quelle più sopra citate, nelle quali l'aspetto può dirsi con ragione quasi pegmatitico perchè l'andalusite vi è spesso accompagnata da felspati, da miche, da cordierite, da cianite e da altri minerali ancora.

I cristalli d'*andalusite* da me raccolti, pur essendo di norma allungati secondo *z*, sono qualche volta anche piuttosto tozzi. Gli individui più grossi raggiungono 7-8 cm. di lunghezza, sopra 4 cm. circa di spessore: si tratta quindi di esemplari abbastanza vistosi e paragonabili, ad esempio, agli esemplari provenienti dall'Alpe Lisens, ai quali invero assomigliano mirabilmente anche per tutti gli altri caratteri.

I cristalli, che si liberano facilmente dalla matrice quarzosa, in grazia di una spalmatura muscovitica dalla quale sono quasi completamente rive-

[1] V. v. Zepharovich, *Mineralogisches Lexicon f. d. Kaiserthum Oesterreich*, 1859, I, pag. 14; 1873, II, pag. 12.

[2] P. E. Haefele, *Ueber Andalusit vom Pitzthale in Tirol*, Zeitschr. f. Krystall. u. Miner.; B. XXIII, pag. 551, 1894.

[3] J Rompel, *Ein neuer Fundort für Andalusit auf der Heimspitze in Vorarlberg*, Tscherm. mineral. u. petrogr. Mittheil.; B. XIV, 1894.

[4] H. Gemböck. *Ueber den Andalusit vom Montavon in Vorarlberg*, N. Jahrbuch f. Mineralogie, etc. 1898, II, B. 89.

[5] A. Gramann, *Ueber die Andalusitvorkommnisse in rhätischen Flüela- und Scalettagebiet und die Farbung der alpinen Andalusite*, Vierteljahrschrift d. Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, XLIV Jg. 1899.

stiti, sono poveri di forme e, ad ogni modo, tali da non prestarsi affatto a misura goniometrica precisa. Le facce sono quasi opache, solcate ed ondulate e spesso tutto il cristallo sembra essere stato contorto e deformato da una energica pressione. Qualche imperfettissima misura, eseguita col goniometro d'applicazione, permise di riscontrare il solito prisma {110}, secondo il quale i cristalli hanno anche una sfaldatura abbastanza facile, sebbene poco perfetta, la base {001} e, dubitativamente, il prisma {101}.

Negli esemplari freschi e sulle superficie di frattura che interessano le parti più interne dei cristalli il colore è rosa fior di pesco o rosso carmino e la lucentezza vitrea molto viva; di solito però i cristalli sono superficialmente alterati, ed in tal caso il loro colore varia dal giallo-verdastro al grigio-verdastro od azzurrastro con macchie giallo-brune e la lucentezza diventa piuttosto grassa. In nessuno osservai traccia di zonature, che ricordino quelle tipiche della chiastolite.

Nelle parti più fresche, ossia verso il nucleo degli individui cristallini, dove il colore è più vivo, la durezza supera il 7, mentre scende gradatamente fino sotto il 3 nelle parti alterate di aspetto quasi talcoso.

Il peso specifico, determinato sopra frammentini accuratamente scelti fra i più puri ed i più freschi, risultò uguale a *3,144* (determinazione fatta con la soluzione di Klein e la bilancia di Westphal, a 20° C.).

Gli individui molto alterati sono quasi opachi, mentre gli altri sono sensibilmente più trasparenti e mostrano, ridotti in frantumi, l'ordinario pleocroismo dell'andalusite

$a = \mathfrak{c}$ incoloro o leggermente verdognolo
$b = \mathfrak{b}$ " "
$c = \mathfrak{a}$ rosa pesco.

Sopra qualche laminetta basale, distinguibile per la mancanza pressochè completa di pleocroismo, si potè osservare a luce convergente una discreta immagine assiale, con un angolo degli assi ottici piuttosto grande.

I cristalli studiati sono, come ora dissi, quasi costantemente alterati verso la superficie in una massa d'aspetto talcoso, verdastra, compatta, ma poco dura. L'alterazione si stende anche lungo le non rare screpolature dei cristalli e qui talvolta si presenta come una spalmatura biancastra o bianco perlacea ancor più tenera e quasi terrosa, che si riga facilmente con l'unghia ed è untuosa al tatto.

Tanto l'uno quanto l'altro di questi prodotti d'alterazione si risolvono al microscopio in un aggregato di squamette vivamente birifrangenti, che hanno tutti i caratteri della sericite. Si può quindi ritenere che, non ostante il loro diverso aspetto, essi si siano originati per un identico processo d'alterazione.

È noto che simili prodotti d'alterazione furono riscontrati, si può dire, quasi dovunque sui cristalli d'andalusite e dai varî osservatori diversamente

interpretati. L'opinione in oggi comunemente accettata è che si tratti di una vera sericitizzazione, accompagnata forse da formazione di un po' di caolino e di clorite.

Altro fatto molto frequentemente osservato è la presenza di lamelle muscovitiche adagiate regolarmente sui cristalli d'andalusite, lamelle che talvolta ricoprono interamente le facce del cristallo e non di rado si addentrano nelle screpolature, adattandosi con molta regolarità sulle superficie di sfaldatura. Una disposizione consimile si nota su quasi tutti gli esemplari da me raccolti a Musso.

Questa muscovite venne dai più ritenuta come un prodotto d'alterazione dell'andalusite e precisamente come il risultato di un più avanzato stadio del processo di sericitizzazione, al quale or ora accennammo. Senonchè alcuni autori, e specialmente il Gümbel [1], l'Haefele [2] nel suo studio sull'andalusite di Pitzthal nel Tirolo, sulle tracce del De Cloizeaux [3], del Delesse [4] e del Roth [5], opinano che tale muscovite in più grandi lamine sia un primitivo intercluso delle lenti quarzose concresciuto ed associato all'andalusite, cosa che, in alcuni casi particolari, è probabilmente vera.

Il Gramann invece, il quale, occupandosi dell'andalusite di numerose località dei Grigioni, fu uno degli ultimi autori che abbiano studiato questo minerale in giacimento analogo al nostro, ritiene che il caso generale sia quello da noi accennato, e cioè che la muscovite in lamine macroscopiche sia davvero prodotto di una più avanzata alterazione dell'andalusite.

Dal canto mio dirò che quanto s'osserva nel giacimento di Musso depone piuttosto in favore di questa che dell'altra ipotesi. Difatti fra gli esemplari da me raccolti ve n'ha qualcuno che ha l'estremità completamente formata da muscovite e qualche altro è con tutta sicurezza una completa pseudomorfosi di muscovite su andalusite, trattandosi di un aggregato di pure lamine micacee ripetente esattamente la forma esterna di un cristallo di quest'ultimo minerale. Altro fatto degno di nota è che, mentre la muscovite staccata dai cristalli d'andalusite, e proveniente dunque, secondo me, dalla loro alterazione, ha tutti e sempre i caratteri di una muscovite normale, con un angolo assiale piuttosto grande, la mica, che in alcune lenti quarzose, andalusitifere o no, mi fu dato riscontrare in leccature o straterelli di un'origine certamente diversa, ha spesso un angolo assiale piccolissimo ed in taluni casi è quasi affatto uniassica.

[1] Gümbel, *Geognostische Beschreibung des ostbayerischen Grenzgebirges*, etc., Gotha, 1868.

[2] Memoria citata.

[3] Des Cloizeaux, *Manuel de Minéralogie*, 1862, vol. I, pag. 175.

[4] Delesse, Bulletin de la Société géologique, 1859, vol. XV, pag. 141.

[5] J. Roth, *Allgemeine u. chemische Geologie*, Berlin 1879, B. I, 375.

A conclusioni diverse giungerei invece riguardo alla *sillimanite*, che, come sopra ho detto, accompagna qualche volta l'andalusite di Musso, formando un nuovo esempio di questa interessante associazione fra le due specie minerali.

Frantumando ed osservando al microscopio la parte alterata e tenera dei cristalli d'andalusite, insieme con gli aggregati squamosi sericitici, si notano qualche volta sottili aghetti con allungamento positivo ed estinzione parallela, che facilmente si riconoscono per sillimanite, tanto che, ad un primo esame, si potrebbe pensare ad una paramorfosi di questo minerale su andalusite. Insieme però potei osservare che taluni cristalli freschi sono qua e colà ricoperti regolarmente da aghi di sillimanite in quantità abbastanza grande per essere perfettamente riconoscibile ad occhio nudo, e che non di rado la sillimanite si trova anche isolatamente racchiusa entro il quarzo. Ciò mi pare ragionevolmente escludere che si tratti di una paramorfosi, e provare che ci troviamo dinanzi ad un'associazione primitiva dei due minerali, simile forse a quelle regolari, che per primo osservò il Lacroix [1] in alcuni esemplari di Ceylan, di Brettagna e dei Pirenei, e che poi furono da altri pure riscontrate.

Chimica. — *Sopra un tentativo di preparazione dei composti ossigenati del fluoro* [2]. Nota II di G. Gallo, presentata dal Socio E. Paternò.

Il Moissan, nella sua raccolta di lavori sul fluoro [3], rileva come molto resti ancora da studiare a proposito di questo elemento, e molte lacune debbano venire ancora colmate; in particolar modo lo studio dei composti ossigenati del fluoro, dei fluoruri di zolfo, di iodio, di bromo, e quelli di numerosi fluoruri ed ossifluoruri metallici, meriterebbero delle ricerche ulteriori.

Questo campo abbastanza vasto di ricerche che rimane ancora da coltivare, mi ha consigliato di intraprendere lo studio dell'argomento, in vista della possibile preparazione di alcuni di questi composti.

Come è noto, le proprietà fisiche e chimiche degli alogeni, pure essendo in istretta relazione fra loro, sono però una funzione del peso atomico degli alogeni stessi e fra queste l'affinità per l'idrogeno va aumentando dall'iodio al fluoro, e la combinazione avviene con sviluppo di calore, mentre l'affinità

(1) A. Lacroix, *Note sur une association de sillimanite et d'andalousite*, Bull. Soc. Minéral., t. XI, pag. 150, 1888.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio chimico della R. Scuola degli Ingegneri della Università di Roma.

(3) *Le fluor et ses composés.* Paris, 1900, ed. Steinheil, pag. 120.

con l'ossigeno va diminuendo nello stesso senso dall'iodio al fluoro; poichè, mentre solo l'I può combinarsi direttamente con l'O, questa affinità va affievolendosi per il bromo e il cloro, mentre non si conoscono affatto i composti ossigenati del fluoro. E contrariamente a quanto avviene per i composti idrogenati, le combinazioni con l'ossigeno sono endotermiche, sono poco stabili, e la loro decomposizione avviene con esplosione.

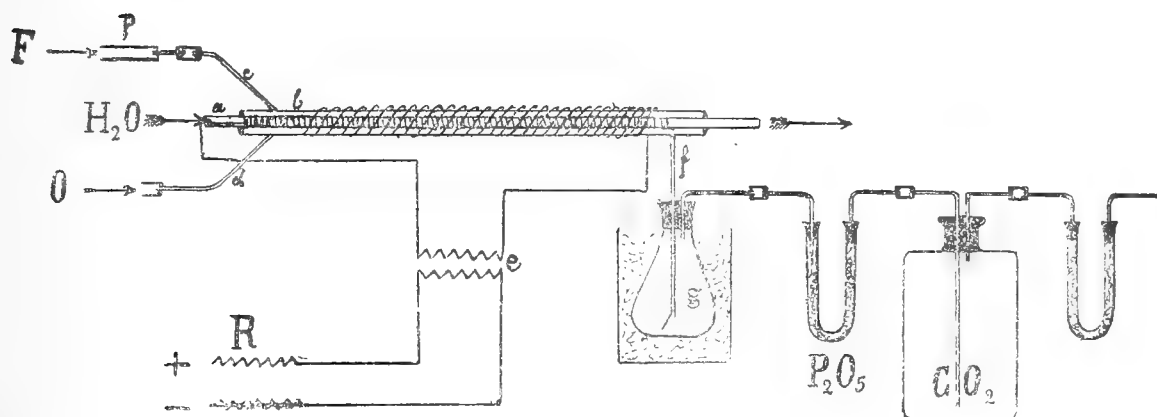
Già il Moissan, allo scopo di studiare il comportamento del fluoro coll'ossigeno, aveva eseguito delle numerose esperienze. Egli fece arrivare del fluoro secco sopra dell'ossigeno liquido contenuto in un tubo di vetro, ed osservò che il fluoro liquefacendosi, si mescolava uniformemente coll'ossigeno, comunicando a questo una colorazione giallastra. Se si lascia innalzare lentamente la temperatura del miscuglio liquido dei due gas, l'ossigeno si evapora per primo, ed il liquido si concentra sempre più in fluoro, fino a che anche quest'ultimo entra in ebollizione. Per cui, alla temperatura dell'ossigeno liquido (— 210) il fluoro non reagisce con questo elemento, ed in generale l'energia chimica del fluoro liquido è tanto piccola, da non riuscire a spostare l'iodio dagli ioduri.

Alla temperatura ordinaria il fluoro non esercita alcuna azione sull'ossigeno. Analogamente se si fanno reagire il fluoro e l'ossigeno entro un tubo di platino alla temperatura di 500°, non si osserva alcun fenomeno, ed il miscuglio gassoso non presenta alcuna proprietà nuova. Invece sembra che si possa produrre una reazìone, quando si faccia agire il fluoro sull'ozono molto concentrato.

A questo proposito il Moissan eseguì la seguente esperienza (1). Come è noto, il fluoro decompone l'acqua con estrema violenza, formando acido fluoridrico ed ozono. Se si fanno arrivare nell'interno di un tubo di platino orizzontale, chiuso alle due estremità con due dischi di fluorina trasparente, e pieno di fluoro, alcune goccie di acqua, si produce tosto una decomposizione, e si osserva una nube densa, di colore oscuro, formarsi al di sopra della goccia d'acqua. Questa nebbia diminuisce a poco a poco d'intensità, per dar luogo ad una tinta bleu, indicante l'esistenza di ozono abbastanza concentrato per presentare il colore bleu indicato da Hautefeuille e Chappuis. Se al momento in cui si son prodotti questi fumi oscuri, si scaccia il miscuglio gassoso con una corrente di azoto, si sente un odore piccante, diverso da quello del fluoro; odore cho va rapidamente modificandosi per dare poi l'odore caratteristico dell'ozono. Il Moissan è d'opinione che la nube oscura sia dovuta alla formazione di un composto ossigenato instabile del fluoro, e facilmente decomponibile o per una elevazione di temperatura, o in causa di traccie di umidità.

(1) Loc. cit., pag. 122.

Infine il Moissan (1) ha studiato l'azione del fluoro sopra gli ossidi metallici. La potassa fusa, messa in presenza di una atmosfera di fluoro, non tarda a sviluppare ozono, ed a ricoprirsi di uno strato di fluoruro alcalino, che diminuisce o limita la reazione. La soluzione acquosa di potassa, nella quale si faccia passare del fluoro gassoso, non ha dato una reazione tale da lasciar intravedere l'esistenza di un composto ossigenato del fluoro, analogo all'acido ipocloroso, ma sembra piuttosto che si formi un composto di ossido di potassio e di acqua ossigenata, insieme a del fluoruro potassico. Se la soluzione potassica contiene del cloruro potassico, si forma rapidamente dell'acido ipocloroso.

Da tutte queste esperienze risulta come l'affinità del fluoro per l'ossigeno sia in realtà molto debole, però i fatti osservati non escludono la possibilità

che in condizioni speciali di trattamento, si possa determinare la combinazione del fluoro coll'ossigeno, data l'analogia del fluoro cogli altri alogeni. Ed è in vista di questa probabilità che io mi sono proposto di tentare l'azione dell'effluvio elettrico, sopra un miscuglio di ossigeno e fluoro.

A tale scopo ho costruito l'apparecchio illustrato nella figura. Esso consta essenzialmente di un tubo generatore di ozono. Due tubi concentrici di vetro, *a*, *b*, vengono inseriti l'uno entro l'altro, e di essi l'esterno *b*, più corto, viene saldato, ai suoi estremi, sull'interno *a*, più lungo, in modo da lasciare una intercapedine fra i due tubi. Il tubo *a* contiene nel suo interno una armatura metallica, costituita da una spirale di filo di alluminio, e serve inoltre a dar passaggio ad una corrente d'acqua, allo scopo di evitare un riscaldamento eccessivo. Nell'intercapedine si possono far arrivare per mezzo dei due tubi *c* e *d*, una corrente di fluoro gassoso da una parte, e di ossigeno perfettamente secco e puro dall'altra. (Ricordo a questo proposito, che il fluoro perfettamente secco, ed esente da acido fluoridrico, non intacca il vetro pulito ed asciutto). All'esterno del tubo *b*, abbiamo un'altra spirale in alluminio,

(1) Moissan, loc. cit., pag. 228.

che funziona da seconda armatura. Fra le due armature metalliche, si può far avvenire la scarica oscura di una corrente ad alta tensione, proveniente dal secondario di un grosso rocchetto di Ruhmkorff (*e*). All'estremità del tubo ozonogeno, si trova un altro tubo a sviluppo, *f*, che termina entro un matraccio *g*, paraffinato internamente ed immerso in un miscuglio frigorifero. Segue a questo un tubo ad U pieno di anidride fosforica, quindi una bottiglia piena di anidride carbonica perfettamente secca, allo scopo di raccogliere un eventuale prodotto gassoso, ed infine un altro tubo ad anidride fosforica, stabilisce la comunicazione coll'esterno. Tutte le giunture delle varie parti dell'apparecchio sono fatte con tubetti di vetro che comprendono le due estremità da riunire, e sigillati con mastice *chatterton* (un mastice costituito di un miscuglio di guttaperga, resina e catrame) che ha la proprietà di non venire alterato dall'ozono.

La prima esperienza venne fatta il 28 dicembre 1909. Il fluoro che si sviluppava regolarmente dall'apparecchio da me precedentemente descritto [1], attraversava dapprima un tubo di rame P, contenente del fluoruro di sodio secco, allo scopo di trattenere le ultime traccie di acido fluoridrico, e quindi cominciò ad arrivare nel tubo ozonogeno, insieme all'ossigeno che entrava per *d*, mentre si faceva contemporaneamente funzionare il rocchetto *e*. Tutto procedette bene per circa dieci minuti, ed io attendevo ansiosamente l'apparire di qualche fenomeno: ma dopo pochi minuti dacchè l'esperienza era stata iniziata, osservai attraverso il tubo una viva luminosità, seguìta tosto da una esplosione che mi fece saltare in aria il tappo dell'apparecchio di produzione del fluoro da una parte, e mandò in frantumi il matraccio paraffinato *g* dall'altra, ferendomi, non gravemente, al viso ed alle mani.

Osservando con calma il risultato dell'esperienza, ho potuto rilevare, come queste due parti erano appunto quelle che in tutto il sistema offrivano minore resistenza, e perciò cedettero per prime alla pressione determinata dallo scoppio. Questo è quanto ho potuto vedere finora.

A che cosa può essere dovuta questa esplosione? In primo luogo posso escludere in modo assoluto che l'idrogeno che si sviluppa al polo negativo del mio apparecchio, possa essere penetrato nello spazio anodico, e da questo nel tubo; basta infatti osservare la costruzione dell'apparecchio di produzione del fluoro, per escludere senz'altro questa probabilità; poichè un piccolo aumento di pressione potrebbe determinarsi nello spazio anodico, ma mai nello spazio catodico, dal quale io avevo durante l'esperienza confermato il regolare svolgimento di idrogeno.

Mi pare che l'ipotesi più verosimile che si possa fare, sia quella della formazione di un composto ossigenato del fluoro, molto instabile. Ne risulterebbe perciò, che la reazione tra fluoro ed ossigeno sarebbe endotermica,

(1) G. Gallo, Rendiconti R. Accad. Lincei, vol. XIX, ser. 5ª, fasc. 4.

come le combinazioni analoghe degli altri alogeni, ma non appena il composto si forma nelle condizioni della mia esperienza, o almeno appena raggiunto un certo limite, può, o per un innalzamento di temperatura, o per altra causa eventuale, decomporsi con esplosione, come ancora i composti ossigenati degli altri alogeni, ed in particolar modo il biossido di cloro, $Cl_2 O_4$.

Ad ogni modo, io mi propongo di continuare i miei studî sull'argomento, nella speranza di poter fissare in qualche modo questo probabile composto, sul quale non mi è dato per ora di dire più oltre.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sul luogo di utilizzazione dell'azoto dei nitrati nel corpo delle piante.* Nota di C. Acqua, presentata dal Socio R. Pirotta.

Patologia vegetale. — *Gommosi da ferita, trips ed acariosi delle viti americane in Sicilia.* Nota di E. Pantanelli, presentata dal Socio G. Cuboni.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Zoologia. — *Sulla ricostituzione del nucleo* (1). Nota preliminare di Gustavo Brunelli, presentata dal Socio B. Grassi.

Lo studio della divisione indiretta delle cellule spermatogoniali ed anche delle cellule somatiche in *Tryxalis*, mi ha portato ad alcuni risultati che io credo di un certo interesse relativamente al problema del modo come si effettua la ricostituzione del nucleo.

Le principali conclusioni, tratte dai fatti da me osservati nelle suddette divisioni, sono le seguenti:

1. I cromosomi anafasici si mostrano scissi longitudinalmente; questo non è un carattere eccezionale, ma normale delle divisioni somatiche.

2. La duplicità dei cromosomi telofasici non è solo apparente e dovuta all'alveolizzazione, ma reale e conseguente alla scissione anafasica.

3. Nel nucleo in riposo, non solo persistono i cromosomi, ma persistono come esili filamenti doppî, molto lunghi e ritorti.

4. La scissione longitudinale profasica è solo apparente, vale a dire non è che il riapparire della precedente scissione anafasica.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

Ammettendo la persistenza degli individui cromosomici, non solo respingiamo con altri autori la vecchia idea di uno spirema continuo e di una susseguente divisione trasversale, ma respingiamo anche l'idea di una scissione longitudinale dei segmenti spirematici, come un momento caratteristico della profase.

Nell'ammettere poi che i cromosomi persistano nel nucleo in riposo scissi per il lungo, la nostra opinione si discosta da quella dei precedenti autori che pure si sono pronunciati in favore della individualità dei cromosomi, e precisamente:

1. Dall'idea di Van Beneden (elaborata da Grégoire), che il reticolo nucleare si costituisca mediante una semplice alveolizzazione dei cromosomi telofasici.

2. Dall'idea di Boveri, secondo il quale il reticolo nucleare si origina dalle anastomosi in cui gli individui cromosomici si risolverebbero nella loro totalità.

3. Dall'idea della Bonnevie, secondo la quale nella ricostituzione del nucleo corrisponde a ciascun cromosoma un solo filo cromatinico a decorso spirale.

Mentre le nostre idee sul nucleo in riposo possono sembrare in contrasto con alcuni reperti, si accordano con molti altri, per citarne uno solo interessante: la precoce scissione profasica rilevata da parte di diversi autori. Ma deve sovrattutto esser considerato ciò: che rispondono al nostro modo di vedere anche le condizioni del nucleo nei primi momenti dell'accrescimento nella linea germinale, condizioni che in precedenza abbiamo sostenuto risiedere in una mancanza del leptonema e in una duplicità iniziale dei segmenti spirematici [1]. Cadrebbero con ciò molte idee preconcette sovra alcune strutture del periodo di accrescimento, ritenute peculiari delle cellule germinali.

La nostra ipotesi generale che sottoponiamo fiduciosamente ad ulteriori analisi, è che la ricostituzione del nucleo avviene in modo tale che il carattere della profase (sia maturativa che somatica) non solo non risiede in una divisione trasversale dello spirema, ma nemmeno in una scissione longitudinale dei segmenti spirematici. Ciò che caratterizza la profase è solo il condensamento e la detorsione degli individui cromosomici precedentemente scissi, allungati e ritorti.

[1] G. Brunelli, *La spermatogenesi del « Gryllus desertus »* Pall *(Divisioni spermatogoniali e maturative)*, Mem. Acc. Lincei, serie 5^{a}, vol. VII, 1909.

Patologia — *Il primo caso di bottone d'Oriente in Italia.* Nota del prof. UMBERTO GABBI e del dott. FRANCESCO LACAVA, presentata dal Socio B. GRASSI.

In quasi tutti i paesi dove si riscontrarono malati di kala-azar, si osservarono anche casi del cosiddetto bottone d'Oriente. Abbiamo scritto in quasi tutti, non in tutti, perchè ci consta che vi sono regioni nelle quali l'una malattia è presente, mentre l'altra no e viceversa (Manson).

I paesi nei quali entrambe le forme cliniche si presentano, sebbene con frequenza assai diversa sarebbero l'Egitto, la Tunisia, l'Algeria e la Grecia.

Da quando da uno di noi (Gabbi) vennero osservate in Sicilia e in Calabria alcune affezioni morbose — la febbre di Malta, il kala-azar, la *dengue* ed il bubbone climatico — che si riscontravano nel vicino Nord Africano, il dubbio che altre malattie di paesi caldi fossero pure presenti, era alimentato dal fatto che si osservavano dei casi clinici, la cui sindrome copiava in tutto od in gran parte quella di altre malattie dei paesi tropicali a noi più vicini.

La presunzione che accanto al kala-azar vi fosse il bottone d'Oriente era assai forte e per queste due principalissime ragioni: la prima, perchè i due microrganismi generatori della malattia sono morfologicamente assai affini; la seconda, perchè rammentiamo casi di circoscritta affezione cutanea che ricordava coi suoi caratteri quella del cosiddetto bottone d'Oriente, ed alla quale abbiamo dato l'appellativo di tubercolo cutaneo che altri aveva proposto.

Uno di noi (dott. Lacava) aveva vivo nella memoria il ricordo di qualche isolato esempio di simile affezione cutanea ed era alle vedette di qualche nuovo caso che potesse capitare all'osservazione. L'attesa non fu lunga. Da qualche tempo gli si presentò un giovane di 19 anni [1] muratore, di sana e robusta costituzione fisica, da circa quattro mesi presentante all'altezza dell'articolazione del pugno destro, nella pelle che ricopre l'estremità del radio, una intumescenza a forma di bottone di circa 12-14 mm. di diametro, rotonda, interessante la sola cute e spostabile con questa. La cute poi presenta nel centro una piccola escavazione crateriforme, a margini taglienti, a fondo grigio-sporco, non sanguinante e contornata da croste, le quali coprono talvolta la superficie ulcerosa. Se queste si staccano esce *pus* misto a sangue, eppoi sangue scuro. La intumescenza è dura e quasi del tutto

[1] Del paese di Bovalino (Calabria) dove si osservano in adulti tre casi di kala-azar e due in adolescenti.

indolente. I gangli epitrocleari corrispondenti all'arto presentante il bottone sono duri, e d'una durezza lignea.

Questi caratteri indicavano nettamente il bottone d'Aleppo e noi abbiamo avuto la quasi certezza che si trattasse di questa malattia. Delle due forme cliniche colle quali avrebbe potuto essere confusa e cioè il tubercolo cutaneo e la gomma sifilitica non si doveva tenere gran conto sia per la nessuna eredità tubercolare del soggetto, rispetto alla prima; sia per la non avvenuta infezione sifilitica rispetto alla seconda.

A chiarire la situazione abbiamo fatto strisci col liquido raccolto dalla superficie ulcerosa, col sangue fatto sgorgare pungendo con ago sterilizzato la superficie stessa, e col sangue preso con siringa di Pravaz alla periferia del bottone. Fissati prima con alcool metilico e quindi colorati col Giemsa, abbiamo veduto numerosissime forme di *Leishmania*, che diciamo *tropica* perchè tale fu il nome datole da coloro che hanno studiato la malattia nei paesi tropicali. Essa appare forse più grande della L. Donovani (kala-azar) ed offre particolarità morfologiche sulle quali ci fermeremo lungamente nel lavoro che andiamo preparando.

Zoologia. — *Ancora delle ricerche sul numero degli Anofeli infetti nell'agro romano durante il periodo della cura e della profilassi contro la malaria, nell'anno 1909.* Nota del dott. GIOVANNI NOÉ, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Dell'azione locale della temperatura sui vasi sanguigni* (1). Nota del dott. ANTONIO BERTI, presentata dal Socio ARISTIDE STEFANI.

Riferisco sopra una serie di esperienze, in base alle quali viene dimostrato uno speciale comportamento dei vasi sanguigni verso la temperatura, che spiega parecchi dei risultati apparentemente contradditorî, ottenuti dagli sperimentatori che mi hanno preceduto nello studio di questo argomento.

Riprendo lo studio, intorno all'azione locale della temperatura sui vasi, al punto nel quale era stato lasciato dal Lui (2), che eseguì le sue ricerche, nel 1894, in questo Istituto.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia della R. Università di Padova, diretto dal prof. Aristide Stefani.

(2) *Dell'az. locale della temper. sui vasi sang.*, Rivista Veneta di Scienze mediche, 1894, n. 1; *Action locale de la température sur les vaisseaux sanguines*, Arch. it. de Biol., XXI, 3°, 1894.

Le esperienze del Lui si fondano sul principio, che quando la pressione sotto la quale viene fatta una circolazione artificiale con un determinato liquido, attraverso determinati vasi sanguigni, sia costante, l'efflusso deve essere proporzionale al lume dei vasi; cosicchè dalle variazioni dell'efflusso, nell'unità di tempo, si può dedurre lo stato dei vasi stessi.

Questo metodo delle circolazioni artificiali, applicato dallo Stefani, fino dal 1886, allo studio delle azioni locali sui vasi sanguigni, è preferibile a tutti gli altri, perchè — facendosi l'esperienza parecchi minuti dopo l'uccisione dell'animale — viene escluso l'intervento delle azioni dipendenti dalla pressione generale del sangue, e delle azioni dipendenti dai centri cerebro-spinali e probabilmente anche dai gangli periferici; e i risultati che si ottengono possono quindi essere attribuiti esclusivamente ad un'azione diretta locale sui vasi e, con probabilità, ad un'azione esclusiva sulla fibra muscolare.

Il Lui — avendo fatta circolare per gli arti isolati di cani, alternativamente, soluzione fisiologica a 45° circa ed a 35° circa — ha concluso che « la modificazione locale prevalente e duratura dei vasi, prodotta dal caldo, è la costrizione, e quella prodotta dal freddo la dilatazione ». Questa conclusione, nei riguardi dell'azione locale, se collima con le conclusioni di alcuni autori, è in aperto contrasto con le conclusioni di altri. In parte, però, così il disaccordo come l'accordo sono soltanto apparenti, perchè gli appellativi di freddo e di caldo sono stati attribuiti dagli autori diversi a temperature diverse: al punto che talvolta si vede chiamata fredda da uno la temperatura che è considerata come calda da un altro.

Dopo avere ripetuto le esperienze del Lui e di essermi potuto accertare che realmente nel passaggio da 35° a 45° si ha una costrizione e nel passaggio da 45° a 35° una dilatazione, mi sono proposto di risolvere collo stesso metodo — cioè praticando circolazioni artificiali in territorî vascolari diversi di cani e di gatti da poco uccisi — i seguenti quesiti:

1°) Se lo sbalzo di un egual numero di gradi (10°), ma fra temperature diverse da quelle esaminate dal Lui, determini gli stessi risultati.

2°) Se la costrizione che Lui chiama « da caldo » e la dilatazione che Lui chiama « da freddo » siano effetto del rapido passaggio dall'una all'altra temperatura, o non siano invece l'effetto diretto della temperatura medesima, in modo che il lume dei vasi abbia ad essere in rapporto costante con questa.

3°) Se i vasi muscolo-cutanei reagiscano alla temperatura nel medesimo modo dei vasi viscerali.

A tale scopo ho esaminato anzitutto l'effetto, sui vasi degli arti, dello sbalzo di 10°, in più ed in meno, fra temperature notevolmente diverse da quelle esaminate dal Lui.

Quando lo sbalzo avveniva fra 10° e 20°, fra 15° e 25°, fra 20° e 30°, fra 25° e 35°, fra 30° e 40°, ottenevo una espansione vasale, e quando avveniva in senso opposto, cioè fra 20° e 10°, fra 25° e 15° ecc., una costrizione. Così, da questa prima serie di esperienze rimane dimostrato, che se la temperatura di 45° produce costrizione, produce costrizione anche la temperatura di 10°.

Partendo da questi dati, onde risolvere la seconda questione, ho creduto opportuno di ricercare come si comportassero i vasi sottoposti a circolazioni con soluzione fisiologica di temperatura regolarmente crescente o decrescente; ed ho costruito a tal fine un apparecchio, mediante il quale potevo appunto ottenere che la temperatura del liquido circolante regolarmente aumentasse o decrescesse.

Valendomi di questo apparecchio, ho determinato l'efflusso nell'unità di tempo, e quindi lo stato dei vasi, alle temperature del liquido circolante comprese fra 0° e 45°, ottenendo i risultati che seguono:

Irrorando i vasi con soluzione fisiologica a temperatura progressivamente crescente da 0° a 40°, i vasi progressivamente, ora più ed ora meno, si dilatano: e, più precisamente, si dilatano poco e con lentezza da 0° a 15° circa, notevolmente e con rapidità da 15° a 30° circa, e di nuovo con minore intensità e rapidità da 30° in su. Fenomeni inversi si ottengono irrorando i vasi con liquido di temperatura progressivamente decrescente da 40° a 0°.

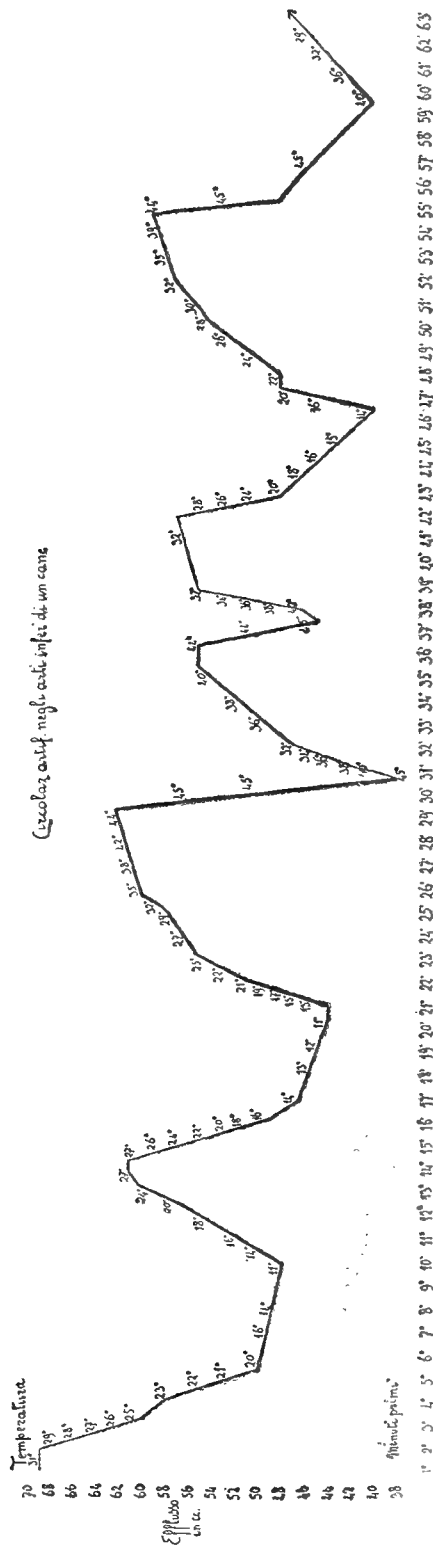
Da 40° a 42°-44° i vasi continuano per lo più a dilatarsi; ma appena si sorpassano i 42°-44°, si costringono rapidamente e fortemente.

Questo speciale comportamento è dimostrato dall'annessa grafica, costruita mediante le cifre rappresentanti l'efflusso nell'unità di tempo, a temperature diverse (alternativamente crescenti e decrescenti), cifre ottenute in una esperienza di circolazione artificiale nel treno posteriore di un cane.

E così, da questa seconda serie di esperienze rimane dimostrato, che, anche senza rapido sbalzo, a determinate temperature corrispondono determinate capacità del lume dei vasi.

Rilevato il comportamento dei vasi muscolo-cutanei, sono passato ad esaminare, se si comportino in eguale maniera i vasi viscerali, e precisamente i vasi dei polmoni, del fegato, del rene, della milza, praticando la circolazione artificiale attraverso detti organi; ed ho ottenuto i risultati seguenti:

Il comportamento dei vasi viscerali di fronte alle varie temperature è simile a quello dei vasi muscolo-cutanei, ma i vasi viscerali reagiscono più energicamente dei vasi muscolo-cutanei di fronte alle varie temperature e cominciano a restringersi a temperature meno elevate, cosicchè in generale si osserva, che quella temperatura di 42-43°, che per lo più non è ancora capace di determinare costrizione nei vasi muscolo-cutanei, è già capace di determinarla nei vasi viscerali, ed in particolar modo nei vasi renali. La maggiore reattività si manifesta con variazioni d'efflusso più pronte e più rapide.

Dopo di aver praticata un po' a lungo una circolazione artificiale con soluzione fisiologica a temperatura superiore ai 42-43°, determinante intensa

Grafica costruita mediante le cifre rappresentanti l'efflusso nell'unità di tempo, a temperature diverse (alternativamente crescenti e decrescenti), cifre ottenute in una esperienza di circolazione artificiale nel treno posteriore di un cane.

I numeri disposti verticalmente, a sinistra, indicano l'efflusso in un periodo di 20''; i numeri disposti trasversalmente, in basso, indicano i minuti primi decorsi dal principio dell'esperienza; i numeri lungo la curva indicano la temperatura del liquido circolante nei vasi.

vasocostrizione, riabbassando la temperatura del liquido circolante, i vasi di frequente non riprendono più il loro lume normale. Questo fatto, che con

probabilità è dovuto alla insorgenza della rigidità muscolare da caldo, ed al quale non è forse estranea anche la insorgenza degli edemi che non di rado si stabiliscono a simili temperature, si verifica più facilmente nei vasi viscerali in confronto ai muscolo-cutanei.

In base alle suesposte esperienze, sono condotto a concludere:

1°) Che, negli animali omotermi, dalla temperatura del sangue discendendo a temperature più basse si ha una progressiva diminuzione del lume dei vasi.

2°) Che dalla temperatura del sangue salendo a temperature superiori si ha sul principio, per qualche grado, una lieve dilatazione vasale, e poi una rapida e notevolissima vasocostrizione.

3°) Che ad una temperatura di poco superiore a quella del sangue i vasi si trovano nello stato di massima espansione, così che qualunque temperatura superiore od inferiore a quella è accompagnata da vasocostrizione.

4°) Che ad ogni determinata temperatura corrisponde da parte dei vasi un determinato lume.

All'azione locale della temperatura del sangue sui vasi, dimostrata da queste e da precedenti esperienze, penso che debbano essere attribuiti molti di quei fatti che comunemente si attribuiscono invece ad azioni reflesse o ad azione diretta della temperatura sui centri vasomotori.

A conferma di questa opinione osservo che lo Stefani (1), dai mutamenti della temperatura del liquido circolante per i vasi degli arti di animali vivi, non ha potuto ottenere azioni vasali reflesse, finchè queste variazioni di temperatura non oltrepassavano quei limiti, di là dai quali esse producono dolore, e che riguardo all'azione diretta della temperatura sul centro bulbare vasocostrittore, egli (2) non ha ottenuto che risultati incerti.

I fatti surriferiti si possono interpretare, secondo i concetti già sviluppati dallo Stefani (3), ammettendo: che i vasi sanguigni degli animali omotermi, alle basse temperature (0-15°) si trovino in uno stato di metabolismo torpido, latente, e che, elevando progressivamente la temperatura, il metabolismo si intensifichi progressivamente, con prevalenza dei processi anabolici, donde la progressiva espansione vasale; che questo progressivo aumento dell'attività metabolica, con prevalenza della anabolica, continui non solo fino alla temperatura del corpo, ma anche per qualche grado al di sopra; e che un

(1) *Dell'az. vasomot. refl. d. temp.*, Atti del R. Ist. Ven. di Sc., Lett. ed Arti, t. VI, ser. VII, 1894-95.

(2) *Az. d. temp. sui centri bulb. del cuore e dei vasi*, Atti del R. Istit. Ven. di Sc., Lett. ed Arti, t. VI, ser. VII, 1894-95.

(3) *Della irritabilità*, Atti del R. Istit. Ven. di Sc., Lett. ed Arti, t. LVIII, p. II, 1898-99; *Az. locale della stricnina sui vasi sang.*, Id., t. LXI, p. II, 1901-02.

aumento ulteriore della temperatura provochi invece una prevalenza dei processi catabolici, finchè presso ai 50° si stabilisce la morte dei vasi.

Nel chiudere questa Nota desidero esprimere viva riconoscenza al mio maestro, prof. Aristide Stefani, per il benevolo interessamento a queste esperienze per i consigli, dei quali ha voluto essermi largo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio GRASSI, relatore, a nome anche del Socio GOLGI, legge una relazione colla quale si propone la pubblicazione della Memoria: *Sui mitocondri e apparato reticolare interno delle cellule spermatiche e relative modificazioni durante la divisione cellulare*, del dott. A. PERRONCITO.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: NACCARI, BERLESE, GIGLIOLI, ISSEL, SILVESTRI, HOWARD DARWIN, LACROIX, PENCK; e quelle dei signori: prof. CALDERINI, ing. BORGNINI, DAMIANOVICH e HAYFORD. Fa inoltre particolare menzione di un volume contenente la relazione sulle Onoranze tributate al prof. LUIGI CREMONA, nel giugno del 1909.

Il Presidente BLASERNA, offre a nome dell'autore prof. E. HERRERO DUCLOUX dell'Università di La Plata, una raccolta di Memorie, dandone notizia.

Il Socio CAPELLINI fa omaggio di due sue Memorie a stampa: *Le Cicadee fossili del Museo di Bologna*; *Avanzi di una Balenottera nelle marne mioceniche dei dintorni di Ancona*, e ne discorre.

Il Socio CIAMICIAN presenta il 3° volume degli Atti della Società italiana per il progresso delle scienze, col resoconto dei lavori del Congresso che si tenne in Padova nell'ottobre dell'anno scorso, e dà notizia di quanto nel volume è contenuto, e particolarmente dei discorsi inaugurali e delle principali relazioni.

Il Segretario MILLOSEVICH fa vedere ai Colleghi tre diapositive ottenute all'Osservatorio Astro-Fisico di Catania riguardanti la cometa *1910 a* e espressamente inviate all'Accademia dal Direttore di quell'Osservatorio il Corrispondente prof. A. RICCÒ.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA comunica una cortese lettera colla quale S. A. S. il PRINCIPE DI MONACO invita l'Accademia a farsi rappresentare da un suo delegato alla inaugurazione del Museo Oceanografico in Monaco. La rappresentanza accademica viene affidata al Socio senatore B. GRASSI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 marzo 1910.

Borgnino C. — Cenni storico-critici sulle origini dell'industria dello zucchero in Italia. Bologna, 1910. 4°.

Damianovich H. — Estudio fisico-químico y bio-químico de las materias colorantes orgánicas artificiales. Buenos Aires, 1909. 8°.

Darwin G. H. — Figures of rotating liquid and geophysical Investigations. (Scientific Papers, vol. III). Cambridge, 1910. 4°.

Guerrini G. — Index parasitorum qui exstant in Instituto pathologico regiae Scholae sup. Medicinae veterinariae Mediolani. Bologna, 1909. 8°.

Guerrini G. — I neoplasmi dell'occhio negli animali. Nota statistica e bibliografica. (Estr. dalla rivista « Pathologica » an. I). Genova, 1909. 8°.

Guerrini G. — Note di casistica teratologica. (Syncephalus thoracopagus monoprosopus tribrachius (Taruffi) in un gatto). (Estr. dal giornale « La Clinica Veterinaria » anno 1909). Milano, 1909. 8°.

Guerrini G. — Primäres Sarkom der Kon junktiva beim Rinde. (Sonderab. aus « Der Tierarzt » 1909). Leipzig, 1909. 8°.

Guerrini G. — Su di un caso di « ciclops rhynchaenus » (Gurlt) osservato in un cane. (Estr. dal giornale « La Clinica Veterinaria » anno 1909). Milano, 1909. 8°.

Guerrini G. — Ueber einen Fall von Ren policysticus beim Kalbe: Beitrag zur Kenntnis der kongenitalen Missbildungen der Nieren. (Sonderabd. aus « Oesterr. Monatsschr. f. Tierheilkunde » XXXIV, n. 2). S. l. e d. 8°.

Herrero Ducloux E. — Aguas minerales alcalinas de la República Argentina. (Estr. de la « Revista del Museo de la Plata » Buenos Aires, 1907. 8°.

Herrero Ducloux E. — Datos calorimétricos de Mantecas Argentinas. La Plata, 1909. 8°.

Herrero Ducloux E. — El Hierro meteórico de la puerta de Arauco. (Estr. de la « Revista del Museo de la Plata » tom. XV). Buenos Aires, 1908. 8°.

Herrero Ducloux E., Outes F. — Estudio de la supuestas escorias y tierras cocidas de la serie pampeana de la República Argentina. (Estr. de la « Revista del Museo de La Plata » tom. XV). Buenos Aires, 1908. 8°.

Herrero Ducloux L. — Las aguas minerales de los valles de Hualfin y otros de la provincia de Catamarca. (Estr. de la « Revista de La Plata » tom. XVI). Buenos Aires, 1909.

Herrero Ducloux E. — Nota sobre algunos aceites de Oliva argentinos. La Plata, 1909. 8°.

Herrero Ducloux E. — Nota sobre el carbón de Salagasta. Museo de La Plata, 1907. 8°.

Herrero Ducloux E. — Nota sobre la Ceniza del volcan Rininahue. (Estr. de la « Revista del Museo de La Plata » tom. XV). Buenos Aires, 1908.

Issel A. — Alcuni risultati degli studî promossi dal Principe di Monaco sulle caverne ossifere dei Balzi Rossi. Roma, 1908. 8°.

Issel A. — Appunti paleontologici. IV. Descrizione di due denti di Elefante raccolti nella Liguria occidentale. (Estr. dagli « Annali del Mus. Civ. di St. Nat. di Genova » vol. XIV, 1879). Genova, 1879. 8°.

Issel A. — Caverne ossifere dei Balzi Rossi. (Estr. dal « Bullettino di paletnologia italiana » 1908). Parma, 1908. 8°.

Issel A. — Cavità rupestri simili alle cal-

daie dei giganti. (Estr. dagli « Atti della Società ligustica di scienze natur. e geograf. » vol. XVIII). Genova, 1907. 8°.

Issel A. — Cenni storici sul Gabinetto di Geologia della R. Università di Genova. (Estr. dagli « Atti della Società Ligustica di scienze natur. e geograf. » 1900). Genova, 1900. 8°.

Issel A. — Considerazioni supplementari intorno al terremoto umbro-marchigiano del 18 dec. 1897. (Estr. dal « Bollettino della Soc. sismologica ital. » vol. V). Modena, 1899. 8°.

Issel A. — Dei fossili recentemente raccolti nella caverna delle Fate (Finalge). (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Stor. Nat. di Genova » serie 2ª vol. IX, 1889). S. l. e d. 8°.

Issel A. — Della convenienza di promuovere l'esplorazione delle caverne d'Italia sotto l'aspetto della topografia, della idrografia sotterranea e della zoologia. (Estr. dal « Questionario del I Congresso Geograf. Ital. »). s. l. e. d. 8°.

Issel A. — Excursion géologique dans les environs de Gênes. Gênes, 1905. 8°.

Issel A. — Giovanni Marinelli geografo. (Estr. dagli « Atti della Società ligustica di scienze natur. » vol. XI). s. l. e d. 8°.

Issel A. — Il calcifiro fossilifero di Rovegno in Val di Trebbia. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia naturale di Genova » vol. IX). Genova, 1890. 8°.

Issel A. — Il concetto della direzione nei corsi di acqua. (Estr. dalla « Rivista geografica ital. » an. XIV). Firenze, 1907. 8°.

Issel A. — L'apprezzamento dei colori nelle scienze naturali. (Estr. dagli « Atti del Congresso dei Naturalisti ital. »). Milano, 1907. 8°.

Issel A. — La rotazione terrestre è per l'uomo fattore precipuo della distribuzione geografica. (Estr. dal « Bollettino della Società geografica ital. » 1910). Roma, 1910. 8°.

Issel A. — Le tremblement de terre du 23 février 1877, observé dans les tunnels de la Ligurie. (Extr. du « Bulletin de la Société Belge de géologie, de paléont. et d'hydrologie » t. I, 1887). Bruxelles, 1887. 8°.

Issel A. — Morfologia e genesi del mar Rosso. Saggio di paleogeografia. (Estr. dagli « Atti del III Congresso Geografico ital. »). Firenze, 1899. 8°.

Issel A. — Note spiccate. I. Valle del Penna. (Estr. dagli « Atti della Soc. ligustica di scienze nat. e geogr. »). Genova, 1900. 8°.

Issel A. — Note spiccate. II. Valle di Calizzano con appendice di G. Rovereto. (Estr. dagli « Atti della Soc. ligustica di scienze nat. e geogr. » anno XV). Genova, 1904. 8°.

Issel A. — Osservazioni da eseguirsi per presagire i parossismi vulcanici. (Estr. dalla rivista mensile di Sc. Nat. « Natura » vol. I). Pavia, 1909. 8°.

Issel A. — Osservazioni intorno alla frana del Corso Firenze in Genova. (Estr. dal « Giornale di geologia pratica » 1904). Perugia, 1904. 8°.

Issel A. — Recenti studî sulle rocce giadaitiche e nefritiche italiane. (Estr. dal « Bollettino di paletnologia italiana » vol. XXXIV). Parma, 1908. 8°.

Issel A, — Relitti. (Estr. dalla « Rivista ligure di scienze nat. e geogr. »). Genova, 1908. 8°.

Issel A. — Remarques sur les tremblements de terre subis par l'île de Zante pendant l'année 1893. Paris, 1894. 4°.

Issel A. — Saggio di un nuovo ordinamento sistematico degli alvei e delle rive marine. (Estr. dagli « Atti della Società ligustica di scienze nat. »). Genova, 1905. 8°.

Issel A. — Spallanzani nel Finale ligustico. Genova, 1899. 8°.

Issel A. — Terminologia geografica relativa alla configurazione orizzontale della terra emersa, al mare e alle profondità marine. Genova, 1904. 8°.

Issel A. — Torriglia e il suo territorio. (Estr. dal « Bollettino della Soc. geologica ital. » vol. XXV). Roma, 1906. 8°.

Issel A. — Un exemple de survivance préhistorique. (Extr. du « Compte rendu du XIII Congrès d'antropologie et d'archéologie préhistor. »). Monaco, 1907. 8°.

Kieffer I. I. — Cécidomyes parasites de Diaspis sur le Mûrier. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di zoologia gener. e agr. della R. Scuola Super. d'agricoltura di Portici » vol. IV, 1910). s. l. e d. 8°.

Lacroix A. — Sur l'existence à la Côte d'Ivoire d'une série pétrographique comparable à celle de la charnockite. (Extr. des « Comptes-rendus des séances de l'Acad. des Sciences » t. 150). Paris, 1910. 4°.

Onoranze al prof. Luigi Cremona. Roma, 1909. 8°.

Penck A., Brückner E. — Die Alpen in Eiszeitalter. B. I-III. Leipzig, 1909. 4°.

Penck A. — Die Entwicklung Europas seit der Tertiärzeit. (Sonderabd. aus den « Résultats scientifiques du Congrès internat. de Botanique »). Jena, 1906. 4°.

Penck A. — Die grossen Alpenseen. (Sonderabd. aus der « Geograph. Zeitschr. ». B. XI, H. 7). Leipzig, 1905. 4°.

Penck A. — Die interglazialen Seen von Salzburg. (Sonderabd. aus der « Zeitschrift f. Gletscherkunde » B. IV). Berlin, 1910. 8°.

Penck A. — Die Morphologie der Wüsten. (Sonderabd. aus der « Geographischen Zeitschr. » B. 15, H. 10) Leipzig, 1909. 8°.

Piolti G. — Sabbie della catena del Ruwenzori e della regione di Toro. (Estr. dal vol. II dell'opera « Il Ruwenzori », Relazioni scientifiche). s. l. e d. 8°.

Piotti G. — Sull'Oncopina di Variney. (Valle d'Aosta). (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. XLIV, 1909). Torino, 1909. 8°.

Poli Sergiacomi E. — Il Sole. Roma, 1910. 8°.

Russo A. — Le modificazioni sperimentali dell'ovaia nei mammiferi, e le cause dalla differenziazione del sesso. (Estr. della rivista mensile di Sc. Nat. « Natura », vol. I). Pavia, 1909. 8°.

Silvestri F. — Contribuzione alla conoscenza dei miriapodi dell' Uganda. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova » ser. 3ª, vol. IV). Genova, 1910. 8°.

Silvestri F. — Descrizioni preliminari di nuovi generi di diplopodi. (Sonderabd. aus dem « Zoologischen Anzeiger » XXXV, n. 12). Wien, 1910. 8°.

Verson E. — Se, allo stato inerte, gli stigmi del baco da seta debbano ritenersi aperti o chiusi. Nota. Venezia. 1910. 8°.

Vismara S. — Montecassino e il suo Osservatorio meteorico e geodinamico. (Estr. dalla « Riv. Storica Benedettina » anno V, 1910). Roma, 1910, 8°.

E. M.

CORRISPONDENZA

RENDICONTI — Marzo 1910.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 marzo 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

(Segue in terza pagina)

(*) Questa Nota verrà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 20 marzo 1910.* N. 6.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 *marzo* 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 6°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

// RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geologia. — *Il profilo geologico del Sempione. La grande Galleria.* III (Profilo 6) (¹). Nota del Socio Carlo De Stefani.

Passiamo ora al gran *tunnel*; ma premetto ch'io mi limito alla sola parte meridionale, che è la principale dal punto di vista geologico.

Abbiamo veduto che sulla destra della Cairasca il micascisto (n. 2) forma un anticlinale assai alto ed assai esteso; che nel lato S. E. gli strati di esso e quelli del sovrastante *gneiss* n. 3, vanno per gran tratto poco inclinati, cioè di 8 a 12° a S. O., o quasi orizzontali; che nel lato N. O. questi strati si alzano e s'incurvano molto di più; che talora vi sono delle forti pendenze sin di 45°, quantunque ordinariamente esse siano molto minori; che le pendenze scendono sempre abbassandosi verso la parte della galleria; che considerando i rapporti degli strati dei micascisti (n. 2) a destra ed a sinistra della Cairasca, si scorge come essi debbano pendere fortemente sotto la grande galleria; che talvolta, come sotto Oro del Vino sulla sinistra della Cairasca, vi sono anche delle pieghe e delle pendenze in senso contrario; che la massa del gneiss d'Antigorio n. 3 a N. E. è molto ridotta in dimensioni, cioè a circa 600 m.; che in quella parte gli strati sono molto pendenti verso N. O.; che a S. della foce della Cairasca il *gneiss* si estende ancora assai, quasi oriz-

(¹) Vedi *Il profilo geologico del Sempione*. I. *La Val Dévero* Profili 1, 2, 8. Rendiconti 1910, fasc. 3°, 1° sem., pag. 118. II. *Il Monte Cistella, la Valle della Cairasca e la galleria elicoidale di Varzo* Profili 3, 4, 5, 7. Rendiconti 1910,

zontale, lungo la Diveria, finchè, più verso il Toce, a contatto con le rocce più recenti (zona 4) a Campeglia, assume pendenze fortissime, e diventa quasi verticale.

Giudicando dall'esterno si sarebbe potuto dire soltanto che la Galleria del Sempione deve percorrere l'estrema unghia S. O. dell'ellissoide Cairasca-Devero-Toce; che deve traversare l'anticlinale dei Micascisti n. 2; che l'ala S. E. del *gneiss* d'Antigorio (n. 3) deve presentarsi in strati poco pendenti e per un tratto assai lungo; che l'ala N. O. degli stessi *gneiss* deve presentarsi in banchi assai più pendenti, alti circa 600 m. e per un tratto molto minore; che passata quest'ala minore dei *gneiss* (n. 3), debbono incontrarsi i Calcari, i Calceschisti, i Micascisti del Teggiolo e di Vallè, con una pendenza assai debole, fra 10 e 20° verso N. O.

Questa, in sostanza, e salvo leggere varianti, fu l'opinione di Heim, Renevier, Lory, Taramelli che poi non corrispose completamente ai fatti.

Qualora si fosse considerato che il limite superiore del *gneiss* d'Antigorio (n. 3) sulla sinistra di Val Divedro o valle della Cairasca scende dal M. Cistella verso il fondo della valle con angolo fino di 35°, si sarebbe potuto sospettare che, comportandosi in simil modo a S. O. dell'ellissoide, il Tunnel avrebbe traversato l'anticlinale *gneissico* ad un livello superiore ai Micascisti senza incontrare questi; così difatti è avvenuto.

La Cairasca abbandona le rocce calcaree e scistose della zona 4, entrando nel *gneiss* n. 3 alla quota di circa m. 1280 sul mare; esce dal *gneiss* per entrare nel Micascisto (n. 2) alla quota di circa m. 1170 e raggiunge di nuovo il *gneiss* solo all'entrata nella Diveria sotto m. 578. Dall'entrata nella zona scistosa n. 2 all'uscita da essa, sur una lunghezza in linea retta di m. 4500, scende di m. 592 almeno.

La grande galleria del Sempione, diretta da N. O. a S. E., è quasi perfettamente parallela alla Cairasca: trovasi distante circa 2600 m. dall'entrata della valle negli schisti della zona 2 e pochi metri meno dal punto ove cessa il parallelismo colla valle stessa sotto Fracchia. La galleria, che entra a Iselle a m. 634 ed esce a Briga a m. 686, entra più in alto della foce della Cairasca in Diveria; ma si mantiene poi sempre sotto al livello di questa, essendo più bassa di almeno 520 m. rispetto al punto nel quale la Cairasca passa dall'ala N. O. dell'anticlinale gneissico agli schisti n. 2.

Rispetto però agli affioramenti esterni più alti, nella vôlta dell'anticlinale, dei Micascisti n. 2 con gli *gneiss* n. 3, la galleria si accosta fin circa 1750 m. e corre rispettivamente circa m. 950 sotto l'affioramento più alto.

La bocca Sud della Galleria entra ad Iselle sulla Diveria, come dicevamo, a m. 634.

Nei primi tratti (fig.. 6) incontrò le rocce seguenti:

1°) *Gneiss* d'Antigorio ben caratteristico con rari banchi di Micaschisto per km. 4,325.

Fig. 6.

N, O,
S, E,
Punta Amoinciei
2705
Lago d'Avino
2234
2409
Vallè
1837
2231
Casalavera
Prof. 8
Chioso
820
T. Diveria
634
Lonino
Pizzo di Mezzodì
Pizzo d'Albiona
C. Marghino
R. del Lido
Bosco
503
Ferrovia
Agrami
F. Toce
Piano della Galleria
Aurona
Piana d'Avino
Gneiss di Antigorio
Micascisti e Calceschisti di Baceno
Spiegazione dei segni
Morene, frane, alluvioni
Gneiss schistosi di Monteleone
Calceschisti di Dèvero
Calcari e Anidriti di Teggiolo
Scala 1:100000
km

Il contatto Nord con la zona successiva ebbe luogo, all'infuori di ogni previsione, in seno diametralmente contrario a quello che dall'esterno si sarebbe e fù creduto, secondo un piano avente inclinazione di almeno 40° a S. E.

2°) Marmo biancastro, Cipollini, Calceschisti, Micaschisti, Schisti nodulosi verdastri, Anidrite con Flogopite e senza. Dal km. 4,325 al km. 5,326, quindi per km. 1,001.

Questa zona, nella molteplicità delle rocce incontrate, risponde perfettamente alla zona 4 del Pizzo Teggiolo, dell'Alpe Ciamporino, del Bondolero. Si potrebbe terminare la zona schistosa al km. 5,500, attribuendo alla medesima anche i 174 m. di Schisti micacei con noduli di *gneiss* compatto, granitoide come il *gneiss* d'Antigorio, che alcuni uniscono alla zona gneissica successiva. Infatti il passaggio fra queste varie zone è graduale. Il contatto fra questa zona 4 ed il *gneiss* sovrastante n. 5, ha luogo ancora con rovesciamento, cioè con una inclinazione di 40° circa a S. E. come il contatto inferiore col *gneiss* d'Antigorio.

Nell'incontro Sud con quest'ultimo, che è roccia impermeabile, si manifestarono abbondanti sorgive di acque provenienti dalla cresta del Pizzo Teggiolo a traverso i Calcari, l'Anidrite e il Gesso, materiali che dànno luogo agli stessi fenomeni di rigurgito delle acque come i calcari. Le acque erano più fredde dell'ambiente, quindi certamente provenienti dalla superficie, mentre se veramente, come si suppone, le rocce fossero state disposte a sinclinale più o meno profondo il livello piezometrico di queste acque sarebbe stato altissimo ed esse avrebbero rigurgitato dal fondo della galleria con violenza e con temperature altissime.

3°) *Gneiss* micaceo, sottilmente scistoso, di Vallè (n. 5), bene stratificato, dal km. 5,326 al km. 6,870, cioè per km. 1,544.

Il contatto Nord di questo *gneiss* coi sovrastanti Calceschisti pur della zona 4 avvenne secondo una superficie regolarmente inclinata a N. O. in conformità di quanto notasi alla superficie.

Questo *gneiss* è visibile all'esterno intorno a Vallè e lo si può seguire così a S. O. come verso N. E. fino all'Alpe Ciamporino. Le carte geologiche fanno continuare la zona ininterrottamente fino in Val Formazza a N. E. e tutto intorno all'ellissoide a S. O.: io non l'ho potuto osservare fra Goglio e Devero e sul Rio Bondolero, ne' cui Calceschisti, come altrove, sono frequenti ad ogni livello lenti e straterelli di micascisti feldspatici o gneissici. Così pure, dove la ho veduta, ho trovato indicata troppo estesa quella zona gneissica, a scapito delle altre rocce, lungo la destra della Diveria e lungo la sinistra del Toce.

4°) Dal km. 6,870 al km. 10,329 ritornano Calceschisti, Calcari, Anidriti, quelli dell'Alpe di Veglia, ancora appartenenti alla zona 4.

Questa zona 4 che nella galleria è costituita dai gruppi 2°, 3° e 4°, è altissima in tutto il lato N. O. dell'ellissoide del Sempione, mentre si riduce

a molto minore potenza nell'alto dell'ellissoide ed in tutto il suo lato S. E.

Nella carta svizzera non risaltano bene le corrispondenze degli strati, indicati quasi tutti, nel lato S. E., eccessivamente, come *gneiss*.

D'altra parte poi la zona del lato N. O. è indicata con la medesima tinta degli schisti lucenti i quali con grandissima potenza costeggiano tutta l'ala N. O. dell'ellissoide lungo il Rodano, ma che non dovrebbero essere confusi poichè hanno tipo diverso e vi si trovarono dei fossili giuresi e che inferiormente, secondo me rappresentano il Carbonifero ed il Paleozoico più antico.

5°) *Gneiss* scistosi anfibolici e granatiferi di Valgrande, di Monteleone e dell'Ofenhorn.

Dal punto di vista litologico le rocce incontrate nella Galleria rispondono perfettamente a quelle esterne. Il nucleo anticlinale dei Micascisti di Baceno e della Cairasca (n. 3) non fu incontrato, all'opposto di quanto si credeva.

Convien dire dunque che, come avviene in Val Devero, così a destra della Cairasca que' Micascisti si approfondino rapidamente sotto l'orizzonte e che da questo lato S. E. come da quello N. O. e come del resto, vedremo, dagli altri lati, l'ellissoide abbia risentito una forte compressione laterale, presso a poco in rispondenza al livello del mare. Fu traversata invece interamente la zona anticlinale sovrastante degli *gneiss* d'Antigorio (n. 3) quasi nella sua estrema unghia S. O.

Come già dicevo il piano di contatto degli *gneiss* d'Antigorio (n. 3) coi sovrastanti Calceschisti (n. 4) a quelle profondità fu trovato pendente a S. E.: in altri termini rovesciato rispetto alla disposizione che ha alla superficie. Questa inversione trovasi pure in tutta la zona dei Calceschisti successivi (n. 4) e solo va scomparendo negli *gneiss* scistosi micacei e nei Calceschisti più alti. Si vede che una compressione laterale più potente ancora si è manifestata nell'anticlinale anche in questa direzione ortogonale a quella constatata precedentemente.

Ignoriamo l'estensione in profondità e in ampiezza del rovesciamento nel contatto fra *gneiss* d'Antigorio e Calceschisti nell'interno del Sempione: però il fenomeno si trova con estensione assai maggiore visibile alla superficie nelle parti più esterne della ellissoide parallelamente al suo asse maggiore, cioè tanto verso Briga e il Rodano, quanto nella parte opposta, con direzione contraria, verso il Lago Maggiore.

Però lungo quel piano di contatto e nello stesso lato N. O. dell'ellissoide non manca indizio di fatti consimili anche alla superficie.

Già vedemmo la costa della Corona Teggiolo, poco più di 1500 m. a N. E. della Galleria lungo la Cairasca sulla sinistra del Riale formata da strati del *gneiss* d'Antigorio diventati quasi verticali (Prof. 4, 5), e son quelli stessi che a circa 500 m. di profondità sono incontrati dalla Galleria.

Più a N. E. ma sempre lungo la stessa ala N. O. dell'anticlinale, sul Rio Bondolero verso il Devero, il *gneiss* d'Antigorio si raddrizza alquanto in basso (Prof. 2), e la zona di Calceschisti (n. 4), che in fondo al Rio e a Goglio è assai ampia e con strati pendenti più ripidamente accosto al *gneiss* n. 3, più dolcemente in alto, nell'alto verso l'Alpe Bondolero si fa più ristretta.

Facendo una sezione verticale (Prof. 2) vi si vedrebbe in parte lo stesso andamento che i Calceschisti della medesima zona e gli *Gneiss* di Vallè inclusivi hanno nella Galleria fra i km. 4325 e 10329 dall'imbocco Sud.

In casi consimili la massima parte dei geologi avrebbe preveduto la possibilità di anomalie e di differenze negli strati interni del monte rispetto a quelli esterni: ma nemmeno il Gerlach, che pure aveva dato per la Val Devero uno spaccato simile a quelli adottati oggi da altri per il Sempione, suppose che un simile andamento di strati anche nell'interno del Sempione si verificasse. In realtà nell'inversione degli strati gneissici più esterni al nucleo anticlinale e nell'approfondarsi sotto la Galleria del nucleo de' Micascisti di Baceno (n. 2) non è nulla di tanto anormale che non sia spiegabile coi criterî comuni e spiccioli della geologia antica.

Complicate e tali da far credere, come fu detto, al fallimento della vecchia geologia, furono al contrario le ipotesi adottate, che poi servirono di base e di rinforzo alla teoria dei carreggiamenti.

Lo Schardt, fondandosi sul detto profilo del Gerlach per la Val Devero, propose nel 1894 anche per il Sempione un profilo che in sostanza risponde a quelli oggi adottati dai più.

Schardt, Schmidt, Lugeon, Preiswerk, seguiti da Stella, Novarese, Franchi, Termier, Steinmann, Suess, Taramelli e da altri, con unanime o quasi unanime consenso, e con leggere varianti dagli uni agli altri in punti secondarî, ritengono che gli *Gneiss* in tutte le loro varietà e zone apparentemente diverse costituiscano una roccia unica; che sieno la roccia più antica della regione e delle Alpi; che gli schisti cristallini o poco cristallini sovrastanti e intercalati agli *Gneiss* costituiscano parimente una zona unica più recente, ora metamorfosata, ora no; che i fenomeni orogenetici abbiano ridotto gli *Gneiss* in pieghe lunghissime, per molte diecine di kilometri non regolari o verticali ma sdraiate e stirate e sottili, più e più volte ripetute, e di nuovo ripiegate a loro volta in curve anticlinali e sinclinali, e le abbiamo sospinte da Sud, cioè da verso la pianura italica a Nord verso l'interno delle Alpi in mezzo alla zona schistosa ritenuta sovrastante; che per converso la zona schistosa sia spartita in altrettanto numerose ripieghe sdraiate, stirate e allungate da Nord verso Sud; che finalmente il Sempione sia costituito appunto da simili ondulazioni passanti alla superficie in molteplici pieghe sdraiate e stirate.

A favore di questa ipotesi, per questa regione, non sta altro indizio se

non quello dell'inversione degli strati del *Gneiss* d'Antigorio nell'interno della Galleria. Niun indizio favorevole è all'esterno; anzi tutti gli indizî sono contrarî.

Non si comprende come entro pieghe e ripieghe così supposte, così lontane dalla loro radice, conseguentemente fra ali così distanti, il *Gneiss* di Antigorio si presenti con tanta singolare uniformità; mentre in luoghi che avrebbero dovuto essere molto più vicini fra loro, però oggi, secondo le ipotesi, separati da rocce schistose differenti, si trovano altri *Gneiss*, i quali nella Carta Svizzera, e sebben meno in altre carte a più piccola scala, sono indicati bensì in molta parte con la stessa tinta di quello d'Antigorio, ma ne sono notevolmente diversi.

Dal punto di vista meccanico non si comprende come un movimento così intenso da ripiegare gli *Gneiss* in modo così straordinario abbia potuto agire così, superficialmente, senza produrre ondulazioni ampie e ripetute pieghe intercalate e regolari o verticali o sdraiate anche negli strati sottostanti alla supposta zona di carreggiamento. Mal si comprende come siffatte lunghissime pieghe sdraiate sieno poi state conformate, a lor volta, in ampî ed alti anticlinali regolari, corrosi poi dalla denudazione, aventi ogn' intorno le loro radici, profonde ed invisibili, nel sottosuolo; e mal si spiega come compressioni sì intense non abbiano prodotto, almeno negli schisti più plastici che vi furono soggetti, più innumerevoli pieghettature e rotture di quelle che pur si vedono in tutte le regioni turbate.

Nè si deve dimenticare, come già dicevo, che per grandissima estensione a N. O. e a S. E. dell'ellissoide del Sempione, così verso la Valle del Rodano, come dalla sinistra del Toce fin quasi al Lago Maggiore, gli strati esterni non sono pendenti come dovrebbero essere attorno ad un anticlinale regolare verso l'interno cioè verso la parte ove son dirette le supposte pieghe sdraiate, bensì sono pendenti proprio in senso contrario; sono cioè rovesciati all'esterno, dando luogo nell'insieme ad una vera e propria struttura a ventaglio della massa del Sempione e rendendo meno facile a supporsi un ritorno superficiale degli strati in pieghe lunghissime verso l'interno. Se la galleria del Sempione venisse prolungata a maggiore profondità, oltre la Diveria, fino al Toce, troverebbe, anche da quella parte, gli strati del *Gneiss* d'Antigorio rovesciati sopra la zona dei Calceschisti n. 4.

Nè le difficolà sono minori ove si consideri l'ipotesi dal punto di vista topografico e direi geometrico.

Fino a che si conduca lo spaccato della montagna lungo la linea della Galleria, si possono segnare il *Gneiss* e le altre rocce carreggiate come riunite da una parte o dall'altra alle rocce in posto. Ma anche ad altro spaccato avente direzione normale e traversante la Galleria elicoidale di Varzo si diede lo stesso significato, e poichè le rocce ogn' intorno all'ellissoide del Sempione hanno esternamente il medesimo andamento, bisogne-

rebbe costruire tutti gli spaccati nel medesimo modo, e si dovrebbe finire per istabilire una serie di pieghe irresolubili e per considerare il *Gneiss* di Antigorio della Val Divedro sopra la Galleria come un trovante isolato e senza radice da nessuna parte.

Dal punto di vista stratigrafico e tettonico si può osservare che le stratificazioni delle varie roccie gneissiche e schistose nei rispettivi piani di contatto sono concordanti e regolari e non sono estremamente pieghettate e replicatamente rotte; stanno cioè ben poco in armonia coi supposti intensissimi movimenti d'intrusione di una roccia nell'altra. Parimente se gli strati invece di essere uniformemente monoclinali e normalmente successivi gli uni agli altri, fossero plasmati come si suppone in pieghe anticlinali e sinclinali alternanti, si dovrebbero vedere, almeno in qualche luogo, se non sempre, la disposizione simmetrica degli strati, la cerniera e la curvatura di quelle pieghe, ciò che non si verifica.

Finalmente dal punto di vista litologico devesi affermare che, se pure non mancano analogie e talora identità fra gli schisti cristallini delle varie zone, invece fra gli *gneiss* sono assolute, generali e costanti differenze zona per zona; nè in sostanza vi hanno passaggi o commistioni di tipi i quali diano autorità a ritenere che si tratti di roccia formante un substrato unico.

Per tutte le ragioni predette non ci possiamo discostare dalla spiegazione più semplice da noi data; che cioè la Montagna del Sempione con le sue vicinanze è un anticlinale abbastanza regolare, nel quale le rocce interne di età diversa si sovrappongono normalmente le une alle altre, e quelle esterne son rovesciate a ventaglio.

Perciò torniamo a ripetere la serie delle roccie più antiche quale rimane per noi stabilita, dal basso a l'alto:

1. *Gneiss* di Crodo o Verampio;
2. Schisti cristallini di Baceno e di Varzo;
3. *Gneiss* d'Antigorio;
4. Calceschisti di Devero col *Gneiss* di Vallè incluso;
5. *Gneiss* di Monteleone.

Al diverso concetto sulla stratigrafia risponde il diverso modo d'intendere l'età di questi terreni.

Chi presta fede ai carreggiamenti attribuisce gli *Gneiss* al Precarbonifero, i calcari, i gessi, l'Anidrite che accompagnano gli schisti al Trias, e gli schisti al Secondario riunendoli col nome generico di Schisti di Bunden (*Bündner-Schichten*). Ciò in base a qualche raro fossile trovato in mezzo alle zone più esterne, nella Valle del Rodano o nei calcari veramente triassici più lontani. Però non un solo fossile sicuro è stato trovato nelle rocce dell'ellissoide del Sempione e nelle ellissoidi vicine; per la qual cosa le

sopra dette distinzioni cronologiche sono da considerare come affatto arbitrarie. Come transazione d'idee, se pur sia lecito farne in simili circostanze, ritenni io pure in addietro possibilmente triassici i Calcari e le Anidriti delle zone più cristalline: ma ora di tale transazione faccio ammenda.

Io ritengo ora che i terreni entroalpini predetti appartengano tutti a varie età del Prepaleozoico.

Certo negli ultimi tempi con le carte topografiche nuove lodevolmente precise almeno nel segnare il limite dei terreni, si sono fatti nelle Alpi Occidentali e nella stessa regione del Sempione rilevamenti geologici molto minuziosi e più accurati.

Ma l'età dei *Bündner Schiefer* quale si vede riprodotta nelle Carte Svizzere ed Italiane è ancora una età geologica mitica che ricorda l'età del *Macigno* nell'Appennino, cioè l'età nella quale tutti i terreni dell'Appennino erano insaccati col nome di *Macigno* e ritenuti antichi. Anche questo sotto varî punti di vista è piuttosto un regresso che un progresso.

Un attento studio comparativo con qualsiasi delle regioni confinanti assai fossilifere aprirà nuovi orizzonti alla determinazione cronologica dei terreni, e da ciò verranno avviate a nuova e più sicura via la stratigrafia e la geotettonica delle Alpi Occidentali.

Quanto alla regione del Sempione io l'ho trovata, per mio conto, ripeto, piuttosto semplice ed assai più regolare di tante e tante parti delle stesse Alpi Occidentali, di quelle Orientali e dell'Appennino.

Matematica. — *Sopra speciali trascendenti che si connettono colla teoria dei numeri.* Nota di Enrico Zondadari, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

In questa Nota mi propongo di studiare un prodotto infinito che rappresenta una funzione analitica dotata di particolari proprietà aritmetiche relativamente all'ordine di multiplicità delle sue radici e per mezzo della quale facilmente si costruisce un'altra funzione che dà, eguagliata a zero, un'equazione caratteristica dei numeri primi; questa seconda funzione presenta una certa analogia con le funzioni $k(x)$ e $K(x)$ date da von Koch nella Nota: *Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée* (Comptes rendus d. s. d. l'A. d. s., t. CXVIII, pag. 850, 1894) la qual Nota è riassunta con alcune modificazioni nella monografia del prof. Torelli *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato* (Napoli, 1901).

Tuttavia mi è sembrato non inutile far conoscere questa nuova equazione caratteristica dei numeri primi perchè, mentre le equazioni del von Koch ammettono oltre ai numeri primi anche radici non intere, l'equazione

da me ottenuta non ha in tutto il piano complesso altre radici che i numeri primi positivi e negativi. D'altra parte potrebbe essere che tanto questa equazione quanto la funzione rappresentata dal prodotto infinito suddetto, le quali nella forma attuale non hanno se mai altro che un valore teorico, possano tuttavia servire come punto di partenza per nuove ricerche che conducano a risultati di maggiore interesse per la teoria dei numeri e che presentino qualche utilità pratica nello studio dei numeri primi.

1. Consideriamo il prodotto infinito

$$(1)\qquad \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}}{\frac{\pi x}{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}}\ldots;$$

dimostreremo che esso converge assolutamente ed uniformemente entro qualunque cerchio di raggio grande a piacere col centro nell'origine e rappresenta una funzione analitica olomorfa le cui radici sono tutti e soli i numeri interi positivi e negativi (lo zero escluso) ciascuno con un grado di multiplicità uguale al numero dei suoi divisori compreso se stesso e l'unità.

Prendiamo infatti a considerare un cerchio C di raggio ϱ comunque grande ma determinato avente il centro nell'origine. Sia n_0 il più piccolo numero intero positivo per cui si ha $n_0 > \varrho$. Ogni fattore $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}}$ per $n \geq n_0$ e $|x| \leq \varrho$ sarà sempre diverso da zero; è inoltre soddisfatta la prima condizione $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} = 1$ necessaria per la convergenza del prodotto. Il prodotto infinito può dunque spezzarsi nel prodotto finito

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0-1}}{\frac{\pi x}{n_0-1}},$$

e nel prodotto infinito

$$(3)\qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0}}{\frac{\pi x}{n_0}}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0+1}}{\frac{\pi x}{n_0+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}}\cdot\ldots,$$

che ha tutti i suoi fattori finiti e diversi da zero entro C.

È noto che il prodotto infinito (3) convergerà assolutamente ed uniformemente nel cerchio C se ivi converge in egual grado la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} - 1 \right| , \qquad |x| \leq \varrho < n_0 .$$

Si ha ora identicamente

$$(4) \qquad \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} - 1 \right| = \sum_{n=n_0}^{\infty} \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} \right| .$$

Ma dallo sviluppo

$$\frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} = \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi x}{n} \right)^3 - \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi x}{n} \right)^5 + \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi x}{n} \right)^7 - \cdots$$

si trae che per $\left| \frac{\pi x}{n} \right|$ sufficientemente piccolo

$$(5) \qquad \left| \frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} \right| < \alpha \left| \frac{\pi x}{n} \right|^3 ,$$

essendo α un numero qualunque positivo maggiore di $\frac{1}{3!}$.

Fissato $\alpha > \frac{1}{3!}$ può dunque trovarsi un valore finito m_0 dell'indice n tale che per $n \geq m_0$ sia entro C sempre soddisfatta la (5). La serie

$$(6) \qquad \sum_{n=m_0}^{\infty} \alpha \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} \right|^3$$

avrà quindi i suoi termini maggiori dei termini corrispondenti della serie

$$\sum_{n=m_0}^{\infty} \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n} \right|$$

che si ottiene dalla (4) sopprimendovi un numero finito di termini.

Ma

$$\sum_{n=m_0}^{\infty} \alpha \left| \frac{n}{\pi x} \right| \left| \frac{\pi x}{n} \right|^3 = \alpha \pi^2 |x|^2 \sum_{n=m_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} ,$$

e poichè la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, tale è anche la (6) e quindi, per un noto teorema, la (4) converge uniformemente dentro C.

Poichè le espressioni $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} - 1$ rappresentano funzioni analitiche ad un sol valore qualunque sia n, si può affermare per noti teoremi che il prodotto infinito (3) rappresenta entro C una funzione analitica ad un sol valore che si manterrà ivi sempre finita e diversa da zero a causa della convergenza della (4).

Il prodotto completo

$$P(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \cdot \ldots$$

rappresenta dunque una funzione analitica olomorfa, la quale si annulla entro C per uno qualunque dei valori che annullano il prodotto finito $\operatorname{sen}\pi x \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0 - 1}$, eccezion fatta per $x = 0$ e solo per tali valori. La funzione $P(x)$ avrà dunque entro C una radice semplice per $x = \pm 1$, una radice doppia per x uguale ad un numero primo (positivo o negativo), una radice multipla d'ordine $\mu > 2$ per x uguale ad un numero composto (positivo o negativo) avente μ divisori compreso se stesso e l'unità, perchè facendo x uguale ad un intero k minore in valore assoluto di n_0 nel prodotto finito $\operatorname{sen}\pi x \,.\, \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2} \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi x}{n_0 - 1}$, si annullano semplicemente tutti e soli quei fattori $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}$ nei quali n divide esattamente k; per ogni altro valore di x ciascuno dei fattori $\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}$ e quindi il prodotto resta diverso da zero; per $x = 0$ avendosi $\lim_{x=0} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} = 1$, qualunque sia n, al prodotto infinito deve attribuirsi il valore 1. Poichè tutto ciò vale comunque grande sia stato assunto il raggio ϱ del cerchio C restano pienamente dimostrate la convergenza e le proprietà enunciate del prodotto infinito (1).

2. Per mezzo del prodotto infinito $P(x)$ possiamo ora costruire la funzione meromorfa

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 \pi x}{(\pi x)^3 (1 - x^2)^2} \cdot \frac{1}{P(x)}$$

ossia scrivendo per disteso e riducendo

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{(\pi x)^2 (1 - x^2)^2} \left\{ \frac{\pi x}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi x}{3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}} \cdots \frac{\pi x}{n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}} \cdots \right\}$$

avente per sole radici tutti i numeri primi positivi e negativi.

Infatti la funzione analitica definita dal quoziente

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \pi x}{(\pi x)^2 (1 - x^2)^2}$$

è uguale all'unità per $x = 0$, ha un valor finito diverso da zero per $x = \pm 1$, ha una radice doppia per ogni altro numero intero positivo o negativo, ed è diversa da zero e finita per qualsiasi altro valore finito della x; la funzione

$$Q(x) = \frac{\pi x}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi x}{3 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}} \cdots \frac{\pi x}{n \operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}} \cdots = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x} \frac{1}{P(x)}$$

è uguale all'unità per $x = 0$, ha un polo d'ordine $\mu - 1$ per ogni valore intero positivo e negativo della x diverso da ± 1 che ammette μ divisori compreso se stesso e l'unità, è diversa da zero e finita per $x = \pm 1$, come si deduce immediatamente dalle proprietà studiate della funzione $P(x)$. Poichè dunque soltanto per x uguale ad un numero primo la funzione $Q(x)$ ha un polo del primo ordine, resta dimostrato che la funzione $g(x)$ ha le proprietà sopra enunciate e ci fornisce quindi, uguagliata a zero, una equazione caratteristica dei numeri primi.

3. Per noti teoremi è facile riconoscere che il prodotto infinito $P(x)$ può derivarsi colla regola ordinaria di derivazione dei prodotti. Eseguendo i calcoli si ottiene per la derivata di $P(x)$ l'espressione

$$P'(x) = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{n}}{\frac{\pi x}{n}} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} \right) \right].$$

Dal teorema di Cauchy sui residui si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{P'(x)}{P(x)} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{n} \cot \frac{\pi x}{n} - \frac{1}{x} \right) \right] dx = M ,$$

essendo M la somma dei numeri μ che rappresentano quanti divisori ha ogni numero intero positivo e negativo contenuto entro un cerchio C col

centro nell'origine e lungo la circonferenza γ del quale si intende fatta l'integrazione.

Se consideriamo un numero qualunque p intero positivo avente μ divisori e due cerchi C_1 e C_2 di raggio ϱ_1 e ϱ_2 rispettivamente, col centro nell'origine e tali che si abbia

$$p-1<\varrho_1<p \quad , \quad p<\varrho_2<p+1 \, ,$$

avremo (poichè nella corona circolare compresa fra le circonferenze γ_1 e γ_2 di C_1 e C_2 cadono le radici p e $-p$ di $P(x)$)

$$\mu=\frac{1}{4\pi i}\left\{\int_{\gamma_2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx-\right.$$
$$\left.-\int_{\gamma_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx\right\}.$$

Se C_3 è un cerchio di raggio $\varrho_3<1$ avente il centro nel punto indice del numero p avremo

$$\mu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx \, .$$

In particolare per p primo avremo le formole

$$\frac{1}{4\pi i}\left\{\int_{\gamma_2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx-\int_{\gamma_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx\right\}=2$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-\frac{1}{x}\right)\right]dx=2 \, .$$

Le funzioni $P(x)$ e $g(x)$ possono mettersi sotto altre forme valendosi della funzione Γ di Eulero e dello sviluppo del seno in prodotto infinito. Inoltre se ci proponiamo di sviluppare la funzione $P(x)$ in serie di potenze intere e positive di πx, troviamo calcolando i primi coefficienti che essi si esprimono in funzione delle somme σ_{2t} delle serie

$$\sigma_{2t}=1+\frac{1}{2^{2t}}+\frac{1}{3^{2t}}+\cdots+\frac{1}{n^{2t}}+\cdots; \qquad (t=1,2,3,\ldots,m,\ldots)$$

queste somme possono calcolarsi come è noto colla formula

$$\sigma_{2t}=(-1)^{t-1}\frac{2^{2t-1}B_{2t}\,\pi^{2t}}{1.2.3.\ldots.2t}$$

ove le B_{2t} sono i numeri bernoulliani d'indice pari. Ma noi non possiamo ora trattenerci su questo.

Matematica. — *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali.* Nota di Umberto Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri nello spazio una congruenza rettilinea, e si indichino con $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ i coseni direttori del generico raggio r passante pel punto (x, y, z). La congruenza sia tale che in ogni punto, del campo che si considera, sia verificata la condizione

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad (1)$$ [1].

Essa dà luogo alla seguente interpretazione geometrica.

Preso a considerare un tubo infinitamente sottile, costituito da rette della congruenza, lunghesso si mantiene costante l'area della sezione normale. Profittando di una denominazione, notoriamente usata in questioni fisico-matematiche, chiameremo una tale congruenza *solenoidale*.

Mi propongo di far vedere in una prossima Nota come l'intervento di congruenze rettilinee solenoidali si renda necessario in una certa questione idrodinamica. Per ora mi basta di caratterizzarle geometricamente. Ecco il risultato cui si è in definitiva condotti.

Assunta ad arbitrio, nello spazio, una linea si prenda a considerare il fascio de' suoi piani osculatori e sopra ciascuno d'essi il sistema delle parallele alla rispettiva tangente. Un così fatto sistema di rette costituisce una congruenza rettilinea solenoidale; reciprocamente qualsiasi congruenza rettilinea solenoidale si può risguardare generata in tal guisa.

1. Vediamo anzitutto di caratterizzare analiticamente la questione.

Sia σ una superficie che taglia (in un intorno generico) l'intero sistema di rette della congruenza. Riferiti i punti della superficie ad un sistema di coordinate curvilinee (u, v), la congruenza rimane definita, com'è ben noto [2], esprimendo in funzione di u, v le coordinate x, y, z dei punti di σ ed i coseni direttori X, Y, Z delle rette della congruenza. Si ammette che le sei funzioni x, y, z ; X, Y, Z di u, v sieno finite e continue assieme alle loro derivate parziali.

Diciamo O il punto di incontro della generica retta r con σ; allora se t rappresenta l'ascissa di un punto P di r, contata sul raggio stesso a

[1] Conveniamo di attribuire al simbolo Σ, senz'altra designazione, il significato di somma rispetto alle lettere.

[2] Cfr. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa, Spoerri, 1902), vol. I, pp. 297-298.

partire dal punto O, avremo per le coordinate di P le espressioni seguenti:

$$x + tX \; , \; y + tY \; , \; z + tZ \,. \tag{2}$$

Qualora si risguardi la t come funzione assegnata delle variabili u, v le (2) stesse definiscono, sotto forma parametrica, una superficie τ.

Posto

$$\left\{\begin{aligned} a_{11} &= \sum \left\{ \frac{\partial(x+tX)}{\partial u} \right\}^2 , \\ a_{22} &= \sum \left\{ \frac{\partial(x+tX)}{\partial v} \right\}^2 , \\ a_{12} &= \sum \left\{ \frac{\partial(x+tX)}{\partial u} \cdot \frac{\partial(x+tX)}{\partial v} \right\} , \end{aligned}\right. \tag{3}$$

e

$$a = a_{11}\, a_{22} - a_{12}^2 \,, \tag{4}$$

a è il discriminante della forma differenziale quadratica che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della superficie τ.

Per l'elemento d'area si ha

$$d\tau = \sqrt{a}\, du\, dv \,. \tag{5}$$

Ciò posto, vediamo di introdurre la condizione (1), caratteristica per le congruenze solenoidali.

Scelto sopra τ un contorno chiuso C, i raggi della congruenza spiccati dai diversi punti di questo contorno formano un *tubo* (tubo di forza nel caso in cui i raggi della congruenza fossero linee di forza). Immaginiamo che il tubo abbia una sezione infinitamente piccola e sia $d\tau$ la porzione di superficie τ staccata dal tubo infinitesimo; se α, β, γ designano i coseni direttori della normale a $d\tau$ (presa in un verso determinato), la condizione (1) equivale (come abbiamo già accennato) alla [1]

$$(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)\, d\tau = \text{costante} \tag{6}$$

lungo ogni tubo infinitamente sottile.

Per le (2), tenuto conto delle (3) e della (4), α, β, γ coincidono rispettivamente coi minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial u} & \dfrac{\partial(y+tY)}{\partial u} & \dfrac{\partial(z+tZ)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial(x+tX)}{\partial v} & \dfrac{\partial(y+tY)}{\partial v} & \dfrac{\partial(z+tZ)}{\partial v} \end{matrix} \right\| ,$$

[1] Cfr. ad es. Appell, *Traité de mécanique rationnelle* (Paris, Gauthier-Villass, 1909), t. III, pp. 39-40.

moltiplicati per $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Per ciò e per la (5), possiamo dire che il primo membro della (6) coincide col prodotto per *du dv* del determinante

$$D = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial(x+tX)}{\partial u} & \frac{\partial(y+tY)}{\partial u} & \frac{\partial(z+tZ)}{\partial u} \\ \frac{\partial(x+tX)}{\partial v} & \frac{\partial(y+tY)}{\partial v} & \frac{\partial(z+tZ)}{\partial v} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial x}{\partial u}+t\frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}+t\frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}+t\frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}+t\frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}+t\frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}+t\frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Pertanto la (6) equivale alla condizione seguente:

$$\frac{dD}{dt} = 0, \text{ per qualunque } t. \tag{7}$$

In particolare, essendo D funzione di secondo grado in t, si esige che sia nullo il coefficiente di t^2, cioe il determinante

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo il quadrato per righe del determinante a primo membro, e tenendo presenti le $\sum X^2 = 1$, $\sum X \frac{\partial X}{\partial u} = \sum X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$, la precedente diviene

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Scende da questa che sono nulli tutti i minori di second'ordine della matrice funzionale di X, Y, Z rispetto alle u, v. Ciò implica che la caratteristica di detta matrice dev'essere minore di due, e che quindi *le funzioni* X, Y, Z *dipendono da un solo parametro, poniamo ad es.* u.

Non ci occuperemo ulteriormente della condizione (7), essendo più conveniente riprendere a questo punto la questione per via diretta, sbarazzandoci dell'ausiliaria superficie σ.

2. Consideriamo adunque i coseni direttori X , Y , Z come funzioni dei punti (x, y, z) dello spazio, pel tramite — s' intende — del parametro u.

La congruenza

$$\frac{dx}{ds} = X \quad , \quad \frac{dy}{ds} = Y \quad , \quad \frac{dz}{ds} = Z \tag{8}$$

(in cui si designa con ds l'elemento d'arco) sarà rettilinea, purchè i coseni X , Y , Z conservino valore costante sopra le singole curve (8), sia cioè

$$\frac{dX}{ds} = \frac{dY}{ds} = \frac{dZ}{ds} = X' \frac{du}{ds} = Y' \frac{du}{ds} = Z' \frac{du}{ds} = 0 ,$$

avendo indicato con un apice la derivazione rispetto ad u. Se si esclude che tutte le X′ , Y′ , Z′ sieno nulle (nel qual caso la congruenza sarebbe costituita da rette parallele) le precedenti dànno, tenendo presenti anche le (8), la relazione

$$\frac{du}{ds} = \sum X \frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{9}$$

La (1) diviene

$$\sum X' \frac{\partial u}{\partial x} = 0 . \tag{10}$$

Se alle relazioni (9) e (10) si aggiunge la $\sum X^2 = 1$, che ci dà in particolare

$$\sum XX' = 0 , \tag{11}$$

avremo considerate *tutte le condizioni che caratterizzano nello spazio una congruenza rettilinea solenoidale.*

Da esse risulta che *le superficie* $u(x, y, z) =$ *costante, non possono essere che piani, ciascuno dei quali contiene le due direzioni ortogonali* (X , Y , Z) *e* (X′ , Y′ , Z′).

Sia perciò

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \tag{12}$$

dove A , B , C , D sono funzioni arbitrarie del parametro u, l'equazione che definisce, nel modo più generale, il sistema di piani $u =$ costante.

Osservando che i coseni direttori delle normali a questi piani sono proporzionali tanto a $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, quanto ad A , B , C , le (9) e (10) divengono rispettivamente

$$\sum AX = 0 , \tag{9'}$$

e

$$\sum AX' = 0 ;$$

la quale ultima, essendo per la (9′) $\sum AX' = \sum A'X$, può venire sostituita dalla seguente:

$$\sum A'X = 0 . \tag{10'}$$

Ciò posto dalle (9′) e (10′) risulta che X , Y , Z sono proporzionali ai minori di second'ordine della matrice

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

i quali alla loro volta (atteso l'accennato significato di A , B , C) sono proporzionali ai coseni direttori della tangente allo spigolo di regresso della rigata inviluppata dal sistema semplicemente infinito dei piani $u =$ costante. Pertanto le direzioni X , Y , Z giacenti in detti piani sono parallele alle generatrici della rigata.

Reciprocamente è ben chiaro che, assegnata una curva nello spazio e preso a considerare il sistema de' suoi piani osculatori e su questi il sistema delle rette parallele alle rispettive tangenti alla curva, sono soddisfatte tutte le condizioni che caratterizzano una congruenza rettilinea solenoidale.

Chimica. — *Sulla natura dei cosidetti sali doppî fra caffeina e sali alcalini* [1]. Nota di GIOVANNI PELLINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

La solubilità della caffeina nell'acqua alla temperatura ordinaria non è molto grande: aumenta considerevolmente quando la caffeina viene aggiunta a certe soluzioni saline, specialmente sali alcalini di acidi organici, benzoato di sodio, benzoato di litio, salicilato di sodio, e inoltre bromuro sodico e potassico, joduro potassico ecc. Vengono perciò messi in commercio dei prodotti ottenuti sciogliendo la caffeina nelle soluzioni acquose concentrate dei sali alcalini ed evaporando di poi a secco a mite calore. Sono usati in medicina, specialmente per uso ipodermico, in causa della grande solubilità nell'acqua.

Nella letteratura chimico-farmaceutica tali prodotti passano sotto il nome di sali doppî, benchè appaia dubbio che si possano ritenere tali nel vero significato chimico. I rapporti secondo i quali vengono fatti reagire la caffeina ed i sali alcalini, rispondono più ad un criterio di massima solubilità, di azione terapeutica, di aspetto fisico (benzoato di litio e caffeina) [2] che non ad un criterio di costituzione chimica.

Allo stato solido questi cosidetti sali doppî cedono facilmente e completamente la caffeina ad un solvente opportuno, il cloroformio; e così pure

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Chem. Central-Blatt, 1908, II, 121.

la caffeina può venire estratta dalle soluzioni acquose. Questo comportamento non prova però affatto che si tratti di semplici miscugli, essendo ben noto che per es. i polioduri alcalini sono dei veri e propri composti sebbene mediante il benzolo si possa grado grado demolire la complessità della molecola estraendo lo iodio [1]. Lo iodio, il bromo, il cloro sciolti negl' ioduri e bromuri alcalini o nei rispettivi idracidi formano ioni complessi I'_3, Br'_3 Cl'_3, e tuttavia possono venire estratti con cloroformio, solfuro di carbonio ecc. [2]. L'acido borico e l'ossalico formano in soluzione un acido complesso borossalico, sebbene le reazioni analitiche dei singoli acidi non siano per nulla influenzate [3].

Io mi sono proposto di definire la loro costituzione tanto allo stato solido quanto in soluzione. La presente Nota riguarda soltanto la prima parte del problema perchè è quella che presenta nella pratica farmaceutica il maggior interesse. Come esempio ho scelto uno dei prodotti maggiormente in uso, il *benzoato di sodio e caffeina* che si prepara secondo la Farmacopea ufficiale italiana evaporando a secco a bagno maria una soluzione di 50 p. di caffeina e 59 p. di benzoato sodico in 200 p. di acqua. Queste proporzioni corrispondono al rapporto di una molecola di caffeina anidra per 1,59 molecole di benzoato sodico anidro, oppure di una molecola di caffeina idrata ($C_8H_{10}N_4O_2 + H_2O$) per 1,54 molecole di benzoato sodico idrato ($C_6H_5COONa + H_2O$).

Uno dei mezzi migliori per il riconoscimento della esistenza di sali doppî è quello di studiare le variazioni di solubilità di uno dei componenti, p. es. la caffeina, per aggiunta successiva dell'altro componente, il benzoato sodico, ad una temperatura costante: cioè di determinare delle isoterme di solubilità. Era noto qualitativamente che la caffeina aumentava la sua solubilità nell'acqua per aggiunta di benzoato sodico: era interessante studiare il fenomeno dal lato quantitativo.

Le soluzioni si preparano in maniera tale che alla temperatura voluta si abbia sempre un piccolo deposito solido al fondo. Nel mio caso le diverse soluzioni vennero poste in termostato a 25° per una prima serie di esperienze, a 40° per una seconda serie, ed agitate per molti giorni in modo da stabilire un perfetto equilibrio tra la fase solida e la liquida.

L'esame della soluzione venne eseguito prelevando una certa quantità di liquido che venne pesata poi evaporata a secco e mantenuta a 110° fino a costanza di peso. In tal modo era nota la quantità totale di caffeina e ben-

[1] R. Abegg e A. Hamburger, Zeit. anorg. Chemie, *50*, 403 (1906).

[2] Paternò e Peratoner, Gazz. chim. ital., *21*, I, pag. 110 (1891); Paternò e Oliveri, Rend. Soc. chimica di Roma, V, 211; Leblanc e Noyes, Zeit. phys. Chemie, *6*, 401 (1890); A. Iakowkin, Zeit. phys. Chemie *13*, 539 (1894); *20*, 19 (1896); Noyes e e Seidensticker, ibidem, *27*, 366 (1898); Osaka, ibidem, *38*, 743 (1901); Wildermann, ibidem, *11*, 407 (1893); Boericke, Z. Elektrochemie, 11, 57 (1905).

[3] W. Herz, Z. anorg. Chemie. *66*, 93 (1910).

zoato sodico allo stato anidro sciolta in un peso noto di acqua. Per mezzo di estrazioni ripetute con cloroformio si determinava la quantità di caffeina pesando il residuo dato dalla evaporazione del cloroformio: per differenza si conosceva la quantità di benzoato sodico. Contemporaneamente si procedeva all'esame della composizione dei cristalli deposti dalla soluzione.

Nelle tabelle seguenti sono contenuti i dati analitici.

$t = 25°$

Numero delle esperienze	100 gr. di acqua sciolgono		100 gr. di acqua sciolgono		NATURA DEI CRISTALLI
	$C_8H_{10}N_4O_2$ grammi	C_6H_5COONa grammi	$C_8H_{10}N_4O_2$ grammi molecole	C_6H_5COONa grammi molecole	
1	2,1322	—	0,01098	—	$C_8H_{10}N_4O_2 + H_2O$
2	8,321	6,667	0,04286	0,04626	"
3	30,145	31,880	0,15527	0,22124	"
4	38,104	45,004	0,19627	0,31232	"
5	44,828	58,554	0,2309	0,40635	"
6	51,739	76,747	0,2665	0,5326	$(C_8H_{10}N_4O_2 + H_2O) + (C_6H_5COONa + H_2O)$
7	46,273	76,683	0,23835	0,53216	$C_6H_5COONa + H_2O$
8	24,794	69,560	0,12771	0,48272	"
9	9,4754	62,970	0,04880	0,4370	"
10	—	61,170	—	0,4245	"

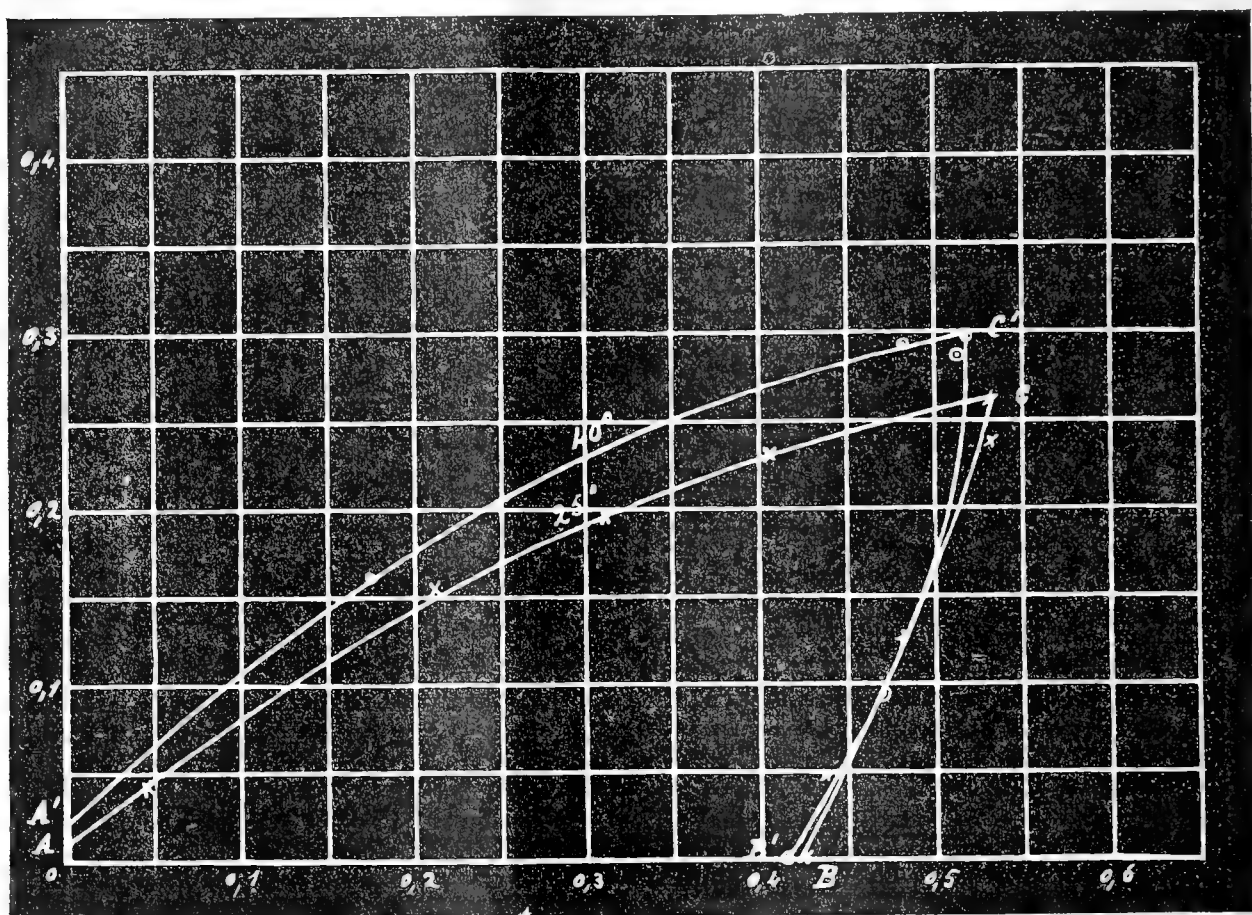
$t = 40°$

Numero delle esperienze	100 gr. di acqua sciolgono		100 gr. di acqua sciolgono		NATURA DEI CRISTALLI
	$C_8H_{10}N_4O_2$ grammi	C_6H_5COONa grammi	$C_8H_{10}N_4O_2$ grammi molecole	C_6H_5COONa grammi molecole	
1	4,6426	—	0,02391	—	$C_8H_{10}N_4O_2 + H_2O$
2	31,430	25,313	0,1619	0,17566	"
3	56,821	69,677	0,2927	0,48353	"
4	57,991	74,645	0,2987	0,5180	$(C_8H_{10}N_4O_2 + H_2O) + (C_6H_5COONa + H_2O)$
5	55,984	74,024	0,28837	0,5137	$C_6H_5COONa + H_2O$
6	18,309	67,970	0,09429	0,4717	"
7	—	59,816	—	0,4151	"

Nella figura qui unita sono disegnate le curve di solubilità della caffeina e benzoato sodico. Sulle ordinate sono riportate le quantità di caffeina espresse

in gr. molecole, sulle ascisse le quantità gr. molecolari di benzoato sodico nella stessa quantità di solvente, 100 gr. di acqua.

Come si vede, la solubilità della caffeina aumenta considerevolmente per aggiunta di benzoato, ed aumenta pure la solubilità del benzoato per aggiunta di caffeina per quanto in grado minore. Alla temperatura di 25° la curva AC indica la variazione della composizione della soluzione in equi-

librio con il componente solido, caffeina con una molecola di acqua di cristallizzazione; la curva CB rappresenta la variazione della composizione della soluzione in equilibrio con il componente solido, benzoato sodico cristallizzato con una molecola di acqua; C è un punto multiplo e corrisponde all'equilibrio fra la soluzione ed i due componenti solidi, caffeina e benzoato. La composizione della soluzione in C non varia per aggiunta di uno o entrambi i componenti, oppure non varia per aggiunta di acqua fino a che non scompare per soluzione uno dei componenti.

Dato questo comportamento, si deve perciò concludere che nelle condizioni sperimentali la caffeina ed il benzoato sodico non dànno luogo alla formazione di nessun composto doppio che si separi allo stato solido. Il pro-

dotto che si impiega in farmacia è dunque, allo stato solido, un semplice miscuglio.

Analogamente si deve interpretare l'isoterma A′C′B′ a 40°. La solubilità della caffeina pura aumenta col crescere della temperatura, quella del benzoato sodico diminuisce leggermente [1]. Questa seconda isoterma dimostra che anche a temperatura elevata, cioè in condizioni che si accostano a quelle di preparazione tecnica di tali prodotti farmaceutici, non si separa sale doppio.

Appare perciò verosimile che preparando il prodotto *benzoato di sodio e caffeina* nella forma prescritta dalla Farmacopea ufficiale, oppure mescolando semplicemente nelle proporzioni indicate le due sostanze, si avrà in definitiva lo stesso risultato riguardo alle sue proprietà, soltanto che lo stato di miscela più omogenea e lo stato superficiale del prodotto preparato secondo la Farmacopea, può avere influenza non già sul risultato finale della solubilità, bensì sulla velocità di soluzione; il che può presentare un certo vantaggio nella pratica farmaceutica.

Naturalmente le conclusioni ora tratte possono riferirsi solo alla non esistenza di composti d'addizione allo stato solido; esse non possono far escludere che nelle soluzioni acquose, e cioè nelle condizioni in cui il preparato viene effettivamente somministrato, non esistano complessi più o meno stabili. Ciò appare anche *a priori* assai verosimile, poichè l'aumento reciproco di solubilità sta appunto ad indicare la formazione di un complesso.

Per risolvere tale lato della questione ho intrapreso ricerche crioscopiche i cui risultati verranno pubblicati in una prossima Nota.

Altre ricerche ho pure in corso sul comportamento di altri sali alcalini.

Chimica — *Sulla esistenza di complessi fra caffeina e benzoato sodico in soluzione* [2]. Nota di Giovanni Pellini e Mario Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una prima Nota [3] sullo stesso argomento, uno di noi ha dimostrato che il prodotto farmaceutico « Benzoato di sodio e caffeina » è, allo stato sodico, sicuramente un miscuglio dei due componenti, il benzoato sodico e la caffeina. Ciò è messo in evidenza dalle curve di solubilità a 25° e 40°; si vede inoltre che tanto la caffeina che il benzoato sodico aumentano reciprocamente la loro solubilità, il che è da attribuirsi alla formazione di composti complessi in soluzione.

[1] Non erano state finora eseguite delle determinazioni di solubilità del benzoato sodico in acqua. Ora si conosce il dato di solubilità a 25° e a 40°.

[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova.

[3] Questi Rendiconti, fasc. 6°, pag. 329, 1° sem. 1910,

Sono infatti noti nella letteratura chimica diversi esempî dimostranti che gli aumenti di solubilità di una sostanza in presenza di un'altra debbano attribuirsi ad una avvenuta combinazione chimica.

Nel caso nostro era interessante di accertare per altra via la formazione di tale complesso e possibilmente di determinarne la sua composizione. Per questo scopo si prestano le misure di conduttività elettrica o, meglio ancora, la determinazione dei punti di congelamento. In seguito ad una reazione chimica le soluzioni di miscela non debbono presentare rapporti di addittività, ma scostarsi da essi più o meno a seconda del grado di stabilità del complesso originatosi [1].

Le nostre ricerche si riferiscono alle determinazioni della variazione del punto di congelamento delle soluzioni a concentrazione fissa di benzoato sodico, per aggiunta di quantità crescenti di caffeina, fino al limite di solubilità di questa sostanza. La ricerca inversa non si presta bene allo scopo, a cagione della piccola solubilità della caffeina pura in acqua, e dei conseguenti abbassamenti termometrici troppo piccoli.

La caffeina pura in acqua possiede peso molecolare semplice; tenuto però conto delle deviazioni dal calcolato, per aver dovuto impiegare soluzioni che sono vicine al limite di solubilità e degli abbassamenti termometrici molto piccoli. Il benzoato sodico invece è dissociato completamente in soluzione acquosa ($\alpha = 1$), anzi un po' idrolizzato.

Caffeina in acqua ($C_8H_{10}N_4O_2 = 194$):

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)
0,724	0,055	243,5
0,867	0,065	246,6
1,010	0,07	266,9

Benzoato sodico in acqua ($C_7H_5O_2Na = 144$):

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)
0,574	0.150	70,8
0,820	0.215	70,5
1,054	0,280	69,6
1,388	0,365	70,3
2,030	0,530	70,8
3,077	0,810	70,2
3,481	0,890	72,3
4,947	1,280	71,4
5,155	1,310	72,8

[1] Paternò e Peratoner, Gazz. chimica italiana, *21*, I, pag. 110 (1891); Paternò e Oliveri, Rend. Soc. chimica di Roma, anno V, pag. 211; Leblanc e Noyes, Zeit. phys. Chem., *6*, 401 (1890).

Caffeina in soluzione acquosa di benzoato sodico.

1. Concentrazione del benzoato in acqua 0,574. Abbass. term. 0,15:

Concentrazione della caffeina in 100 gr. d'acqua	Concentrazione gr. molec. della caffeina per 1 gr. molec. di benzoato	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 194$
C	C_m	Δ	Δ_1
0,380	0,490	0,020	0,036
0,773	0,997	0,035	0,073
1,063	1,371	0,040	0,101
1,378	1,779	0,060	0,131
1,676 la caffeina non si scioglie completamente.	2,165	0,065	—

2. Concentrazione del benzoato in acqua 0,820. Abb. term. 0,215:

C	C_m	Δ	Δ_1
0,401	0,362	0,020	0,038
1,064	0,962	0,045	0,101
1,335	1,207	0,045	0,127
1,711	1,547	0,060	0,163
1,983 la caffeina non si scioglie completamente.	1,793	0,070	—

3. Concentrazione del benzoato in acqua 1,054. Abb. term. 0,28:

C	C_m	Δ	Δ_1
0,320	0,224	0,015	0,030
0,799	0,562	0,030	0,076
1,376	0,968	0,045	0,131
1,694	1,192	0,050	0,161
1,992	1,402	0,050	0,190
2,245 la caffeina non si scioglie completamente.	1,579	0,050	—

4. Concentrazione del benzoato in acqua 1,388. Abb. term. 0,365:

C	C_m	Δ	Δ_1
0,929	0,496	0,030	0,088
1,362	0,727	0,040	0,129
1,847	0,986	0,050	0,176
2,118	1,131	0,050	0,201
2,381	1,271	0,050	0,227
2,694 la caffeina non si scioglie completamente.	1,438	0,050	—

5. Concentrazione del benzoato in acqua 2,030, Abb. term. 0,53:

C		C_m	Δ	Δ_1
0,750		0,273	0,010	0,071
1,372		0,501	0,020	0,130
2,169		0,792	0,035	0,206
2,481		0,906	0,035	0,236
2,811	la caffeina non si scioglie completamente.	1,027	0,035	—

6. Concentrazione del benzoato in acqua 3,077. Abb. tem. 0,81:

C		C_m	Δ	Δ_1
0,970		0,233	0,000	0,092
2,427		0,584	0,005	0,231
3,123		0,730	0,005	0,288
3,559		0,855	0,010	0,339
4,141	la caffeina non si scioglie completamente.	0,998	0,010	—

7. Concentrazione del benzoato in acqua 3,481. Abb. term. 0,89:

C		C_m	Δ	Δ_1
1,114		0,238	0,00	0,106
2,375		0,506	0,00	0,226
3,938	la caffeina non si scioglie completamente.	0,839	0,00	—

8. Concentrazione del benzoato in acqua 4,947. Abb. term. 1,28:

C		C_m	Δ	Δ_1
1,039		0,158	— 0,015	0,099
2,173		0,324	— 0,045	0,206
3,359		0,504	— 0,05	0,320
4,733		0,710	— 0,05	0,451
5,697	la caffeina non si scioglie completamente.	0,853	— 0,05	—

9. Concentrazione del benzoato in acqua 5,155. Abb. term. 1,31:

C		C_m	Δ	Δ_1
0,501		0,072	— 0,005	0,047
1,713		0,246	— 0,05	0,163
3,097		0,445	— 0,055	0,295
3,657		0,526	— 0,055	0,348
4,197		0,603	— 0,055	0,400
5,303		0,762	— 0,055	0,505
7,271	la caffeina non si scioglie completamente.	1,046	— 0,055	—

Per tutte le concentrazioni di benzoato sodico impiegate, l'aggiunta della caffeina dà luogo a degli abbassamenti termometrici anormali. E precisamente nelle soluzioni più diluite, la caffeina abbassa il punto di congelamento del benzoato, ma in grado sempre minore degli abbassamenti calcolati, con differenze che non possono evidentemente imputarsi ad errori di osservazione.

Nelle soluzioni di media concentrazione il punto di congelamento del benzoato non viene abbassato, e finalmente nelle soluzioni più concentrate si osservano addirittura degli innalzamenti termometrici (Esp. 8 e 9) assai evidenti.

Dall'insieme di questi dati si deve concludere che la formazione di un composto complesso in soluzione, fra caffeina e benzoato sodico, è sicura. Il complesso tende a dissociarsi in soluzioni molto diluite, mentre che dalle soluzioni concentrate appare che il complesso è meno dissociato. Il caso è quindi perfettamente identico a quello osservato da Paternò [1] per le soluzioni di iodio in KI, di I in HI, Br in HBr, Cl in HCl.

Allo scopo di meglio assicurarci che la caffeina si combina realmente col benzoato sodico, abbiamo sciolto nelle soluzioni acquose di benzoato alcune sostanze che in acqua si comportano in modo affatto normale; e precisamente la mannite, l'anilina ed il glucosio. Nessuna di queste sostanze sciolte in una soluzione di benzoato ad una concentrazione alla quale la caffeina ha un comportamento anormale, mostra la tendenza alla formazione di un complesso.

Mannite in acqua ($C_6H_{14}O_6 = 182$):

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)
0,776	0,080	179,4
1,885	0,190	183,6

Mannite in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,046:

Concentrazione della mannite in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 182$
0,873	0,090	179,4	0,094
2,070	0,215	178,1	0,210
3,503	0,360	180,0	0,356

Glusosio in acqua ($C_6H_{12}O_6 = 180$):

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)
1,105	0,110	185,8
2,539	0,260	180,6

[1] Loco citato.

Glucosio in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,227:

Concentrazione del glucosio in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 180$
1,079	0,110	181,6	0,110
2,531	0,260	180,0	0,260
4,257	0,440	179,0	0,437

Anilina in acqua ($C_6H_7N = 93$):

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)
0,836	0,16	96,6

Anilina in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,187:

Concentrazione dell'anilina in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Peso molecolare (K = 18,5)	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 93$
0,414	0,080	95,8	0,082
1,179	0,230	94,8	0,234
2,344	0,450	96,3	0,466

Resta ora a vedersi di quale natura sia la combinazione fra la caffeina ed il benzoato sodico. Essendo quest'ultima sostanza dissociata completamente la caffeina si unirà o coll'anione dell'acido benzoico o con il ione sodio. La caffeina è un elettrolite amfotero. La sua costante di dissociazione acida a 25° è $< 1 \times 10^{-14}$; quella come base a 40° è $4,1 \times 10^{-14}$. L'acido benzoico ha una costante di dissociazione $K = 6 - 7,3 \times 10^{-5}$ a 25°.

Se la caffeina formasse un sale con la soda dovrebbe l'acido benzoico poco solubile mettersi in libertà: il sale inoltre sarebbe fortemente idrolizzato: l'ipotesi più probabile è quindi quella che la caffeina si unisca con l'acido benzoico formando un ione complesso caffeinbenzoico, la cui natura, ben inteso, è difficile da stabilire.

Analoghe ricerche sono state da noi estese a molte altre sostanze le quali hanno una costituzione simile a quella della caffeina, principalmente ureidi e sostanze puriniche, e dal loro comportamento rispetto alla soluzione di benzoato sodico o di altri sali alcalini, sarà possibile trarre deduzioni sicure sopra lo stato loro in soluzione, e sulla influenza della costituzione chimica in relazione alla capacità di formare composti complessi.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sul luogo di utilizzazione dell'azoto dei nitrati nel corpo delle piante.* Nota di C. ACQUA, presentata dal Socio R. PIROTTA.

La presente Nota non ha altro scopo che rendere manifeste alcune ricerche preliminari su di un argomento nel quale — non ostante molteplici studî — regna tuttora la più grande incertezza. Il metodo prescelto è del tutto diverso dagli altri precedentemente usati e mediante i quali non si sono ottenuti se non scarsissimi risultati.

Nell'impossibilità di riassumere, sia pure sommariamente, in una Nota preliminare la letteratura sull'argomento, mi limiterò a rammentare che i metodi fin qui usati furono quelli della ricerca microchimica dei nitrati (usando di preferenza la nota reazione con la difenilammina) e di trarre dalla loro presenza o mancanza conclusioni che, secondo i diversi autori, seguivano direttive del tutto opposte. Così mentre da un lato si ritenne che, mancando la reazione dei nitrati in dati tessuti, p. es. nel mesofillo, ciò significasse che in essi non ha luogo l'assimilazione dell'azoto, dall'altro fu invece giudicata questa mancanza come un argomento in favore dell'ipotesi che precisamente in detti tessuti avvenisse l'utilizzazione dei nitrati e l'assimilazione dell'azoto. Anche quando si constatava un'abbondante presenza di nitrati, questa dava luogo a interpretazioni del tutto diverse. Perchè mentre da taluni era indicata come un argomento in favore dell'ipotesi che l'aumento provenisse dal fatto che i nitrati affluiscono dove debbono trovare il loro impiego, da altri si suppose che l'aumento stesso avesse soltanto carattere di riserva e che nessuna conclusione potesse trarsi circa la località dell'impiego.

Da ciò si scorge come del tutto insufficienti siano stati fino ad ora i metodi adoperati, d'onde l'assoluta incertezza che regna tuttora in questo ramo della fisiologia.

Per meglio spiegare come io sia giunto all'impiego di un nuovo metodo, mediante il quale parmi che la controversa quistione possa compiere un notevole progresso, credo opportuno descrivere brevemente la via che ho seguìta prima di giungere alle presenti ricerche.

Io mi sono occupato in una prima Nota già pubblicata, dell'accumulo delle sostanze radioattive sul grano comune. Adoperavo in queste ricerche soluzioni varie di sali radioattivi, tra i quali il nitrato di uranile. Il metodo elettroscopico rivelava un accumulo della sostanza attiva negli apici radicali In studî ulteriori, di prossima pubblicazione, facevo seguire l'esame microscopico dei tessuti e constatavo che dapprima nel dermatogeno, in prossimità

dell'apice, poi, in colture prolungate, anche in strati di tessuto sottostante si riscontrava visibilissimo un deposito giallo insolubile dovuto probabilmente all'ossido uranico.

Esperienze condotte con altri sali di uranio mostravano che il deposito aveva luogo esclusivamente o prevalentemente con il nitrato, e da questo fatto fui indotto a esaminare l'ipotesi se il fenomeno non si verificasse in seguito all'utilizzazione dell'azoto del nitrato di uranile, mentre il deposito giallo si sarebbe dovuto riguardare come un prodotto residuale dell'utilizzazione dell'azoto per scomposizione del nitrato di uranile. E in questo caso il deposito avrebbe dovuto indicarci il luogo nel quale avveniva questo processo.

L'uranio è però un elemento nocivo per la vita delle piante. I suoi composti debbono usarsi in soluzioni diluitissime e ciò non ostante ben presto si manifesta un'azione nociva. Ma i risultati ora descritti avevano aperto l'adito alla ricerca di un metodo non dissimile, ma che non presentasse gl'inconvenienti che si verificavano con l'uranio. È noto in fisiologia vegetale che l'assorbimento dell'acido nitrico può avvenire in forma di combinazioni con basi diverse. Sono tra queste preferibili quelle i cui metalli costituiscono degli elementi necessarî per la vita delle piante. Ma può ritenersi anche buono l'impiego dell'acido nitrico legato a basi, i cui metalli, quantunque non necessari, appartengono agli elementi non nocivi, forse anche utili, e che la pianta normalmente introduce nel suo corpo. Ora conveniva cercare se fra tali elementi ve ne fosse qualcuno il cui comportamento per le nostre esperienze non fosse dissimile da quello già descritto per l'uranio. In altri termini si trattava di fornire alla pianta un nitrato tale, che dalla sua scomposizione e conseguente utilizzazione dell'azoto risultasse come residuo una base insolubile, la quale in forma di precipitato colorato potesse fornirci un'indicazione microchimica sulle regioni nelle quali avviene l'utilizzazione dell'azoto nel corpo della pianta.

Fra i varî elementi passati in rivista il manganese mi parve il preferibile. Questo corpo si riscontra comunemente nelle ceneri delle piante, non è tra gli elementi necessari, ma si ritiene sia fra gli utili. Inoltre per l'assorbimento dell'azoto del suo nitrato sarebbe dovuto derivare un precipitato colorato insolubile dovuto a combinazione del manganese con l'ossigeno, e tale precipitato avrebbe fornito una preziosa indicazione per lo studio del processo nei vari tessuti. Ora le esperienze da me iniziate con soluzioni di nitrato manganoso hanno pienamente corrisposto all'aspettativa.

Io mi limiterò ora a descrivere brevissimamente i primi risultati ottenuti con due specie che hanno mostrato un comportamento diverso. Dopo la descrizione farò seguire una breve discussione sulle conclusioni che si possono trarre e sulle portata reale del metodo prescelto.

Grano comune. — Colture di piantine provenienti da chicchi fatti germinare in camere umide. Impiego di soluzioni di nitrato manganoso in acqua

distillata dal 0.5 al 3 per mille. Sviluppo buono quantunque minore nel sistema radicale in confronto dei lotti di controllo in sola acqua distillata. Il minore sviluppo è in rapporto con la concentrazione della soluzione.

Il sistema aereo non presenta differenze. Dopo alcuni giorni (da 4 a 8 secondo la varia concentrazione) alla temp. di 16° C circa cominciano a riscontrarsi delle macchie scure visibili ad occhio nudo; segue poi un annerimento pressochè omogeneo delle radici, con zone in cui l'annerimento si accentua. L'esame microscopico ci mostra quanto appresso. Un deposito rosso bruno comincia a formarsi ad una certa distanza dall'apice nella regione del dermatogeno. Procedendo verso la parte superiore della radice, il deposito si mostra abbondante in tutto il cilindro corticale, ma non sorpassa mai l'endodermide.

Il deposito si riscontra nell'interno delle cellule, nello spessore delle pareti, ma particolarmente negli spazî intercellulari.

Il cilindro centrale ne è del tutto privo. Nelle foglie non si ha alcun deposito, tranne in qualche raro caso isolato, in cui all'apice della prima foglia si riscontrò qualche ristretta area brunastra. Il microscopio mostrò che il deposito rosso-bruno si riscontra nell'epidermide della pagina interna e nella regione del fascio conduttore. Furono eseguite anche esperienze con cloruro e solfato manganoso ma non si riscontrarono depositi.

Fagiuolo comune. — Dei semi in via di sviluppo e con la radichetta già formata posti in soluzione di nitrato manganoso al 0.5 ‰ arrestano ben presto l'accrescimento della giovane radice la quale si mostra molto annerita. L'esame microscopico rivela abbondante deposito nel cilindro corticale e particolarmente negli spazî intercellulari. Ma anche il cilindro centrale presenta il deposito nelle pareti delle trachee, nel lume di queste che talvolta ne sono piene, e nelle pareti delle fibre, le quali nella radice del fagiuolo costituiscono degli speciali fasci meccanici. Discuteremo appresso il significato di questi fatti, ma intanto resta evidente che la soluzione fu troppo concentrata per lo sviluppo del fagiuolo, onde in successive esperienze si usò far geminare dei semi in una soluzione comune nutritizia e in seguito, quando le piantine avevano raggiunto l'altezza di circa 20 cm. ed avevano ben formato il primo paio di foglie dopo le cotiledonari, furono trasportate in soluzioni più diluite di 0.1 ‰ di nitrato manganoso.

Le piante non mostrarono di soffrire, ma gradatamente annerirono le loro radici, rallentando l'accrescimento di queste. Prolungandosi l'esperienza anche la base del fusto mostrò un annerimento. L'esame microscopico rivelò per le radici gli stessi fatti ora descritti nelle colture in soluzione più concentrata e per i fusti mise in evidenza un deposito diffuso nel parenchima corticale, nelle zone floematiche e xilematiche del fascio, mentre restò quasi immune il *cambium* e del tutto privo il parenchima midollare. Furono anche condotte esperienze con cloruro e solfato manganoso e si ebbero —

contrariamente a quanto si verifica per il grano — risultati analoghi a quelli descritti per il nitrato. Si deve anche aggiungere che durante tutto il tempo in cui avvenne l'esperienza la soluzione si mantenne sempre limpida, non presentando tracce di depositi, nè al fondo nè sulle pareti del recipiente nel quale era contenuta.

Tali i fatti sommariamente descritti; ora è opportuno far seguire alcune considerazioni. Che l'impiego di nitrato manganoso in soluzioni diluite non sia dannoso, almeno nell'inizio delle esperienze, è dimostrato da ciò che le piante vi prosperano egregiamente. Il fatto che dopo un certo tempo l'accrescimento si rallenta negli organi radicali è spiegabilissimo con la formazione degli abbondanti precipitati nell'interno delle cellule, i quali debbono ostacolare l'ulteriore accrescimento e moltiplicazione delle cellule stesse. Ma fino a che non si sia giunti a questo estremo limite la vita della pianta si svolge in via quasi normale. Che poi nelle nostre esperienze l'acido nitrico debba essere realmente impiegato parmi cosa evidente, anche per la ragione assai forte che, se ciò non fosse, nei tessuti nei quali ha luogo un abbondante deposito di manganese l'acido corrispondente dovrebbe accumularsi in una tale concentrazione da uccidere senz'altro le cellule. Quindi le regioni dei tessuti nei quali si riscontrano tali depositi debbono precisamente rappresentare il luogo nel quale, o in prossimità del quale, avviene l'utilizzazione dell'azoto.

Ma taluni fatti sopra descritti meritano delle speciali osservazioni. Abbiamo visto per il grano che il deposito si forma anche negli spazî intercellulari, ove anzi si accumula maggiormente. Per il fagiuolo non solo si riscontra negli spazî suddetti, ma anche nelle pareti dei vasi, nell'interno dei medesimi, nello spessore delle pareti delle fibre liberiane, ossia in regioni nelle quali manca il protoplasma e con esso la vita. Ora come ammettere che in questi casi possa aver luogo la scomposizione dei nitrati, l'utilizzazione dell'acido nitrico e la conseguente precipitazione della base di manganese? Fra le varie ipotesi che possono essere concepite in proposito la più semplice parmi la seguente. Le soluzioni diluite di nitrato manganoso debbono trovarsi dissociate. In questo stato esse si muoveranno nel lume dei vasi, si diffonderanno per imbibizione nello spessore delle pareti di questi e delle pareti delle altre cellule, come anche in quelle delle fibre liberiane. Similmente potranno guadagnare gli spazi intercellulari. Ma confinanti con queste parti morte vi sono sempre elementi vivi e assai attivi. Se ora supponiamo che in questi elementi attivi abbia luogo l'utilizzazione dell'azoto, i suoi anioni saranno richiamati dalle regioni circostanti, e, filtrando a traverso le membrane semipermeabili dei protoplasmi, saranno captati e assimilati. Se ammettiamo ancora che i cationi del manganese non possano penetrare a traverso le membrane plasmiche, essi dovranno precisamente restare nelle regioni circostanti, nelle quali, accumulandosi in misura preva-

lente, dovranno finire per dar luogo al precipitato sopra descritto dovuto probabilmente alla formazione del biossido di manganese. Quando poi il deposito stesso si riscontra anche nell'interno delle cellule, ciò vuol dire che la membrana plasmica di queste è stata anche parzialmente permeabile per i cationi del manganese. Vedemmo che nel grano il precipitato non si verificava con altri sali di manganese, come il solfato ed il cloruro, mentre questi nel fagiuolo si comportavano come il nitrato. Ciò vuol dire che nel primo caso le membrane plasmiche semipermeabili hanno un potere selettivo fra i varî anioni, mentre nel secondo esse lasciano passare anche gli anioni del cloro e dello zolfo. Ciò del resto non deve sorprendere poichè sappiamo che lo zolfo entra come costituente necessario della materia vivente, e il cloro, quantunque elemento non necessario, si riscontra generalmente nell'analisi delle ceneri delle piante, e da taluni autori è anche menzionato per qualche caso come un elemento utile.

Ma se dal metodo che ho ora descritto e dai primi risultati ottenuti noi abbiamo indicazioni abbastanza esatte sul luogo di assorbimento e di impiego dell'azoto proveniente dal nitrato manganoso, le stesse conclusioni potranno trarsi per gli altri nitrati che vengono assorbiti dalle piante nelle loro condizioni normali di esistenza? A vero dire non abbiamo la dimostrazione sperimentale che ciò avvenga, ma un'alta probabilità v'è certamente in favore di un tale supposto, per cui possiamo ritenere per analogia con molto fondamento che gli stessi tessuti, nei quali si opera l'utilizzazione dell'azoto del nitrato manganoso, compiano il medesimo ufficio anche con altri nitrati. Mi sembra dunque che il metodo indicato debba offrire una buona guida per far compiere un notevole progresso ad una questione tanto controversa, come questa che ci occupa e nella quale fino ad ora non si è riusciti ad ottenere neanche un semplice orientamento.

Io ho descritto i primi risultati ottenuti con due sole specie. Chi avrà avuto occasione di scorrere le pubblicazioni sull'argomento avrà visto i quesiti importantissimi posti ripetutamente da varî sperimentatori, e ai quali non si è potuto far seguire una risposta soddisfacente.

Questi quesiti io mi propongo di riprendere e studiare con il nuovo metodo da me usato. Ma poichè il lavoro richiederà tempo abbastanza lungo, ho creduto opportuno far precedere questa Nota preventiva per *prendere data*, come suol dirsi, e per potermi dedicare in seguito senza fretta e impazienza alla prosecuzione del lavoro.

Era già pronta per la presentazione la presente Nota quando venni a conoscenza di un recentissimo lavoro del Molisch (*Ueber locale Membranfärbung durch Manganverbindungen bei einigen Wasserpflanzen*. Sitber. Kais. Ak. Wiss. Wien. Mathem.-naturw. Klasse. CXVIII Abt. 1 Okt. 1909) nel quale egli descrive i depositi che si originano nell'Elodea e in altre

piante acquatiche allorquando sono coltivate in soluzioni di sali di manganese. L'A. considera il deposito simile per la sua origine ad una incrostazione calcare, ma nota la particolarità che la sua formazione sembra in diretta dipendenza con l'azione della luce. Gli studî del Molisch sono essenzialmente diversi da quelli da me intrapresi; tuttavia ho creduto farne cenno perchè le sue esperienze, quantunque condotte con intendimento differente, hanno una certa analogia con quelle da me ora descritte.

Patologia vegetale. — *Gommosi da ferita, Thrips ed acariosi delle viti americane in Sicilia.* Nota di E. Pantanelli, presentata dal Socio G. Cuboni.

In una Nota precedente ho caratterizzato l'aspetto morfologico del Roncet delle viti americane ed ho accennato alla presenza di altre affezioni, i cui sintomi sono stati da precedenti autori compresi nel quadro generale di quella malattia, mentre sono dovuti a cause ben diverse, e se ne possono più o meno facilmente distinguere. Esse sono:

a) gommosi da ferita, la quale produce *court-noué* dei tralci in primavera;

b) maculature pallide e perforazione delle foglie, imbrunimento ed essiccamento delle gemme, erosioni sui tralci, picciòli, peduncoli fiorali e fiori non ancora schiusi, dovuti al tisanottero *Drepanothrips Reuteri* Uzel;

c) rachitismo ed erinosi diffusa dei germogli nei vitigni tomentosi, lesioni locali sulle foglie in quasi tutti i vitigni americani, dovuti con molta probabilità a un acaro appartenente alla famiglia degli eriofiidi o fitoptidi, ma diverso dal *Phyllocoptes vitis* Nal., segnalato come causa della cosiddetta acariosi nei vigneti della Svizzera francese.

A) *Gommosi.* — A parte l'opinione di Comes [1], sempre rispettabile perchè basata su *considerazioni* fisiologiche di indubbia importanza. che la gommosi nel legno della vite in generale sia prodotta da sbalzi di temperatura durante lo sviluppo primaverile, ricorderò che parecchi patologi ed allevatori di viti americane, Prillieux [2], Debray [3], Couderc [4], Silva [5],

[1] Annali d. Scuola Sup. di Portici, V (1888), 24 pp.; Atti Istit. Incoragg. di Napoli, VII (1894), 14 pp.

[2] Prillieux e Delacroix, Revue d. vit., II (1894), p. 6; III (1895), p. 420; Ann. Inst. Agron., XIV (1895).

[3] Bull. Soc. Botan. Franc., 1899.

[4] Citato da Ravaz, Ann. Ecole Montpellier, XI (1900), pag. 297.

[5] Bull. Offic. Minist. Agric., anno 1905, vol. I, pag. 90; anno 1906, vol. VI, pag. 373.

Maggioni [1], Briosi [2], Gaunersdorfer [3], io stesso sul principio di queste ricerche [4], hanno veduto nella rapida e penetrante produzione di gomma rosso-bruna o nera, che si ha nei vasi del legno aperti da un taglio e nelle loro cellule annesse, e che si approfondisce nel legno delle spalle e dei ceppi per lunghi tratti (fino a 15 cm.), la ragione per cui i germogli, che spuntano in tutta vicinanza delle larghe ferite che porta la potatura a capitozzo o la *rimonda* nella potatura ad alberello, si sviluppano rachitici e deformati nel modo caratteristico per il Roncet.

Il termine *resinòsi*, per queste alterazioni, è da preferirsi a quello di gommosi, perchè la sostanza che si forma non è di natura pectica, come hanno supposto i precedenti osservatori da Prillieux a Schiff-Giorgini [5], ma è una gommo-resina, simile allo schellack bruto, solubile in alcool assoluto bollente, etere, glicerina anidra ed olio di trementina, insolubile in acqua fredda o calda, nella quale ultima però fonde e si scinde in goccioline oleose, nere. Nella soda caustica bollente si scioglie formando evidentemente un sapone; da questa soluzione viene precipitata in forma di fiocchi grigio-rossastri per neutralizzazione con acido cloridrico. Trattata direttamente con gli acidi minerali a caldo si disgrega in frammenti a struttura concoide, simili all'ambra o al colofonio. Brucia con fiamma fuligginosa e luminosa, diffondendo un odore leggermente resinoso. Da 300 gr. di legno malato di *Rupestris du Lot* ho estratto per ebullizione a ricadere, prolungata per 36 ore, con un litro di alcool assoluto, circa 30 gr. di resina bruta, in forma di una sostanza nera, lucente, viscosa, semifluida verso i 45° C, che poi è notevolmente indurita.

Si tratta dunque di una gommoresina, appartenente al gruppo delle « Wundgummi » (gomma da ferita) studiate da Temme [6]. Anche Mangin [7] distingue nettamente, per le viti europee affette da gommosi, la gomma bruna che si forma nel legno di più di due anni, dalla gomma bianca, di natura pectica, che sgorga normalmente dai vasi anche su le sezioni di tralci di un anno.

La gommoresina da ferita proviene nella vite da una degenerazione resinosa del plasma cellulare, analoga a quella che si ha negli elementi resinipari di diverse piante, mentre la gomma bianca proviene da gelificazione delle pareti delle cellule parenchimatiche attigue al vaso, che non si verifica mai nei vasi contenenti tilli.

[1] Viticultura moderna, X (1904) pag. 285.

[2] Bull. Offic. Minist. Agric., anno 1902, pag. 1167; anno 1905, vol. II, pag. 515.

[3] Sitzungsber. d. Wier. Akad., LXXXV (1882).

[4] Bull. Soc. Agric. Ital., vol. XV (1907), nn. 12-13; Relaz. sull'attiv. della R. Stazione di Patol. veg. per il 1906-1907, pag. 28.

[5] Bull. Offic. Minist. Agric., anno 1906, vol. VI, p. 971.

[6] Landwirtsch. Jahrbücher, XIV (1885), p. 465.

[7] Revue de Vitic., III (1895), pp. 5, 29, 364.

Quanto ai tilli, Mangin ha mostrato che essi si formano ogni volta che si apre una trachea, o anche per la rarefazione dell'aria nel vaso (1) (consumo di acqua negli organi aerei superiori alla fornitura da parte delle radici) e che sono molto più abbondanti nelle viti malate di *gélivure* (mal nero?), dove essi riempiono i vasi di un falso parenchima a cellule poliedriche. Secondo Mangin, in questo genere di malattie si dovrebbe parlare di *tillòsi* e non di gommòsi (2).

Secondo le mie osservazioni, i tilli nelle viti americane si formano normalmente negli anelli legnosi più vecchi di 3-4 anni, e subiscono lentamente in questi anelli una degenerazione resinosa, che possiamo chiamare normale in quanto determina la formazione del durame come nelle altre parti legnose (3). La resinosi patologica consiste in ciò, che in corrispondenza dei tagli praticati in autunno o in inverno nei vasi rimasti aperti viene accelerata la degenerazione gommo-resinosa del contenuto dei tilli ed il processo degenerativo si estende anche alle cellule adiacenti, e tutto ciò anche negli anelli legnosi più giovani, mai però nell'ultimo formato. Inoltre, vasi che possedevano qua e là qualche tillo in formazione, ma che potevano continuare varî anni a condurre la linfa, vengono improvvisamente ostruiti dai tilli in seguito alla resezione, perchè viene a mancare la pressione dell'acqua nel vaso. La resinòsi si compie più rapidamente nell'inverno, la tillòsi invece è più rapida nell'estate, e sono due processi ben distinti, destati o ravvivati dal medesimo intervento.

Ambedue questi processi colpiscono tutto il vaso sezionato e possono passare per le anastomosi ad altri vasi in senso longitudinale, ma non si propagano trasversalmente. Sui lati toccano le cellule madri dei tilli e qualche cellula adiacente, raramente qualche aggregato di parenchima legnoso, e mai passano da un vaso agli attigui, se non vi sono anastomosi. Questo spiega perchè tanto la degenerazione gommo-resinosa come la tillòsi diminuiscano con l'allontanarsi dalla piaga e per lo più cessino prima di arrivare al colletto della pianta.

Il legno dei tralci dell'anno è sempre affatto normale, mai porta vasi tillosi o resinosi, anche nei tralci fortemente malati di Roncet, e ciò fino al più tardo autunno; la tillòsi nei ceppi e nelle spalle comincia generalmente nel terzo cerchio legnoso, contando dall'esterno, raramente nel secondo. Non è dunque nei tralci che cominciano questi processi, come taluno ha supposto per analogia col Mal Nero.

Per la stessa ragione, nel legno delle talee si trovano raramente vasi gommosi, anche se malate di Roncet.

(1) Comptes rendus, CXXXIII (1901), pag. 305.
(2) Revue de Vitic., III (1895), pag. 422.
(3) Ráthay, Jarhresber. d. Lehranstalt i. Klosterneuburg., 1896, 90 pp.

Tutte queste cose avevo già osservato nel primo anno di ricerche ed anzi in base a queste alla fine dell'anno 1907 accettavo ancora le vedute di Silva. Ma intanto mi ero preparato un abbondante materiale di studio, controllato da me stesso durante quella vegetazione, il quale, sottoposto a diversi sistemi di potatura, doveva fornirmi nella primavera successiva la prova sperimentale di questa asserzione. Ma il resultato fu contrario.

Anzitutto, osservando giornalmente lo sviluppo di un gran numero di viti malate, si trova che nell'aprile spuntano germogli tipicamente roncettati anche dalla base del ceppo, che non ebbe mai a soffrire di gommosi per le ferite di potatura, e nel cui interno il legno è esente da gommòsi o meglio resinòsi, almeno nei cerchi legnosi più recenti. D'altra parte, la gommòsi e la tillòsi si trovano anche nel legno di tutte le spalle e teste dei ceppi che finora non hanno sofferto di Roncet, come già aveva notato Ruggeri [1].

Debray, Silva, Briosi, Gaunersdorfer vedono nella potatura a capitozzo, la quale ricopre di piaghe la testa del ceppo, un'operazione atta per eccellenza a produrre il Roncet, ed in realtà i Giapponesi attribuiscono l'Ischikubyo o arricciamento del gelso, che ha una lontana analogia col Roncet, a ferite di potatura [2]. Ma già Krasser aveva notato che non v'è relazione fra distribuzione delle piaghe, cioè resinòsi del legno sottostante, e Roncet (*krautern*), e le mie esperienze di potatura hanno mostrato, che la potatura a capitozzo guarisce anzi in molti casi le viti malate, perchè sopprime le gemme malate dell'anno precedente e ritarda lo sviluppo di alcune settimane, al pari della decapitazione proposta prima da Silva, poi anche da Ravaz [3]; ma in questo caso, la guarigione è per lo più transitoria, come già aveva osservato Segapeli [4], perchè, quando si sono ricostituite le spalle del ceppo, la malattia ricompare. Non potando o adottando potature lunghe si aggrava la malattia.

È però un fatto che la rapidità con cui si formano i tilli o la gommoresina nei vasi aperti da un taglio, varia a seconda del vitigno; una celere tillòsi e resinosi si ha nella *Rupestris* (du Lot) e nella *Riparia* (Gloire). Assai lenti sono invece ambedue i processi nella *Berlandieri* (Resseguier n. 2). Nella *Vinifera* (Calabrese) la tillòsi è abbastanza rapida, ma la degenerazione resinosa interviene tardi ed è limitata.

In secondo luogo, la pressione di gemizio e la quantità di liquido che sgorga dai tagli praticati in primavera, sono maggiori a livello del colletto che sulle spalle, al di sopra della testa dei ceppi, e ciò tanto in viti sane, come in viti malate, nelle quali però tanto la pressione come la velocità di gemizio sono molto minori che nelle viti sane. Ciò prova che la parte supe-

(1) Viticoltura moderna, IX (1902), p. 69.
(2) Suzuki, Zeitschr. f. Pflanzenkr., XII (1902), pag. 203.
(3) Progrès agr. et vit., XXIII (1906), 1° sem., pag. 576.
(4) Cfr. Schiff, loc. cit., pag. 974.

riore del ceppo, con legno profondamente invaso da gommosi da ferita, oppone resistenza al passaggio della linfa.

Realmente si nota sui primordî della vegetazione uno sviluppo stentato di tutti i germogli che spuntano da gemme dei cornetti o delle spalle, o comunque da gemme situate sopra e intorno alla testa dei ceppi, mentre i germogli che spuntano dal basso del ceppo sono più vigorosi e crescono rapidamente, ma questo è un fatto generale, comune a viti sane e malate. Anzi, persino su viti di un anno si nota uno sviluppo più rapido nei germogli inferiori, e ciò specialmente nelle *Rupestris*, meno nelle *Riparia* e *Berlandieri*. Non è escluso che si possa scambiare per Roncet questo *court-noué* primaverile, che scompare 2-3 settimane dopo il germogliamento, dovuto alla posizione del germoglio sul ceppo e visibilmente influenzato dalla resinosi del legno sottostante.

Infine debbo ricordare che in alcuni vitigni malati di Roncet, specialmente nelle *Riparie* (Gloire e Grand Glabre), si ha un aumento nella secrezione di gomma pectica (incolora), che rende più tarda l'ascensione della linfa dalle radici e dipende non già dalle ferite o da sbalzi di temperatura, ma dalla profonda alterazione di tutte le funzioni del vegetale in conseguenza dell'insufficienza radicale. La gomma pectica, incolora, non resinosa, solubile in acqua, si forma normalmente nelle cellule a ràfidi ed anche in altre cellule del parenchima corticale e midollare della vite, fino nelle radici. L'aumento nella sua produzione non può confondersi con la degenerazione gommoresinosa susseguente alle ferite, nè con la causa del Roncet, della quale malattia essa è — e non sempre — una manifestazione parziale.

B) *Drepanothrips Reuteri* Uzel. — Le maculature trasparenti, le perforazioni sulle foglie e le erosioni dentellate sui tralci (*gerçures* di Ravaz), frequenti soprattutto nelle *Riparia*, ma comuni anche in altri vitigni americani — rare negli europei — durante il primo sviluppo, sono dovute per lo più a questo piccolo tisanottero, le cui larve, almeno a Noto, sono estremamente numerose. Del Noce a Barletta, Ruggeri a Messina [1], avevano già osservato questa *Thrips* descritta da Uzel [2]. Essa si trova tanto sui germogli malati di Roncet, come sui germogli sani, ma è più frequente nei primi. I massimi guasti vengono prodotti dalla *Thrips* sui primi germogli di aprile e su le ultime femminelle di agosto; anzi gli ultimi germogli di *Riparia*, 420 A, ed altri ibridi *Berlandieri* × *Riparia*, si seccano addirittura per gli attacchi di *Thrips*. Non è improbabile che altri autori abbiano preso per Roncet la manifestazioue estiva degli attacchi di *Thrips*, che sano dannosi soprattutto nei luogli umidi. Quivi ho contato fino a 60 larve del

(1) Bull. Not. Agrarie, XXI (1899), pag. 1079.

(2) Del Guercio, Bull. R. Staz. Entomol. Agraria, Firenze, vol. III (1901), pag. 410.

tisanottero su fogslioline di *Riparia Gloire* di 1 cmq. di superficie, verso la metà d'aprile.

Le larve di *Thrips* si tengono a preferenza sulla pagina superiore delle foglioline non ancora patenti del germoglio, ed è qui che incominciano le alterazioni da esse prodotte. Col suo rostro sottilissimo questa *Thrips* non rompe mai la cellula epidermica, ma lo insinua nella lamella mediana fra cellula e cellula, arrivando così al palizzata, il contenuto delle cui cellule essa risucchia. La lamella mediana perforata imbrunisce subito, e più tardi accade spesso che le due cellule epidermiche ad essa aderenti muoiano e collabiscano, diventando brune (v. fig. 1 nell'epidermide superiore).

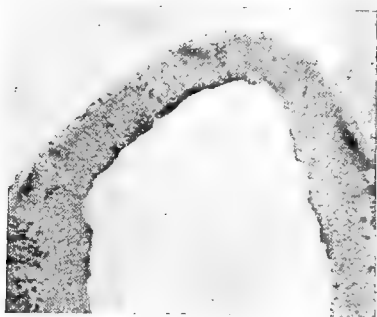



Fig. 1.

Bollosità fra due costole di una giovane foglia di *Riparia tomentosa* (da seme). Lesioni di *Thrips* e dell'eriofiide. Ingr. 48.

Siccome la *Thrips* comincia a pungere le foglie quando sono ancora molto giovani, si arresta per lo più la differenziazione del palizzata tutto attorno alle cellule risucchiate, le quali rimangono vuote. Anche la formazione della clorofilla è ostacolata, e col crescere della fogliolina rimangono piccole aree pallide per trasparenza, le quali si distinguono dalle maculature pallide prodotte dal Roncet solamente perchè hanno i contorni sfumati e non nettamente delimitati da nervature, sono più piccole e portano per lo più al centro qualche cellula epidermica imbrunita.

Una conseguenza delle punture di *Thrips* sulle foglie molto giovani è la perforazione della lamina, perchè sulla pagina non lesa il mesofillo continua a crescere e così tutto all'intorno dell'area colpita, obbligando questa a lacerarsi. Le larve di *Thrips* non pungono mai l'epidermide al disopra delle nervature e l'arresto nell'accrescimento del parenchima fa sì che nelle foglie adulte le piccole terminazioni vascolari in quel punto rimangano raccostate e intrecciate in modo caratteristico. Se le lesioni di *Thrips* sono molto fitte, la foglia rimane deformata.

Anche su gli altri organi teneri si trovano le punture della *Thrips*. Sui picciòli, fusti, viticci, peduncoli fiorali essi assumono l'aspetto di piccole macchioline brune, visibili alla lente, che, siccome la *Thrips* punge esclu-

sivamente nei solchi longitudinali fra le costole di collenchima, sembrano fatte con una minuscola ruota dentata. Sui bottoni fiorali si trovano pure lesioni dell'epidermide simili a quelle descritte; i fiori si seccano per lo più e cadono prima di aprirsi.

Le irrorazioni con petrolio e sapone, con estratto di tabacco e sapone, con polisolfuro di calcio sono sufficienti per liberare i germogli dalla *Thrips*. Tenendo coperte le viti con terra fino a maggio (*Riparia Gloire, Rupestris du Lot, Aramon* × *Rupestris* Ganzin n. 1), o fino a giugno (*Berlandieri* Ress. 2), ho ottenuto tralci sani o malati di Roncet, ma privi delle lesioni della *Thrips*.

C) *Acariosi*. Faes [1], Müller-Thurgau [2], Chodat [3], Behrens [4], Burnat e Jaccard [5] hanno attribuito ad un eriofiide, *Phyllocoptes vitis* Nalepa, il *court-noué*, che dal 1902 in poi è divenuto frequente sulle viti svizzere. Tutti questi autori hanno osservato il *Phyllocoptes vitis* su viti europee, per lo più franche di piede, non su viti americane; Burnat e Jaccard anzi escludono, che la malattia sia stata importata con le viti americane. Ciò non ostante, la descrizione che ne dànno fa pensare al Roncet, come Chodat ha notato, mentre Burnat e Jaccard insistono nel tener separate le due malattie. Nell'acariosi mancherebbe la produzione eccessiva di gomma e tilli nei vasi, ma ho già detto che questo fenomeno ha poca importanza rispetto al Roncet, specialmente nelle *Vinifera*. I germogli deformati da Roncet rimarrebbero rachitici per tutta la vegetazione, mentre quelli colpiti da acariosi si risolleverebbero in giugno, salvo poi a lasciar vittima del *Phyllocoptes* le ultime femminelle di agosto. Ora, anche nel Roncet autentico si può avere il risanamento estivo, anzi si ha regolarmente, se la malattia non è troppo pregressa; i guasti estivi su le ultime femminelle sono prodotti in Sicilia da *Thrips*, quindi sono indipendenti dall'acariosi come dal Roncet.

Quanto alla presenza del *Phyllocoptes vitis*, in tre anni di ricerche non l'ho potuto rintracciare. Su le viti americane *glabre*, che maggiormente soffrono di Roncet tipico, come *Rupestris du Lot, R. metallica, R. selezionate* (da de Astis), *Riparia Gloire, R. Martinaud, Riparia* × *Rupestris* 3306 e 3309. *Aramon* × *Rupestris* G. 1, 132-11 ecc., s'incontrano raramente acari nei germogli, anche in primavera, e si tratta sempre di specie carnivore; le più comuni appartengono ai generi *Iphidulus* ed *Erythraeus*; i *Gamasella*, il *Tydeus foliorum*, l'*Actineda vitis* sono molto rari [6].

[1] Progrès agric. et vitic., anno XXII (1905), 2° sem., pag. 133; Chron. Agric. Vaud, mars 1908; *Les mal. des plantes cultivées*, 1909, pag. 60.

[2] Centr. f. Bakter, II. Abt., Bd. XV (1906), pag 623.

[3] Bull. Classe Agric. Soc. Arts, Génève, 1905, pag. 125.

[4] Ber. d. bad. landw. Versuchsanst. Augustenberg f. 1905 (1906).

[5] Revue de vitic., XXXI (1909), pag. 235.

[6] Debbo alla cortesia del prof. A. Berlese la determinazione di questi acari.

Invece sui vitigni tomentosi coltivati nel R. Vivaio di Noto, specialmente sulle *Riparia* tomentosa e tomentosissima (da seme), sui *Berlandieri* Ress. 1 e 2, su gli ibridi di *Berlandieri* con *Rupestris*, *Riparia* e *Vinifera* e sulle *Vinifera* innestate, ho trovato qualche individuo di un nuovo eriofiide, diverso però dal *Phyllocoptes vitis* descritto da Nalepa [1], come ho potuto constatare confrontandolo con numerosi individui di questo eriofiide trovati su materiale, malato di acariosi, gentilmente inviato dal sig. J. Burnat di Veyrier (Ginevra). Per molti caratteri l'eriofiide trovato a Noto pare che appartenga al genere *Anthocoptes*, come dimostrerò altrove.

Le lesioni che esso produce sulle foglie sono del tutto simili a quelle che produce il *Phyllocoptes vitis* su le viti svizzere (v. fig. 2), descritte

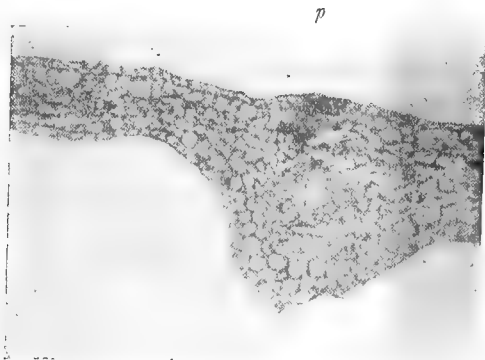



Fig. 2.
Foglia di vite svizzera affetta da acariosi. In *p* lesioni di *Phyllocoptes*.
Ingr. 130.

sommariamente da Chodat, Micheli [2], Burnat e Jaccard, come ho potuto osservare sul materiale inviatomi dal sig. Burnat da Veyrier e dal dottor H. Faes da Losanna. Questi acari, a differenza della *Thrips*, stracciano col rostro le cellule epidermiche ed anche le cellule sottostanti, determinando necròsi locale più o meno estesa, attorno a cui il mesofillo al solito si arresta nell'accrescimento e i cloroplasti più o meno degenerano e perdono la clorofilla. Si formano così aree pallide con una necròsi al centro. Se questa è superficiale, il tessuto della pagina opposta subisce una leggera ipertrofia e circonda la necròsi con un callo di protezione, le cui ultime pareti sono suberificate. Ma se il guasto è più profondo, la lamina muore in tutto lo spessore. L'arresto dell'accrescimento porta spesso a perforazione della lamina per la stessa ragione che abbiamo visto per la *Thrips*, ma la perforazione di *Thrips* è generalmente allungata fra le nervature ed ha gli orli ben cicatrizzati, leggermente ingrossati e non bruni, mentre le perforazioni susseguenti alle punture dei detti eriofiidi hanno l'aspetto di lacerazioni irregolari,

[1] Anzeiger d. Wiener Akad., XLII (1905), p. 268.
[2] Bull. Classe Agric. Soc. Arts. Génève, 1906, pag. 269.

a brandelli, coi margini anneriti e secchi; il mesofillo però si delimita tutto attorno con un callo internamente suberificato.

Le lesioni del *Phyllocoptes vitis* si trovano anche sulla pagina superiore, quelle dell'eriofiide siciliano quasi esclusivamente sulla pagina inferiore della foglia.

Alterazioni simili si osservano anche sulle viti americane glabre, quali la *Rupestris du Lot*, la *Riparia Gloire*, il 132-11, l'*Aramon* × *Rupestris* G. 1 ecc., e ciò porta a concludere che l'eriofiide vaghi anche su questi vitigni.

Dobbiamo dunque attribuirgli anche qualche deformazine morfologica? Il *Phyllocoptes vitis* produce un forte nanismo, indurimento delle gemme basali dei tralci, deformazione e bollosità nelle foglie, brevità degli internodî, fasciazioni, aborto dei grappoli ecc.

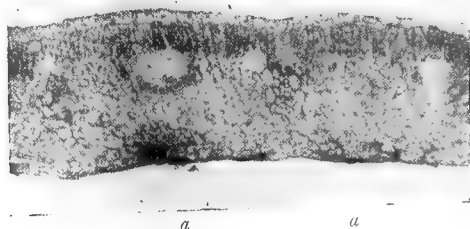



Fig. 3.

Foglia di *Berlandieri* × *Riparia* 420 A con lesioni prodotte dall'acaro (*a*). Ingr. 130.

Nei vitigni tomentosi in Sicilia il rachitismo si presenta realmente con caratteri diversi da quelli del Roncet tipico delle *Rupestris* e *Riparia*: le foglie sono sviluppate irregolarmente e deformate piuttosto che laciniate, la malattia è più forte sulle femminelle che sul tralcio padre, i grappoli sono abortiti o deformati e le fasciazioni molto frequenti. Un complesso di alterazioni che fa pensare o ad una causa del rachitismo diversa da quella che produce il Roncet delle viti glabre, o alla concomitanza del Roncet e di deformazioni dovute all'eriofiide.

Per questi vitigni tomentosi, a base di *Berlandieri*, *Vinifera* e anche di qualche *Riparia*, occorre dunque continuare gli studî prima di poter decidere tale questione.

Ben altra è la cosa per la malattia delle *Rupestris* e *Riparie* glabre, per la quale si riesce a dimostrare che essa è indipendente dall'acariosi. Infatti non vi si trovano eriofiidi a svernare sotto la scorza dei cornetti e delle spalle, nè fra le squame delle gemme. Scortecciando con cura e pennellando i ceppi sul finire dell'inverno con solfato di ferro acido, solfato di rame o sublimato, non si impedisce lo sviluppo di germogli malati di Roncet.

Eguale risultato negativo si ha bagnando le talee malate con i detti veleni, con nitrato d'argento, carbonato sodico, acido cloridrico, nitrico, solforico, fenico, acqua a 55°. Alcuni di questi trattamenti favoriscono il risanamento estivo della barbatella, ma per ben altra ragione.

Le irrorazioni con estratto di tabacco e sapone, petrolio e sapone polisolfuro di calcio al 3-4 % di solfo non hanno arrestato lo sviluppo del Roncet su la *Rupestris du Lot*, nè sulla *Riparia Gloire*; sul *Berlandieri* Ress. 1 e 2 i risultati sono stati oscillanti.

Tenendo coperti con terra i ceppi, come sopra ho detto, si sono avuti tralci tipicamente malati di Roncet anche dai *Berlandieri*, sebbene liberi da acari ed insetti di ogni sorta, nonchè dalle loro lesioni.

Batteriologia. — *La flora bacterica nei ghiacciai del Monte Rosa* [1]. Nota di G. Galeotti ed E. Levi, presentata dal Socio A. Mosso.

Lo studio della flora bacterica sulle cime delle alte montagne, ove la vita sembra al tutto spenta, ha attirato l'attenzione di molti sperimentatori. Fra i primi è stato il prof. Giacosa, che, già nel 1882, eseguì alcune ricerche per determinare i corpuscoli organizzati, esistenti nell'aria dei monti. Ricerche nello stesso senso erano state anche fatte da Pasteur, da Yung e dal Fredenreich di Berna sullo Schilthorn.

Schmelck dell'ufficio sanitario municipale di Cristiania, nel luglio 1888, studiò bacteriologicamente le nevi e le acque del Josterdalbrae in Norvegia. Nel 1890 il Giacosa tornava su questo argomento, pubblicando i risultati ottenuti dallo studio bacteriologico della neve, raccolta sulla vetta del Piccolo Cervino, sul Plateau Rosà e sul colle del Teodulo. Qualche anno più tardi Scofone, facendo parte della spedizione scientifica al Monte Rosa, diretta dal prof. Giacosa, si proponeva pure di studiare i microrganismi delle nevi, dei ghiacciai, dell'aria e dell'acqua sulle alte montagne. Egli analizzò bacteriologicamente la neve del ghiacciaio del Garstelet, della regione limitrofa alla Capanna Gnifetti, del Ghiacciaio del Lys, del colle del Lys, della punta Gnifetti e le acque del Lago Salzia, del Lago Gabiet, della fontana Sella, del torrente Indren e del torrente Lys.

Quasi in tutti i campioni lo Scofone trovò bacteri di varie specie, che egli identificò seguendo le tavole dell'Eisemberg. Queste specie furono: *M. cremoides, M. albus fluidificans, M. albus, M. versicolor, M. albus liquefaciens, M. agilis, M. carneus, M. flavus desidens, D. desidens, D. ci-*

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisiologico A. Mosso (al Col d'Olen) e nell'Istituto di Patologia generale della R. Università di Napoli.

treus conglomeratus, B. fluorescens longus, B. rubidus, B. lactis erytrogenes, B. erytrosporus, B. roseus rosae.

In un'altra Nota lo Scofone pubblicò il risultato di ulteriori indagini bacteriologiche, fatte sulla neve di diversi nevai del piano dell'Indren (altezza 2460 m.) e sulla neve della Capanna Margherita.

Ricerche più recenti e più larghe sono quelle del Binot, che, dietro richiesta del Janssen, si occupò, nel 1900, di determinare la flora bacterica del gruppo del Monte Bianco. Le indagini di questo autore si estesero alle nevi e ai ghiacciai, all'acqua ed all'aria. Molte analisi furono fatte nello stesso luogo, in tempi diversi, in modo da vedere come varii la flora bacterica con le varie condizioni della montagna; altre furono eseguite in luoghi differenti, e si raccolsero campioni in gran numero di neve fresca, di neve antica, di ghiaccio superficiale, di ghiaccio profondo nei crepacci, di acque che sgorgano dai giacciai, ecc. Il Binot accetta l'opinione generalmente ammessa, che i bacteri siano trasportati dai venti sulla sommità delle montagne e che da altra parte il sole sia un potente mezzo di distruzione dei germi depositati sulle nevi. Perciò il contenuto bacterico delle nevi varia grandemente a seconda delle condizioni meteorologiche, precedenti la raccolta dei campioni, a seconda dell'orientazione dei luoghi, ove la neve fu presa, a seconda della profondità degli strati esaminati. In certi luoghi, nella neve antica, furono trovati 1 o 2 germi per cmc., mentre nella neve fresca il contenuto bacterico era assai più piccolo o nullo. In tesi generale il numero dei germi è tanto maggiore, quanto più ci si avvicina alla valle e, mentre al Grand Plateau vi erano 6 germi per unità di misura di acqua di neve, ai Grands Mulets questo numero si innalzava sino ad 8, al Plan de l'Aiguille sino a 19, alla Mer de Glace sino a 23 e al Montanvert sino a 49.

Il Binot ha raccolto, dalle sue analisi bacteriologiche, circa 300 specie differenti, di cui molte sono nuove e difficili a determinare. Solo di un terzo riuscì la identificazione in modo sicuro. Riguardo alla presenza di specie patogene, il Binot afferma di avere una volta isolato dal ghiaccio una specie virulenta di piocianeo e dalle acque di fontane naturali un vibrione patogeno per gli animali di laboratorio e anche (da una sorgente sulla strada del Montanvert) il *bacterium coli.*

* * *

Le ricerche di cui esponiamo qui i risultati furono da noi fatte negli ultimi giorni di luglio e nella prima quindicina di agosto del 1909. Esse furono iniziate nell'Istituto Fisiologico Angelo Mosso al Col d'Olen e compiute nell'Istituto di Patologia generale dell'Università di Napoli. Sul metodo di ricerca non abbiamo molto da dire, poichè fu seguìta la tecnica bacteriologica comunemente usata.

I campioni di neve e di terriccio venivano raccolti in vasetti di vetro sterilizzati e nel più breve tempo possibile portati in laboratorio, ove si

facevano gli isolamenti su piastre di gelatina. Le specie raccolte erano poi trapiantate sull'agar e in parte studiate nell'Istituto al Col d'Olen, in parte inviate al laboratorio di Patologia a Napoli. Per la identificazione delle specie ci siamo serviti del trattato del Migula.

Gli ifomiceti furono solo in parte identificati e per questi ci siamo valsi del cortese aiuto del prof. F. Cavara.

Punta Giordani (m. 4180).

29 luglio. — Si preleva un campione di neve e un po' di terriccio tra le roccie da un un pendìo esposto a sud-ovest. Ore 12. Tempo sereno da due giorni.

Risultato dell'analisi bacteriologica: Acqua di neve:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	3	0
8 »	5	0
20 »	15	0

Media per un cc. di acqua [1]: bacteri colonie n. 12; ifomiceti 0.

Terriccio: bacteri colonie n. 2; ifomiceti colonie n. 1.

Le specie bacteriche trovate sono: Nell'acqua di neve: *B. flavescens, B. pseudoanthracis, M. candidans, B. chryseus.* — Nel terriccio: *B. mesentericus, Penicillium glaucum.*

Punta Zumstein (m. 4573).

2 agosto. — Si prelevano campioni di neve e di terriccio, prendendoli sotto alcune roccie sporgenti sul versante est. Ore 8 ant. È nevicato nella notte. La giornata è tempestosa e tira vento del sud.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	2	1
8 »	5	1
20 »	12	4

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 10; ifomiceti colonie 3.

Terriccio: bacteri colonie n. 2; ifomiceti colonie n. 1.

Le specie trovate sono: Nell'acqua di neve: *Sarcina candida,* Ifomiceto indeterminato. — Nel terriccio: *Sarcina candida, B. mesentericus, Penicillium glaucum.*

[1] Questa media è stata fatta, considerando che 20 goccie di acqua corrispondono circa ad un centimetro cubo.

Seracchi del Balmehorn.

2 agosto. — Si preleva un campione di neve superficiale. Esposizione a nord. È nevicato nella notte. Ore 9 ant.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	0	0
8 "	1	1
20 "	1	0

Le specie trovate sono: *B. mesentericus*, Ifomiceto indeterminato.

Ghiacciaio dell'Indren.

3 agosto. — Campione prelevato dalla neve superficiale, in basso del ghiacciaio. Ore 16. È nevicato nella mattina. Tempo sereno.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	1	2
8 "	4	7
20 "	7	7

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 6; ifomiceti colonie n. 8.

Le specie trovate sono: *M. aquatilis*, *Sarcina lutea*, *Penicillium glaucum*, Ifomiceto indeterminato.

Capanna Gnifetti (m. 3600).

6 agosto. — Si prelevano campioni di neve e di terriccio, prendendoli al piede della roccia a est della Capanna Gnifetti. Ore 8 ant. Tempo sereno.

Risultato dell'analisi bacterologica: Acqua di neve:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	1	0
8 "	3	1
12 "	3	3

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 5; ifomiceti colonie n. 4. Di più fu trovata una colonia di un blastomiceto che non potemmo identificare.

Terriccio: bacteri colonie n. 6; ifomiceti colonie n. 1.

Le specie trovate sono: Nell'acqua di neve: *B. flavescens*, *C. mesentericus*, un blastomiceto non identificato, *Penicillium glaucum*. — Nel terriccio: Ifomiceto indeterminato.

CRESTA DI ROCCIE AD EST DEL GHIACCIAIO DELL'INDREN (m. 3400).

6. agosto. — Si prelevano campioni di neve e di terriccio da un pendìo esposto a ponente. Ore 9 ant. Ultima nevicata 2 giorni addietro. Tempo sereno.

Risultato dell'analisi bacteriologica: Acqua di neve:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	2	0
8 »	2	0
12 »	5	1

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 9; ifomiceti colonie n. 2.
Terriccio: 9 colonie di ifomiceti.

Le specie trovate sono: Nell'acqua di neve: *Sarcina lutea*, *B. mesentericus*, *B. subflavus*, Ifomiceto indeterminato. — Nel terriccio: *Penicillium glaucum*, *Aspergillus flavus*.

PUNTA GNIFETTI (m. 4560).

8 agosto. — Si preleva un campione di neve dalla grande cornice, di fronte all'ingresso della Capanna Margherita, a circa 8 metri di distanza da questa. Tempo sereno e caldo. Da varî giorni non era nevicato.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono esaminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	3	0
8 »	17	0
12 »	24	2

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 40; ifomiceti colonie n 3.

Le specie trovate sono: *Sarcina candida*, *B. mesentericus*, *Sarcina lutea*, *M. aquatilis*, *Aspergillus flavus*, Ifomiceto indeterminato.

COLLE DEL LYS (m. 4200).

8 agosto. — Si preleva un campione di neve in un punto del grande pianoro. La neve ha una sottile cresta gelata e il campione si prende sotto la crosta. Tempo sereno.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	0	0
8 »	3	2
12 »	4	0

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 7; ifomiceti colonie n. 1.

Le specie trovate sono: *B. mesentericus* e *B. subflavus, Penicillium glaucum, Penicillium griseo-fulvum* (?)

PUNTA STRAHLING (m. 3116).

10 agosto. — Si prelevano campioni di neve e di terriccio da un pendìo esposto a nord. La neve fu presa a circa 10 cm. di profondità, dopo aver tolto con una spatola sterilizzata lo strato superficiale, che era coperto di detriti. Tempo buono, dopo due giorni di temporale.

Risultato dell'analisi bacteriologica: Acqua di neve:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	22	6
8 »	57	8
12 »	98	11

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 147; ifomiceti colonie n. 20.

Terriccio: innumerevoli colonie bacteriche di varie specie; molte colonie di ifomiceti.

Le specie trovate sono: Nell'acqua di neve: *B. flavescens, B. subtilis, M. candidus, Sarcina candida, B. mesentericus, Penicillium glaucum*, Ifomiceto indeterminato. — Nel terriccio: *B. flavescens, B. subtilis, M. candidus, Sarcina candida, B. mesentericus, Penicillium glaucum, Aspergillus fulvus*, Ifomiceto indeterminato.

LYSKAMM OCCIDENTALE (m. 4477).

13 agosto. — Si preleva un campione di neve sulla vetta. Ore 10 ant. Tempo sereno. Da cinque giorni non è nevicato.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	0	0
8 »	0	4
12 »	0	2
12 »	2	0
12 »	5	0

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 3; ifomiceti colonie n. 3.
Le specie trovate sono: *M. candidus*, *B. chryseus*, *Penicillium* indeterminato.

LYSKAMM ORIENTALE (m. 4529).

13 agosto. — Si preleva un campione di neve sulla vetta ove termina la cresta Sella, fuori del passo delle carovane alpinistiche. Esposizione del pendìo nord-est. Ore 10 ant.

In tutte le lastre seminate con 4, 8 e 12 goccie di acqua non si sviluppa che una colonia di *Penicillium glaucum*.

COLLE SESIA (m. 4350).

14 agosto. — Si preleva un campione di neve al sommo del colle sul pendìo volto ad ovest. Ore 9 ant. Vento del nord assai forte.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	5	2
8 »	4	2
12 »	20	1

Media per un cc. di acqua: bacteri colonie n. 16; ifomiceti colonie n. 4.
Le specie trovate sono: *M. fulvus*, *B. mesentericus*, *Penicillium* indeterminato.

SERACCHI SOTTO LA PUNTA PARROT.

14 agosto. — Si preleva un campione di ghiaccio a circa 4 cm. di profondità. Tutte le piastre seminate con 4, con 8, con 12 goccie rimangono sterili.

GHIACCIAIO DELL'INDREN.

14 agosto. — Si preleva un campione di ghiaccio da un crepaccio alla profondità di circa tre metri.

Risultato dell'analisi bacteriologica:

Quantità dell'acqua con cui furono seminate le piastre	N. delle colonie	
	bacteri	ifomiceti
4 goccie	3	0
8 »	1	1
12 »	3	0

Media delle colonie per un cc.: bacteri colonie n. 6; ifomiceti n. 2.
Le specie trovate sono: *B. albatus*, *Penicillium* indeterminato.

I risultati di queste indagini bacteriologiche si possono così riassumere:

1°. Le nevi superficiali e i detriti che si trovano tra le roccie, sulle cime delle alte montagne, contengono quasi sempre un certo numero di bacteri

e di ifomiceti. Solo il campione preso sulla cima del Lyskamm orientale era privo di microrganismi.

2°. Quanto più si scende in basso e ci si avvicina alla zona della vegetazione, tanto più aumenta il numero dei bacteri, che si trovano nei campioni di neve e di terriccio.

3°. Il numero dei germi è più elevato in vicinanza delle capanne continuamente abitate durante l'estate (Capanna Margherita).

4°. Le specie che abbiamo isolato sino ad ora sono:

Bactéri:

B. mesentericus	*M. aquatilis*	*S. lutea*
B. subflavus	*M. candidans*	*S. candida*
B. flavescens	*M. candidus*	
B. pseudoanthracis	*M. fulvus*	
B. chryseus		
B. subtilis		
B. albatus		

Ifomiceti:

Penicillium glaucum
Penicillium griseo-fulvum (Dierck)
Aspergillus fulvus. Altre specie che sono rimaste indeterminate.

Blastomiceti:

Una specie che non abbiamo potuto identificare.

5°. Queste specie sono in genere differenti da quelle trovate da Scofone nelle stesse regioni. Si deve dunque concludere, che la flora bacterica delle alte montagne varia assai di tempo in tempo, probabilmente a seconda delle condizioni meteorologiche nelle varie epoche e a seconda dei venti, che dominano nelle diverse stagioni.

Ci proponiamo per la prossima estate di proseguire queste ricerche, in modo più sistematico, a fine di studiare le variazioni giornaliere del contenuto bacterico della neve nel medesimo luogo e di determinare meglio le condizioni della flora microbica a diverse profondità nei ghiacciai.

BIBLIOGRAFIA.

Giacosa. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1883, vol. XIII.
Giacosa. Giornale della R. Accad. di Med. di Torino, vol. I, anno 58.
Scofone. Arch. per le Sc. Med., vol. XX, n. 12.
Scofone. Arch. per le Sc. Med., vol. XXI, n. 16.
Binot. C. R. de l'Acad. des Sciences, vol. 134, n. 11, pag. 673, 1902.
Migula. System der Bakterien. Jena, Fischer, 1900.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 6°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1909). Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. Fasc. 12°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 marzo 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 3 aprile 1910.* **N. 7.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 7°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Mi permetto in questa breve Nota di applicare (come esempio) i metodi dati nel mio precedente lavoro: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali* (¹) alla equazione integro-differenziale

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,t)}{\partial z^2} + \\
& + \int_t^\theta \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,\tau)}{\partial x^2} f(\tau,t) + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,\tau)}{\partial y^2} \varphi(\tau,t) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 u(x,y,z|\theta,\tau)}{\partial z^2} \psi(\tau,t) \right\} d\tau
\end{aligned}
$$

a cui ho già consacrato una Memoria precedente.

2. Cominciamo dal considerare l'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(1+z_1) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(1+z_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(1+z_3) = 0 .$$

Pongasi

$$1+z_1 = \frac{1}{1-\zeta_1} \ , \quad 1+z_2 = \frac{1}{1-\zeta_2} \ , \quad 1+z_3 = \frac{1}{1-\zeta_3}$$

(¹) Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 20 febbraio 1910.

cioè, supposto $|\zeta_i| < 1$,

$$\zeta_i = z_i - z_i^2 + z_i^3 - z_i^4 + \cdots$$

La (A) possiederà l'integrale particolare

$$U = \frac{\zeta}{\sqrt{x^2(1-\zeta_1) + y^2(1-\zeta_2) + z^2(1-\zeta_3)}}$$

in cui ζ è un parametro qualsiasi indipendente da x, y, z.

Per valori di $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ con modulo sufficientemente piccolo avremo lo sviluppo convergente

$$U = \frac{\zeta}{r}\left\{1 + \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}\left[\left(\frac{x}{r}\right)^2\zeta_1 + \left(\frac{y}{r}\right)^2\zeta_2 + \left(\frac{z}{r}\right)\zeta_3\right]^n\right\}$$

ove

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

3. Supponiamo ora che le funzioni $f(t, \tau)$, $\varphi(t, \tau)$, $\psi(t, \tau)$ siano fra loro permutabili e che $\chi(t, \tau)$ sia pure permutabile colle funzioni stesse; allora le regole date nel lavoro citato precedentemente ci permettono di ottenere la soluzione fondamentale della (A) nel modo seguente.

Poniamo (denotando col simbolo di potenze le operazioni di composizione)

$$F(\tau, t) = f(\tau, t) - f^2(\tau, t) + f^3(\tau, t) - \cdots$$
$$\Phi(\tau, t) = \varphi(\tau, t) - \varphi^2(\tau, t) + \varphi^3(\tau, t) - \cdots$$
$$\Psi(\tau, t) = \psi(\tau, t) - \psi^2(\tau, t) + \psi^3(\tau, t) - \cdots$$
$$\Theta(x, y, z|\tau, t) = \left(\frac{x}{r}\right)^2 F(\tau, t) + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \Phi(\tau, t) + \left(\frac{z}{r}\right)^2 \Psi(\tau, t).$$

La soluzione cercata della (A) sarà data da

$$u(x, y, z|\theta, t) =$$

$$(1)\qquad = \frac{1}{r}\left\{\chi(\theta, t) + \sum_1^\infty {}_n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!}\int_t^\theta \chi(\theta,\tau)\,\Theta^n(x,y,z|\tau,t)\,d\tau\right\}.$$

La convergenza delle serie considerate sussiste qualunque sia la grandezza dei valori assoluti delle funzioni f, φ, ψ, χ, purchè essi siano finiti.

Si vede facilmente che la espressione precedente soddisfarà la (A) anche se $\chi = 1$.

4. Nella Nota *Sulle equazioni integro-differenziali* [1] abbiamo data la soluzione fondamentale della equazione (A) senza fare l'ipotesi della per-

[1] Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 21 febbraio 1909.

mutabilità delle funzioni f, φ, ψ; essa si riduce facilmente alla (1) quando queste funzioni siano permutabili.

A questo proposito ricordiamo quanto fu osservato nel § 7 della Nota citata, cioè che i teoremi IV e V della Nota stessa e le loro conseguenze possono estendersi anche al caso di funzioni non permutabili e quindi la risoluzione generale delle equazioni integrali ed integro-differenziali può estendersi anche al caso in cui si abbia da che fare con funzioni non permutabili. Così, per esempio, se avremo l'equazione integrale [1]

$$a_m f^m + z_m \int_x^y \Phi_m(x, \xi) f^m(\xi, y) d\xi + a_{m-1} f^{m-1} + \\ + z_{m-1} \int_x^y \Phi_{m-1}(x, \xi) f^{m-1}(\xi, y) d\xi + \cdots \\ + a_1 f + z_1 \int_x^y \Phi_1(x, \xi) f(\xi, y) d\xi = z_0 \Phi_0(x, y),$$

in cui le potenze di f denotano operazioni di composizione, se sviluppiamo f in serie di potenze di $z_0, z_1, \dots z_m$, lo sviluppo sarà valido qualunque sia il modulo di questi parametri ed il valore assoluto delle costanti $a_1 \dots a_m$ e delle funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \dots \Phi_m$ (anche se queste funzioni non saranno permutabili fra loro) purchè i valori stessi siano finiti e $a_1 \gtrless 0$. Quando Φ_0, $\Phi_1, \dots \Phi_m$ saranno permutabili, la soluzione assumerà la forma semplice che discende dallo sviluppo in serie della radice d'una equazione algebrica.

5. L'operazione di composizione è estendibile al caso di funzioni di $2n$ variabili. Così potrà considerarsi l'integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n \, F_1(x_1, \dots x_n | \xi_1, \dots \xi_n) \, F_2(\xi_1, \dots \xi_n | y_1, \dots y_n) \, d\xi_1 \dots d\xi_n .$$

Supponiamo che

$$\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \dots \alpha_h = x_h, \alpha_{h+1} = 0, \alpha_{h+2} = 0, \dots \alpha_n = 0$$
$$\beta_1 = y_1, \beta_2 = y_2, \dots \beta_h = y_h, \beta_{h+1} = 1, \beta_{h+2} = 1, \dots \beta_n = 1.$$

Se il detto integrale sarà eguale a

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} d\xi_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} d\xi_n \, F_2(x_1, \dots x_n | \xi_1, \dots \xi_n) \, F_1(\xi_1 \dots \xi_n | y_1, \dots y_n) \, d\xi_1 \dots d\xi_n ,$$

F_1 e F_2 saranno permutabili.

Se $h \geqq 1$ si potranno estendere a questo caso le proposizioni date per la composizione di prima specie.

Sotto questo punto di vista la teoria svolta per l'equazione integro-differenziale (A) può estendersi al caso in cui in essa figuri un integrale multiplo anzichè semplice.

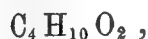
[1] Cfr. Nota citata, § 4, pag. 173.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce*. Nota XV del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Nella presente Nota diamo una breve descrizione di alcune esperienze che avevamo incominciato molti anni addietro e che ora abbiamo ripreso; esse trattano dell'azione reciproca che si impegna alla luce fra alcooli e chetoni e forma in certo modo la continuazione della nostra quinta Comunicazione [1].

Acetone ed alcool metilico. — Il miscuglio delle due sostanze nel rapporto di una parte del primo per due del secondo, in tutto 660 cc., rimase esposto per molto tempo alla luce. Il prodotto venne anzitutto distillato a b. m. e poi con vapore acqueo. Nella prima operazione passano segnatamente le sostanze rimaste inalterate; nella seconda un miscuglio di varî corpi, che vennero spostati dalla loro soluzione acquosa con carbonato potassico: essi bollono da 80° fino a 180°. Di questi non ci siamo occupati per ora.

Quello che a noi maggiormente interessava era la parte che resta indietro nella distillazione con vapore acqueo. La soluzione rosso-bruna venne anche essa saturata con carbonato potassico ed il prodotto estratto con etere. Esso venne distillato prima a pressione ridotta a 11 mm.: la porzione principale bolliva a 85°-90°, il resto fino a 110°. A pressione ordinaria la massima parte passò a 177°-180° (12 gr.). Per l'analisi si raccolse il prodotto bollente a 178°. La sua composizione corrisponde alla formula

$$C_4H_{10}O_2 ,$$

che è quella di un prodotto di addizione dell'alcool metilico e l'acetone. Esso è il *glicole isobutilenico*, preparato dal Nevolé [2] e studiato poi dal Wagner [3], che bolle, secondo questi autori, a 176°-178°.

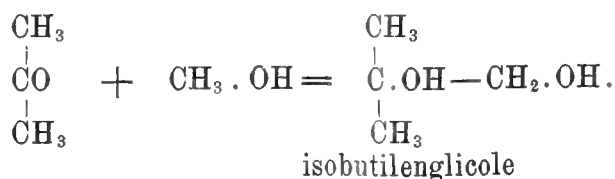
Per accertarne la costituzione, lo abbiamo bollito, secondo la indicazione di Wagner, con acido solforico ed abbiamo ottenuto l'isobutirraldeide, la quale a sua volta venne riconosciuta trasformandola in acido isobutirrico con ossido d'argento ed analizzando il suo caratteristico sale argentico.

Come si vede, la reazione che si impegna fra l'acetone e l'alcool metilico è in parte della stessa indole di quella che, parzialmente, avviene fra

(1) Questi Rendiconti, vol. 12, serie V, II pag. 235, 1903.
(2) Bul. de la Soc. chimique de France, *27*, pag. 63 (1877).
(3) Berichte, *21*, pag. 1232.

il benzofenone e l'alcool benzilico, da noi descritta nel 1903 e nel 1904 [1]: in quest'ultimo caso si forma il trifenilglicole di Gardeur.

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{matrix} + CH_3.OH = \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ C.OH-CH_2.OH. \\ | \\ CH_3 \end{matrix}$$

isobutilenglicole

Essa appartiene al tipo delle ossidazioni e riduzioni reciproche, che tanto spesso vengono favorite dalla luce ed è specialmente interessante perchè costituisce il caso più semplice e fondamentale della reazione fra alcooli e chetoni.

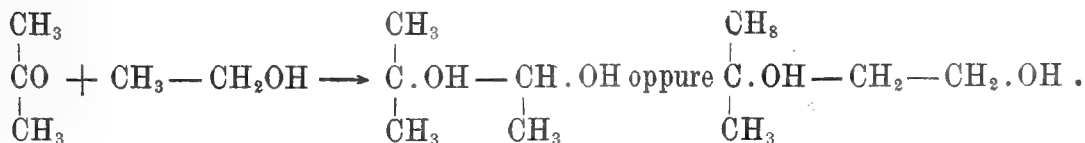
Acetone ed alcool etilico. — Alla luce venne esposto durante l'estate e l'autunno un miscuglio delle due sostanze fatto nel rapporto di una del primo per due del secondo: in tutto 2 litri. Il trattamento fu analogo a quello precedente: anche in questo caso non ci siamo occupati per ora della parte volatile col vapore acqueo, che passò fra gli 80 ed i 180°.

Il residuo della distillazione a vapore, lievemente acido, colorato in rossastro, venne saturato con carbonato potassico ed estratto con etere. Distillato alla pressione di 11 mm., passò in gran parte a 80-85° (26 gr.), il resto fra 85° e 110° (7,5 gr.). Rettificando a pressione ordinaria, si ebbe quale punto di ebollizione della parte principale 177°.

Il prodotto è un liquido dell'aspetto della glicerina, ed ha la composizione corrispondente a la formola

$$C_5H_{12}O_2,$$

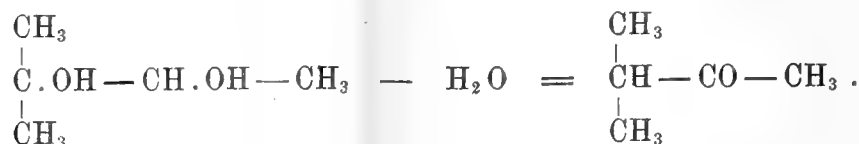
confermata dalla determinazione crioscopica in soluzione acquosa. Anche in questo caso dunque avviene un'addizione dell'alcool all'acetone, ma la formazione del glicol può farsi in due modi diversi:

$$\begin{matrix} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{matrix} + CH_3-CH_2OH \longrightarrow \begin{matrix} CH_3 & \\ | & \\ C.OH & -CH.OH \\ | & | \\ CH_3 & CH_3 \end{matrix} \text{ oppure } \begin{matrix} CH_3 \\ | \\ C.OH-CH_2-CH_2.OH. \\ | \\ CH_3 \end{matrix}$$

Il nostro prodotto era certamente un miscuglio, malgrado il suo punto di ebollizione abbastanza fermo: questo è provato dal suo contegno coll'anidride benzoica (benzoati) e coll'isocianato di fenile. La ricerca dovrà però essere ripetuta su più vasta scala. Si può però ammettere che nel prodotto da noi

[1] Vedi questi Rendiconti, loc. cit. e Gazzetta chimica, *34*, II, pag. 132 (1904).

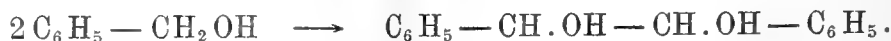
ottenuto sia stato presente il *glicole trimetiletilenico* del Wurtz, che corrisponde alle prime delle due formole e che bolle a 177° [1].

Per ossidazione con bicromato ed acido solforico abbiamo ottenuto acetone ed aldeide acetica; ma la prova migliore l'abbiamo avuta nel contegno coll'acido solforico diluito. Il glicol trimetiletilenico deve dare in questo modo il metilisopropilchetone:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ C.OH-CH.OH-CH_3 \\ | \\ CH_3 \end{array} - H_2O = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH-CO-CH_3 . \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

Bollendo il nostro prodotto con acido solforico diluito (1 a 5) e distillando ripetutamente per accumulare sulle prime porzioni la parte volatile, si ebbe, per spostamento con carbonato potassico, un chetone, che doveva essere il suddetto metilisopropilchetone, perchè esso dette il semicarbazone preparato recentemente da Trasciatti [2] nel laboratorio del prof. Balbiano. Questo autore trovò il punto di fusione a 110°, noi a 112°, cristallizzando il prodotto dall'etere petrolico, da cui si separa in una massa bianca cristallina. Ripetendo la stessa operazione con un campione del glicole preparato secondo Wagner [3] dal trimetíletilene, abbiamo ottenuto un semicarbazone fondente del pari a 112°, che mescolato in parti uguali al nostro, mantenne lo stesso punto di fusione.

Come si è detto, ci riserbiamo di ritornare su questa reazione per studiarla integralmente, ma ci sembra di qualche interesse estenderla anche ad altri chetoni, aldeidi ed alcooli per vedere quale sia il suo andamento generale.

Acetone ed alcool benzilico. — In questo caso non siamo riusciti ad ottenere un prodotto di addizione delle due sostanze. Sembra invece che avvenga soltanto l'ossidazione dell'alcool benzilico a spese dell'acetone, perchè si formano i due *idrobenzoini*

$$2\,C_6H_5-CH_2OH \longrightarrow C_6H_5-CH.OH-CH.OH-C_6H_5 .$$

La reazione corrisponde in certo modo a quella che la luce determina fra l'aldeide benzoica e l'alcool etilico, descritta nella nostra prima Nota [4] su questo argomento, reazione in cui si ossida l'alcool ad aldeide acetica e la benzaldeide si riduce dando gli idrobenzoini. Non abbiamo ricercato il prodotto di riduzione dell'acetone, che sarà stato forse l'alcool isopropilico.

[1] Beilstein, I, pag. 264.

[2] Gazzetta chimica, *29*, II, pag. 92.

[3] Berichte, *21*, pag. 1234.

[4] Questi Rendiconti, serie 5ª, vol. X, I, pag. 99 e Gazzetta chimica, *32*, I, pag. 435 (1902).

La soluzione di 92 gr. di alcool benzilico in 185 gr. di acetone fu esposta al sole durante i mesi di estate ed autunno. Il liquido senza colore risultante, spogliato dalla parte volatile a b. m., venne distillato a pressione ridotta (13 mm.) ed indi anche a vapore, per liberarlo dall'alcool benzilico rimasto inalterato. Quello che passa è alcool benzilico puro, dal punto di ebollizione 204-206°.

Il residuo si rapprende in una massa cristallina, che venne seccata sull'acido solforico (31,5 gr.) ed indi estratta ripetutamente a caldo con etere petrolico. La parte maggiore resta indietro ed è formata dall'*idrobenzoino*, che purificato dall'alcool, si presentò in pagliette splendenti dal punto di fusione 137-138°. Gli autori dànno come punto di fusione di questo corpo 138° (1).

La parte asportata dall'etere petrolico si dimostrò costituita dall'*isoidrobenzoino*; purificata dall'alcool e poi dal benzolo dette tavole senza colore dal punto di fusione 121°, mentre nella letteratura si trova per questa sostanza il punto di fusione 119-120° (2).

Anche sull'azione della luce sul miscuglio di etere ed acetone abbiamo delle vecchie esperienze incomplete, che devono essere riprese. Si forma un composto dal punto di ebollizione 139-140°, di cui non abbiamo ancora accertato la composizione.

Per ultimo ci è grato ricordare l'aiuto efficace e diligente, che, nella parte recente di questi studî, ebbero a prestarci i dott.ri Ugo Pestalozza e Luigi Vecchiotti.

Meccanica. — *Sulla resistenza che provano le superficie piane mobili nell'aria.* Nota di P. Burgatti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

La determinazione della resistenza esercitata dall'aria contro le superficie in moto (in particolare contro le superficie piane rettangolari) è divenuto un problema di grandissima importanza per la costruzione e il perfezionamento delle macchine aeree. Le numerose esperienze di quest'ultimi vent'anni, da Dines e Langley fino a quelle recenti dell'ing. Eiffel, furono istituite principalmente allo scopo di determinare il coefficiente K nella celebre formula di Newton

$$R = K\varrho\sigma v^2 ; \qquad (0)$$

ove ϱ è la densità, σ l'area della superficie (piana), v la velocità del moto rettilineo uniforme. Fra i risultati ottenuti regna un grande disaccordo; pur

(1) Beilstein, II, pag. 1100.
(2) Ibid., pag. 1102.

tenendosi al confronto dei valori medî. Che se poi si confrontano le singole esperienze, il disaccordo è tale che alcuni ritengono la formula di Newton in piena contraddizione con l'esperienza. Il valore di K si trova estremamente variabile; e non solo con l'angolo d'inclinazione e con la figura del piano, bensì con la velocità e con l'area.

Come si possono mettere d'accordo i risultati di tante esperienze, alcune condotte anche con notabile precisione? Quale formula si deve sostituire alla (0)? Ecco il problema che i rapidi progressi dell'aviazione impongono di risolvere con soddisfacente approssimazione.

Purtroppo la classica teoria dei fluidi è ancora impotente a portare un valido contributo al difficile problema, malgrado i bei lavori di Helmoltz, di Rayleygh e del prof. Levi-Civita. La teoria della scìa dà indicazioni insufficienti e non è in pieno accordo coi fatti. Dietro alla superficie in moto avvengono moti vorticosi (come ben risulta, per es., dalle belle esperienze di Albhorn), che la teoria non riesce a prevedere e ad analizzare, nemmeno con qualche approssimazione.

Mancando dunque per ora il sussidio della classica teoria, bisogna cercare se non sia possibile con un'analisi elementare, indipendente dalla teoria dei fluidi, portare qualche lume agli esperimentatori, affinchè possano trovare l'accordo desiderato dei loro risultati, rappresentandoli con una formula sufficientemente approssimata pei bisogni della pratica.

Questo è quanto ho tentato di fare. Lavoro modesto invero; pur nutro fiducia che gli esperimentatori, se vorranno saggiare le formule qui date, potranno riuscire a sintetizzare i loro risultati in modo soddisfacente.

1. Sia x una grandezza fisica dipendente da altre grandezze variabili x_1; x_2, ... x_r mediante una determinata relazione

$$(0) \qquad x = f(x_1, x_2, \dots x_r)$$

a coefficienti numerici. Questi coefficienti possono essere di varia natura: alcuni numeri assoluti, indipendenti dalle unità di misura che si scelgono; altri di dimensioni non nulli e rappresentanti perciò grandezze fisiche, che sono considerate costanti; delle quali però talune possono essere costanti universali (per es., la velocità della luce), altre si potrebbero anche considerare variabili, generalizzando la (0) (per es., la velocità del suono, che muta col fluido). Se la forma f è data e solo i coefficienti si devono determinare con l'esperienza, è facile stabilire la natura di quei coefficienti e talora di darne l'interpretazione fisica in rapporto al fenomeno che si studia; ma se la f è ignota e si deve costruirla con l'esperienza, nulla si può dire a priori sulla natura dei coefficienti; ed anzi per diminuire le difficoltà della ricerca sperimentale della f e per tentare di avvicinarsi alla verità con approssimazioni successive occorre fare a priori delle ipotesi sulla natura di quei coefficienti. Orbene, quando si crede d'aver preso in considerazione tutte le

variabili $x_1, x_2, \dots x_r$ da cui la x può dipendere (cosa del resto che non si può sempre affermare in modo sicuro, specialmente nei fenomeni complicati e poco noti), la cosa più naturale in un primo tentativo è di supporre che tutti i coefficienti della f sieno numeri assoluti.

Ciò posto, veniamo alla nostra questione. Consideriamo un piano rettangolare infinitamente sottile di lati a e b, col lato a perpendicolare alla direzione del moto (moto rettilineo uniforme di velocità v), e il lato b inclinato sulla stessa direzione dell'angolo θ. Per ragioni di simmetria si ammette giustamente che le pressioni del fluido sugli elementi della faccia anteriore e della posteriore del rettangolo si riducano a una risultante unica giacente in un piano parallelo alla direzione del moto e passante per la linea mediana del rettangolo (cioè il segmento parallelo al lato b passante pel centro di figura). Tale risultante è la così detta *resistenza* R.

Da quali variabili dipende questa R? Evidentemente da a, b, θ, v, dalla pressione p e dalla densità ϱ dell'aria in cui si esperimenta [1]; onde potremo scrivere

$$R = f(a, b, \theta, v, p, \varrho).$$

Poichè non si vedono altre variabili da cui possa dipendere f nel presente problema, ammetteremo che i coefficienti che entrano nella formazione di f sieno numeri assoluti. La natura e la giustificazione di questa ipotesi sono date appunto dalle considerazioni fatte di sopra; e la sua importanza risulterà ora, mostrando che essa permette subito d'assegnare a quella ignota funzione di 6 variabili una forma più semplice e perciò più accessibile all'esame sperimentale.

Introduciamo anzitutto le nuove variabili

$$l = \frac{a}{b} \quad , \quad \sigma = ab ;$$

talchè la R diventa

$$R = \Phi(l, \theta, \sigma, v, p, \varrho).$$

La σ è l'area del rettangolo; la l, rapporto di a a b, sarà detta *allungamento*. Le variabili l e θ hanno dimensioni nulle, e sono le sole.

Poichè R, ϱ, p hanno dimensione uno rispetto alla massa, e sono le sole grandezze dipendenti dalla massa, se si cambia l'unità di misura in guisa che m diventi λm, le R, p, ϱ diventano $\lambda R, \lambda p, \lambda \varrho$ e si avrà

$$\lambda R = \lambda \Phi = \Phi(l, \theta, \sigma, v, \lambda p, \lambda \varrho).$$

[1] La relazione fra p, ϱ e la temperatura dispensa dal considerare R funzione anche della temperatura.

Ciò richiede che Φ sia una funzione lineare omogenea in p e ϱ; potremo dunque scrivere

$$R = \Phi_1\left(l, \theta, \sigma, v, \frac{p}{\varrho}\right) \cdot \varrho .$$

Indicando con u la velocità del suono si ha per cose note

$$u = \sqrt{\sigma_0 \frac{p}{\varrho}} ,$$

ove σ_0 è una costante della natura di un'area. Di qui si trae

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{u^2}{\sigma_0} ;$$

e per conseguenza

$$R = \Phi_1\left(l, \theta, \sigma, v, \frac{u^2}{\sigma_0}\right) \cdot \varrho .$$

Ora qui R, v e u sono le sole grandezze dipendenti dall'unità di tempo; talchè se si cambia l'unità in guisa che t diventi $\frac{t}{\lambda}$ risulterà

$$\lambda^2 R = \Phi_1\left(l, \theta, \sigma, \lambda v, \lambda^2 \frac{u^2}{\sigma_0}\right) \varrho ,$$

ossia

$$\lambda^2 \Phi_1 = \Phi_1\left(l, \theta, \sigma, \lambda v, \lambda^2 \frac{u^2}{\sigma_0}\right) .$$

Ciò richiede che Φ_1 sia funzione quadratica omogenea in u e v; onde si avrà

$$R = \varphi\left(l, \theta, \sigma, \frac{1}{\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right) \cdot \varrho v^2 .$$

Non basta. Le quantità $l, \theta, \frac{u}{v}$, sono indipendenti dalle unità di misura; ma σ e σ_0 dipendono dall'unità lineare e hanno dimensione due, mentre R ha dimensione uno; si ha perciò, collo stesso ragionamento

$$\lambda^2 \varphi = \varphi\left(l, \theta, \lambda^2 \sigma, \frac{1}{\lambda^2 \sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right) ;$$

la quale dimostra che φ è omogenea di grado uno in σ e σ_0; talchè risulterà

$$R = \psi\left(l, \theta, \frac{\sigma}{\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2\right) \cdot \varrho \sigma v^2 .$$

Le grandezze l, θ e $w = \frac{\sigma}{\sigma_0}\left(\frac{u}{v}\right)^2$ avendo dimensioni nulle, resta come risultato definitivo del nostro ragionamento la formula

$$R = K(l, \theta, w)\, \varrho\sigma v^2. \tag{1}$$

Tanto per intenderci, chiameremo la w (o la $\sqrt{w}$) il *rapporto specifico*. È il rapporto di due tempi: il tempo $\frac{\sqrt{\sigma}}{v}$ impiegato dal rettangolo a percorrere la lunghezza $\sqrt{\sigma}$, diviso pel tempo $\frac{\sqrt{\sigma_0}}{u}$ impiegato dal suono a percorrere la lunghezza $\sqrt{\sigma_0}$.

Confrontando questa formula con quella di Newton, si vede che il K, in luogo d'esser costante, è funzione dell'allungamento, dell'inclinazione e del rapporto specifico. Sono così messe in evidenza le variabili da cui dipende quel K, che l'esperienza dimostra non potersi considerare costante, neppure per $\theta = 90^\circ$. Gli esperimentatori hanno anzi notato di più; e cioè, che il K varia con θ, colla forma del rettangolo (molti dicono col perimetro) e con qualche altra cosa che nessuno ha saputo definire. La (1) concorda con queste osservazioni e dà il significato preciso delle variabili da cui dipende K.

È anche da notare che la (1) è in accordo con le ben note esperienze dell'ing. Canovetti; il solo esperimentatore che, notata la variabilità di K con v, abbia abbandonata la formula di Newton. Infatti, egli ha rappresentato assai bene le sue esperienze con una R della forma (nel caso di $l = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$)

$$\alpha v^2 + \beta v;$$

la quale è del tipo della (1), perchè basta prendere (nel caso detto)

$$K = \lambda + \mu\sqrt{w}.$$

Infine facciamo osservare che la comparsa della velocità del suono in K (in una certa maniera) non ha del meraviglioso, perchè è ben noto che il fenomeno è diverso secondo che il mobile possiede velocità inferiore o superiore a quella del suono.

2. Nel caso di $\theta = 90^\circ$ (piano normale alla direzione del moto) possiamo scrivere

$$R = K(l, w)\, \varrho\sigma v^2.$$

Qui è da osservare che la resistenza non muta mutando la posizione del rettangolo nel suo piano, perchè il moto dell'aria è sempre lo stesso

rispetto al rettangolo; e poichè scambiando b con a si ottiene un rettangolo che differisce dal primo per la posizione, si deve avere necessariamente

$$K(l, w) = K\left(\frac{1}{l}, w\right).$$

Posto

$$l + \frac{1}{l} = m$$

si trae

$$K(m + \sqrt{m^2 - 1}, w) = K(m - \sqrt{m^2 - 1}, w),$$

la qual condizione richiede che K sia funzione di m e non di $\sqrt{m^2 - 1}$. Dunque, nel caso del piano normale si ha più precisamente

$$R = K(m, w)\, \varrho \sigma v^2. \tag{2}$$

Chiameremo *modulo di figura* il numero

$$m = l + \frac{1}{l} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{\sigma};$$

rapporto dell'area del quadrato costruito sulla diagonale all'area del rettangolo.

Di qui risulta ancora che nella formula generale (1) la l deve entrare in K, in guisa che per $\theta = 90°$ si riduca a una funzione del modulo. Infine è da notare che deve essere

$$K(l, \theta, w) = K(l, \pi - \theta, w).$$

L'ing. Soreau, nelle sue belle ricerche sui problemi dell'aviazione [1], è il solo che abbia intuita la dipendenza di K dall'allungamento (egli però chiama allungamento il numero $h = \frac{l-1}{l+1}$), e ha proposta la formula (indipendente da w)

$$K = \lambda \operatorname{sen} \theta \left\{ 1 + \frac{1 - h \operatorname{tang} \theta}{\frac{1}{(1+h)^2} + \frac{2h}{1+h} \operatorname{tang} \theta + 2 \operatorname{tang}^2 \theta} \right\},$$

che traduce assai bene l'esperienze di Langley.

Ma questa formula non è soddisfacente; perchè, a parte la indipendenza da w, non soddisfa alle condizioni

$$K\left(l, \frac{\pi}{2}, w\right) = K(m, w) \quad , \quad K(l, \theta, w) = K(l, \pi - \theta, w);$$

onde non potrà rappresentare altrettanto bene tutte le altre esperienze.

[1] *État actuel et avenir de l'aviation* (Société des Ingegnieurs civils, Bull. 1908).

3. Importante per la pratica è anche la determinazione del punto di applicazione (centro di pressione) e della direzione di R; e notabili sono in proposito l'esperienze recenti degli ing. Rateau e Eiffel. Ma anche qui non sono state trovate formule soddisfacenti.

Indichiamo con x la distanza del centro di pressione dal centro di figura, contata positivamente verso il lato anteriore; con α l'angolo che la direzione di R fa con la normale condotta sulla faccia posteriore del rettangolo. Le x e α dipenderanno dalle stesse variabili $a, b, \theta, v, p, \varrho$ da cui dipende la grandezza di R; ed è naturale e coerente fare su queste funzioni la stessa ipotesi fatta in principio sulla f. Allora con ragionamenti analoghi a quelli fatti precedentemente si trova

$$(3) \qquad \begin{aligned} x &= K_1(l, \theta, w)\sqrt{\sigma} \\ \text{sen}\,\alpha &= K_2(l, \theta, w). \end{aligned}$$

Come si vede, per l, θ e w costanti, α è costante e la x varia proporzionalmente alla radice quadrata dell'area.

Le tre funzioni K, K_1, K_2 definiscono la resistenza in grandezza, direzione e punto d'applicazione; ed è la ricerca di esse che costituisce il problema sperimentale; il quale resta così ben precisato; e non è piccola cosa.

Concludo queste brevi osservazioni invitando gli esperimentatori a provare di mettere d'accordo i loro risultati con formule del tipo (1), (2) e (3).

Meccanica. — *Moti di un liquido che lasciano inalterata la distribuzione locale delle pressioni.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un liquido soggetto ad assegnate forze di massa e dotato di un moto qualsiasi. È noto che imprimendo a tutta la massa liquida una traslazione uniforme d'insieme le condizioni dinamiche rimangono invariate.

In particolare resta inalterata la distribuzione locale delle pressioni.

Sorge a questo punto spontanea la domanda: esistono altri moti stazionari i quali non influiscono affatto sopra la distribuzione locale delle pressioni?

La risposta — che forma oggetto della presente Nota — è affermativa.

Si trova in modo facile ed esauriente che nei moti in questione:

a) le traiettorie delle molecole liquide sono rette appartenenti ad una congruenza rettilinea solenoidale [1], o, in particolare, sono rette parallele;

b) ciascuna retta scorre su se stessa con velocità costante; il valore

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, questi Rendiconti, seduta del 20 marzo 1910.

assoluto di tale velocità potendo variare da retta a retta in modo del tutto arbitrario.

Un caso particolare assai semplice ed espressivo, ci è offerto dalla corrente di un canale i cui filetti sono rette parallele fra loro ed al fondo (nonchè alle pareti ed alla superficie libera del canale) e che scorrono su se stessi, ciascuno essendo dotato di una velocità propria, e indipendente da quella degli altri filetti.

È chiaro che correnti di tale fatta si possono riguardare come vere e proprie *correnti spontanee* [1].

Non è privo di interesse notare che se ci si pone lo stesso problema per i fluidi comprimibili si perviene al seguente risultato. Le linee di corrente costituiscono una congruenza rettilinea, la cui *anormalità* è legata in modo semplice alla densità del fluido; la velocità si mantiene, ancor qui, costante sopra ciascuna retta, variando soltanto — in modo arbitrario — dall'una all'altra.

Ne viene che assegnata a priori la congruenza rettilinea delle linee di corrente, le forze di massa non si possono più assegnare preventivamente, come avviene per i liquidi.

1. Sia $\mathbf{F}$ la forza di massa unitaria del liquido, ϱ la densità (costante), p la pressione e $\mathbf{v}$ la velocità dei punti della massa liquida.

Le equazioni indefinite del moto sono, con notazioni vettoriali ben note:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p, \tag{1}$$

e l'equazione di continuità che nel nostro caso ($\varrho =$ costante) diviene

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{2}$$

Affinchè lo stato di moto del liquido non influisca sulla distribuzione delle pressioni *è necessario e sufficiente*, come scende dalla (1), *che oltre la* (2) *si abbia*

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Da questa intanto risulta che sopra ciascuna linea di corrente è $\mathbf{v} =$ costante, cioè: le linee di corrente costituiscono una congruenza rettilinea e di più su ciascuna retta della congruenza la velocità è costante in valore assoluto. Avremo pertanto

$$\frac{dv}{ds} = 0, \tag{3}$$

sopra ogni retta della congruenza, designando con ds l'arco elementare.

[1] Vedi Cisotti, *Sopra le correnti liquide spontanee*, questi Rendiconti, vol. XIX (1910), pp. 10-14 e 81-83.

Detto **R** un vettore unitario diretto come la generica retta della congruenza (le componenti di **R**, rispetto ad un prefissato sistema di riferimento, non sono altro che i coseni direttori della retta stessa), potremo scrivere

$$(4) \qquad \mathbf{R}^2 = 1 \quad , \quad \frac{d\mathbf{R}}{ds} = 0 \quad , \quad \mathbf{v} = v\mathbf{R} .$$

Per queste la (2) diviene

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(v\mathbf{R}) = \frac{dv}{ds} + v \operatorname{div} \mathbf{R} = 0 ,$$

e per la (3) — se si esclude il caso privo di interesse in cui $v = 0$ dappertutto —

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = 0 .$$

Da quest'ultima scende che *la congruenza rettilinea delle linee di corrente dev'essere solenoidale* [1], *oppure formata da rette parallele* (**R** costante).

Da quanto precede si può raccogliere che il moto del liquido dev'essere tale che le linee di corrente costituiscano una congruenza rettilinea solenoidale (oppure sono rette parallele), e di più lungo ciascuna retta della congruenza il valore assoluto della velocità sia costante, pur potendo variare dall'una all'altra in modo arbitrario.

È manifesto che tali condizioni sono anche sufficienti ad assicurarci che un moto in tal guisa definito, non influisce minimamente sopra la distribuzione locale delle pressioni.

2. Osservazione. — Se il fluido è comprimibile la densità ϱ non è più costante, ed allora la (2) va sostituita — beninteso qualora si considerino i soli moti permanenti — colla seguente

$$(2') \qquad \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 .$$

La (1) continua a sussistere e quindi possiamo ancora qui dire che le linee di corrente costituiscono una congruenza rettilinea, sopra ogni retta della quale continua a valere la (3).

La (2'), per le (4), diviene

$$\frac{d(\varrho v)}{ds} + \varrho v \operatorname{div} \mathbf{R} = 0,$$

ovvero per essere, tenuto conto della (3),

$$\frac{d(\varrho v)}{ds} = v \frac{d\varrho}{ds} ,$$

[1] Cfr. Cisotti, *Sopra le congruenze rettilinee solenoidali*, loc. cit.

avremo (escludendo il caso statico, $v = 0$)

$$\frac{d\varrho}{ds} + \varrho \operatorname{div} \mathbf{R} = \operatorname{div} (\varrho \mathbf{R}) = 0 . \tag{2''}$$

Cerchiamo di soddisfare alle (4) e (2'') nel modo più generale.

Una distribuzione vettoriale $\mathbf{R}$ soddisfacente alle due prime delle (4) definisce una congruenza rettilinea. È facile desumere da esse che $\operatorname{rot} \mathbf{R}$ è proporzionale ad $\mathbf{R}$.

Chiamando A il coefficiente di proporzionalità, avremo

$$\operatorname{rot} \mathbf{R} = \mathrm{A}\mathbf{R} \quad (5)$$ (1).

La quantità scalare A è l'*anormalità* della congruenza considerata $\mathbf{R}$.

Dalla precedente relazione si ricava

$$\operatorname{div} (\mathrm{A}\mathbf{R}) = 0 ,$$

che confrontata colla (2'') ci permette di scrivere

$$\varrho = \alpha \mathrm{A} ,$$

designando α una funzione costante sopra ciascuna retta della congruenza e del resto arbitraria.

Avendosi dalla (5), per la prima delle (4),

$$\mathrm{A} = \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{R} ,$$

sarà

$$\varrho = \alpha \mathbf{R} \times \operatorname{rot} \mathbf{R} .$$

Questa definisce ϱ in funzione di una prefissata congruenza rettilinea.

Dovendosi avere per la (1)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p ,$$

qualora sia assegnata la equazione fondamentale del fluido, la $\mathbf{F}$ risulta pure definita.

Matematica. — *Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio E. D'Ovidio.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Cfr. Levi-Civita, *Complementi al teorema di Malus-Dupin*, questi Rendiconti, vol. IX, 1° sem. 1900, pag. 186.

Matematica. — *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* Nota del prof. M. PANNELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Il fenomeno Majorana in campi magnetici prodotti da scariche oscillatorie.* Nota di L. TIERI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

L'interpetrazione di Schmauss [1] sulla birifrangenza magnetica del ferro dializzato, secondo la quale questo fenomeno è dovuto all'orientazione che assumono nel campo magnetico le particelle in sospensione nella soluzione colloidale, interpetrazione completata da Cotton e Mouton [2] con l'attribuire l'inversione della birifrangenza da positiva a negativa col crescere del campo, all'esistenza di due specie di granuli in sospensione nel liquido: gli uni a birifrangenza puramente positiva (granuli grandi), gli altri a birifrangenza puramente negativa (granuli piccoli), fa subito sorgere il dubbio che il fenomeno della birifrangenza magnetica non debba essere istantaneo, come è istantaneo il fenomeno elettro-ottico di Kerr.

Esporrò in questa Nota i risultati da me ottenuti studiando la birifrangenza magnetica del ferro dializzato in campi prodotti da scariche oscillatorie.

Avendo a disposizione moltissimi campioni di ferro dializzato, mi sono limitato, data l'indole delle mie ricerche, al solo studio dei diversi campioni di ferro Bravais vecchio, essendo questo il liquido più attivo. Per ogni campione fu costruita la curva che dà la birifrangenza in funzione dei campi, per gli strati superficiali e per gli strati al fondo. Date le condizioni in cui sperimentavo, gli strati superficiali furono studiati senza diluirli, quelli al fondo furono diluiti con acqua distillata e ridotti ad avere, a parità di spessore, su per giù lo stesso grado di trasparenza degli strati superficiali. I campi erano generati da un'elettrocalamita tipo Faraday le cui facce polari, di forma tronco-conica, erano alla distanza di 1 cm. Determinati i campi in funzione delle intensità delle correnti per mezzo di una spiralina

[1] Schmauss, Drude's Annalen, t. X, pag. 658; t. XII, pag. 186.
[2] Cotton e Mouton, Ann. de Chemie et de Phys., VIII serie, t. XI, 1907, pag. 145.

di bismuto di Lenard, la determinazione di essi fu ricondotta a quella dell'intensità della corrente che circolava nell'avvolgimento dell'elettrocalamita.

Il liquido in esame veniva posto in una provetta di 8 mm. di diametro. La porzione di questa, posta fra le espansioni polari, era forata normalmente alle linee di forza e limitata da due lastrine di vetro da microscopio fra loro parallele. Lo spessore del liquido da esse limitato risultava di mm. 8,5.

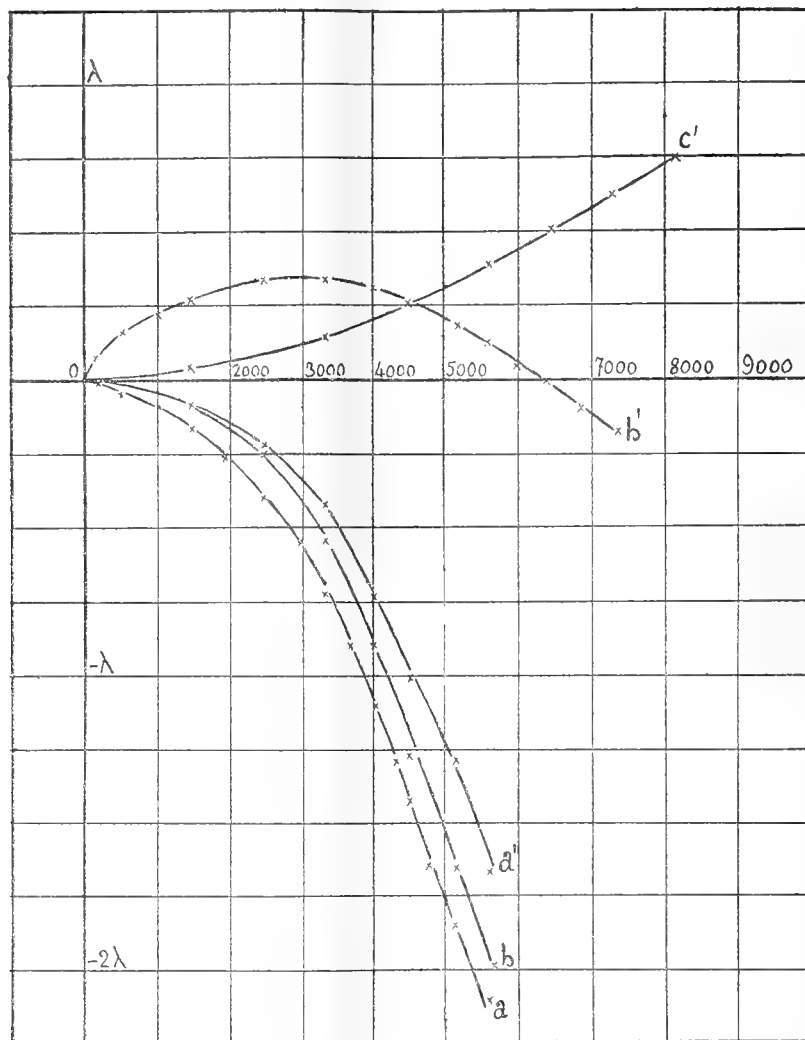



Fig. 1.

Come sorgente luminosa adoperavo una lampadina Nernst, la luce della quale attraversava un primo nicol con la sezione principale a 45° con la direzione del campo, poi il liquido (da cui emergeva luce sensibilmente rossa), un compensatore di Babinet e finalmente il secondo nicol incrociato col primo. Una lente permetteva di veder nitide ed ingrandite le frange. Per ogni valore del campo determinavo il valore della birifrangenza in lunghezze d'onda, calcolando lo spostamento che le frange subivano. Nella fig. 1 sono disegnate le curve dei liquidi più attivi, riportando come ascisse i campi in gauss

e come ordinate le lunghezze d'onda nel rosso. Effettivamente la luce non era monocromatica; però le misure di birifrangenza si poterono eseguire con sufficiente esattezza, perchè esse furono al massimo estese a poco più di due lunghezze d'onda. Le curve *a* ed *a'* si riferiscono a ferro Bravais vecchio probabilmente di 15 anni, la prima agli strati superficiali, la seconda agli strati al fondo; la *b* si riferisce agli strati superficiali e la *b'* agli strati al fondo di ferro Bravais di 10 anni; finalmente la *c'* si riferisce agli strati al fondo di un altro campione di ferro Bravais di 10 anni. Dello strato superficiale di questo liquido non fu costruita la curva, perchè esso non presentava birifran-

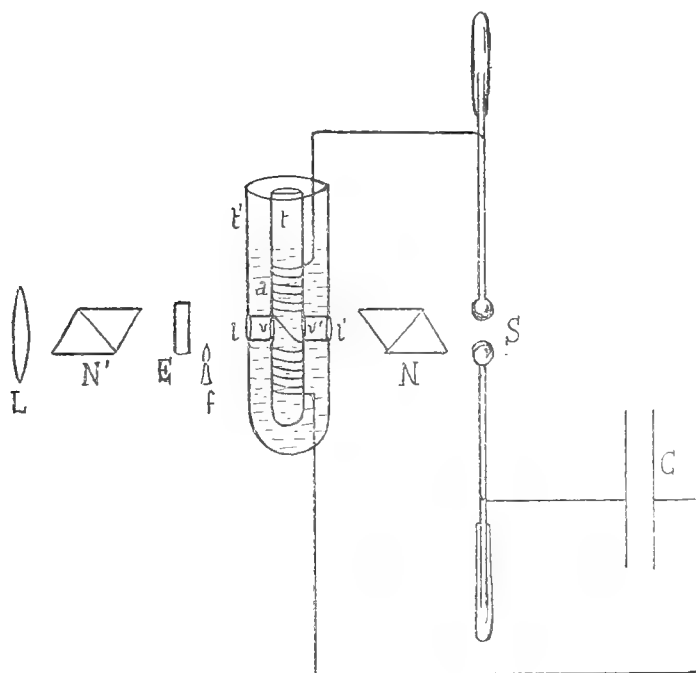



Fig. 2.

genza apprezzabile. Le curve *b* e *b'* ed altre, tralasciate per brevità, confermano i risultati di Cotton e Mouton: gli strati superficiali del ferro Bravais, lasciato lungo tempo in riposo, sono ricchi di granuli che dànno birifrangenza negativa; quelli al fondo sono ricchi di granuli a birifrangenza positiva. Vi sono però dei campioni di ferro Bravais (curve *a* ed *a'*) molto ricchi di particelle a birifrangenza negativa, altri (curva *c'*) molto ricchi di granuli a birifrangenza positiva.

Rapidità con cui si manifesta il fenomeno Majorana. — Il dispositivo di cui ho fatto uso è simile a quello che servì al prof. Majorana [1] per le stesse ricerche. Esso è rappresentato schematicamente dalla figura 2. Il condensatore *C*, costituito da 4 grandi bocce di Leida e della capacità di

[1] Rend. Acc. dei Lincei, V serie, t. XI, 2° sem., 1902, pag. 139.

circa 0,015 microfarad, può continuamente caricarsi per mezzo di una macchina elettrica.

In serie col condensatore son posti uno spinterometro S con palline da 1 cm. di diametro, poste alla distanza di 12 mm., e un'auto-induzione a, la quale è costituita da tre strati di filo di rame da un millimetro, di 12 spire ciascuno e lunga cm. 3,5. Essa è avvolta su un tubicino di vetro t (in cui va posto il liquido birifrangente) delle stesse dimensioni del tubicino adoperato per le precedenti esperienze. I tre strati di filo di rame sono separati fra loro da bastoncini di vetro. Tutte le volte che in S scocca la scintilla, perchè la scarica percorra la spirale a, questa è nell'interno di un altro tubo t' ripieno di olio di lino cotto. Lo spinterometro è posto in modo che la luce proveniente dalla scintilla, attraversato il nicol analizzatore N a 45° rispetto all'asse della provetta, attraversi il liquido contenuto in questa e limitato dalle due laminette di vetro v e v', il compensatore di Babinet E ed il secondo nicol N'. La lente L permette di vedere le frange nitide ed ingrandite. Ponendo all'inizio una sorgente di luce continua in S, si dispongono le cose in modo da veder nette le frange. Sopprimendo poi la sorgente di luce continua, e facendo funzionare la macchina elettrica, se la provetta contiene il liquido a forte birifrangenza negativa che ha dato la curva a, tutte le volte che in S scocca la scintilla, il campo magnetico prodotto dalla bobina a rende birifrangente il liquido e si osservano le frange spostate di mezza lunghezza d'onda (birifrangenza negativa). La nuova posizione delle frange può essere nettamente precisata, malgrado esse siano alquanto torbide. È bene notare che, per vedere nettamente il fenomeno, è necessario essere al buio. Per il conveniente accomodamento dell'occhio basta porre in vicinanza del compensatore una piccola fiamma f, che permetta appena di vedere i filini del compensatore stesso.

Ponendo nella provetta il liquido che ha dato la curva b, si ottiene, a parità delle altre condizioni, uno spostamento delle frange di $^1/_3$ di lunghezza d'onda (birifrangenza negativa).

Con i liquidi a cui si riferiscono le curve b' e c', non si ha nessuno spostamento apprezzabile.

Togliendo però il compensatore e la lente L, si osserva per ogni scintilla in S, una debole birifrangenza per il liquido della curva b'. Si riconosce facilmente che tale birifrangenza è negativa, poichè essa può in parte compensarsi ponendo fra i due nicol una lamina di vetro (negativo per compressione) convenientemente compressa in direzione normale alle linee di forza del campo generato dalla scarica. Il liquido della curva c' invece non assume birifrangenza di sorta nemmeno se la distanza esplosiva si porta a 17 mm.

Essendo approssimativamente la capacità del condensatore C di farad 15×10^{-9}, e l'autoinduzione della bobina a di henry 5×10^{-6}, sarà:

$$T = 2\pi \sqrt{LC} = 17 \times 10^{-7}.$$

Dunque, in campi prodotti da scariche oscillatorie, con periodo dell'ordine 17×10^{-7}, soltanto i liquidi a birifrangenza negativa sono attivi; e la massima birifrangenza che acquistano, per distanza esplosiva di 12 mm., corrisponde alla birifrangenza di essi per un campo costante di circa 2800 gauss.

Il fatto che durante la scarica le frange si manifestano lievemente torbide, ma nettamente spostate dalla posizione normale, dimostra che nella massima parte del tempo in cui dura la luminosità della scintilla, le frange non seguono col loro movimento le vicissitudini del campo magnetico rapidamente variabile. Se così fosse, esse eseguirebbero delle oscillazioni smorzate unilaterali, tornando in ciascuna di queste nella posizione di riposo; e si osserverebbe perciò una frangia larga, avente origine nella posizione normale e sfumata solo da una parte di essa. Pare perciò che il campo, oscillante secondo una sinusoide smorzata, determini una birifrangenza che rapidamente raggiunge un valore massimo, intorno al quale esegue, se mai, solo delle lievissime oscillazioni, e torna a zero probabilmente quando la luminosità della scintilla è già cessata.

Restano invece perfettamente immobili le particelle più grosse cui è dovuta la birifrangenza positiva di alcuni liquidi.

Ringrazio vivamente il prof. Corbino per i preziosi consigli di cui mi fu largo in questa ricerca.

Fisica terrestre. — *Le anomalie costiere di gravità e la teoria elastica dell'isostasi.* Nota di Luigi De Marchi, presentata dal Socio Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Sul boro colloidale* (1). Nota di F. Ageno ed E. Barzetti, presentata dal Socio R. Nasini.

I primi accenni all'esistenza di soluzioni colloidali pare che si riferiscano appunto al boro colloidale. Davy nel 1809 fondendo acido borico con potassio metallico per ottenere il boro, notò che durante il lavaggio, man mano che venivano eliminati i sali potassici, il boro passava in soluzione con color giallo tendente leggermente al verde. Un'osservazione identica fu fatta da Wöhler e S. Claire Deville nel 1858; e, secondo Berzelius anche Thénard e Gay-Lussac notarono già nel 1825 l'identico fenomeno che essi ammisero fosse dovuto alla presenza di alcali, sebbene il boro sia insolubile in questi ultimi.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale dell'Università di Pisa.

La formazione dell'idrosol di boro pare adunque un fenomeno di dispersione meccanico-chimica, dovuto cioè all'attacco della sostanza in istato di finissima suddivisione mediante appropriato solvente, in questo caso alcali. Si forma così lo ione che per successivo lavaggio passa ad idrosol. Il lavaggio serve a diminuire la concentrazione di tale ione sino al limite di formazione dell'idrosol.

Un secondo metodo per ottenere sempre per via meccanico-chimica l'idrosol di molti elementi fra cui del boro, venne sommariamente indicato da Küzel (Verfahren zur Herstellung kolloider Elemente: Oesterr-Patent. K 12 p 2753/06. 1906).

La sostanza finalmente polverizzata viene sottoposta per lungo tempo, alternativamente riscaldando e agitando fortemente all'azione di soluzioni diluite di solventi di carattere acido o basico. L'azione meccanica e chimica ha qui per iscopo di aumentare la concentrazione dello ione che forma l'idrosol.

Noi abbiamo ottenuto soluzioni colloidali di boro, discretamente concentrate, e con tutta facilità preparando il boro amorfo col metodo di Goldschmidt; in sostanza quindi col metodo analogo a quello seguìto da Davy. Una mescolanza intima di anidride borica (tre parti) e magnesio metallico in polvere (una parte) in crogiuolo di terra refrattaria vien riscaldata al rosso, in un fornello a gas. La reazione si inizia allora con violenza e la temperatura sale al calor bianco. La massa fusa è costituita da un miscuglio di boro amorfo, borato e boruro di magnesio, ossido di magnesio e anidride borica. Ridotta in polvere si tratta a caldo con grande eccesso di acqua acidulata con acido cloridrico, e dopo decantazione con acido cloridrico concentrato all'ebullizione per eliminare il magnesio. Si riprende con acqua distillata e dopo cinque o sei decantazioni il boro passa in soluzione.

Le soluzioni così ottenute sono discretamente concentrate ed assai stabili tanto che si possono mantenere per dei mesi. Il loro colore è bruno rossastro. La loro natura colloide è messa in rilievo dai fatti seguenti:

Esse presentano con tutta evidenza il fenomeno di Tyndall.

Circa 300 cc. di una di queste soluzioni furono elettrolizzati fra due elettrodi di platino (5×4) distanti pochi centimetri con una differenza di potenziale di 220 volts. La resistenza era grandissima giacchè un galvanometro in serie indicava il passaggio di $\frac{1}{10}$ di ampère. Dopo circa un'ora l'elettrodo positivo si ricoprì completamente di un leggero strato di boro amorfo, mentre il negativo rimase perfettamente terso. Il boro colloidale è perciò elettricamente negativo.

L'acqua ossigenata vien decomposta dal boro colloidale, ma contemporaneamente questo si ossida ad acido borico.

Deboli tracce di elettroliti, bastano per precipitarlo completamente dalla soluzione in breve tempo.

Chimica. — *Sulla picrotossina.* Nota di F. ANGELICO, presentata dal Corrispondente ANGELO ANGELI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Azione della luce sull'aldeide benzoica in presenza di iodio.* Nota di LUIGI MASCARELLI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Lo studio del comportamento dell'aldeide benzoica in presenza di iodilbenzolo e sotto l'azione della luce, che già altra volta (¹) ebbe ad occuparmi aveva posto in evidenza la formazione di alcuni prodotti assai interessanti, fra cui vennero allora caratterizzati lo stilbene e un corpo solido, poco solubile negli ordinarî solventi, ma cristallizzabile dall'acido acetico, sostanza questa (p. f. 250°) che l'analisi elementare e la determinazione del peso molecolare fecero ritenere come un trimero dell'aldeide benzoica stessa. Contemporaneamente ebbi anche un prodotto oleoso, il quale, per la esigua quantità ottenuta, non potè essere studiato oltre.

Siccome Ciamician e Silber nelle loro ricerche intorno all'azione chimica della luce ebbero ad osservare, che l'aldeide benzoica pura dà, se esposta alla luce, prevalentemente una materia resinosa, che, secondo detti Autori, è un tetramero dell'aldeide stessa (²): mentre solo piccole quantità si trasformano nel trimero in seguito a prolungata insolazione, così era lecito nel caso mio pensare ad una azione catalitica del iodilbenzolo o di alcuni dei suoi prodotti di decomposizione.

Le ricerche che ora esporrò furono appunto provocate da questa ipotesi.

È noto dalle esperienze finora compiute da Ciamician e Silber, che i principali prodotti originantisi per azione della luce sulla aldeide benzoica pura sono: acido benzoico, idrobenzoino, un tetramero e piccole quantità di trimero. Se invece si espone al sole la stessa aldeide assieme con iodilbenzolo si hanno: acido benzoico in buona quantità, tracce di idrobenzoino, un trimero, il tetramero di Ciamician e Silber, stilbene ed un olio non caratterizzato.

Per meglio studiare l'andamento della reazione era necessario ripetere le esperienze con quantità maggiori di sostanza e con un'esposizione alla luce solare abbastanza prolungata. È per quest'ultima ragione, che le ri-

(¹) Rend. R. Acc. Lincei, *15*, II, 375 (1906) e Gazz. Ch. It., *36*, II, 670 (1906).
(²) Rend. R. Acc. Lincei, *18*, I, 216 (1909).

cerche presenti, le quali sono una continuazione di quelle pubblicate nel 1906 (¹) compaiono così in ritardo di tempo.

Le esperienze furono fatte contemporaneamente con aldeide benzoica e iodosobenzolo, aldeide e iodiobenzolo, aldeide e iodio.

La durata della insolazione fu varia a seconda che ritenni essere compiuta la reazione.

Fin d'ora posso dire, salvo ad esporre i particolari nella parte sperimentale, che l'andamento generale della reazione è unico in tutti i casi, la sola differenza sta nei rapporti relativi alle quantità dei varî prodotti, che ne prendono origine. Ebbi il migliore risultato operando in presenza di iodio, poichè qui il rendimento in prodotto oleoso, che, come si vedrà, era il più importante fra quelli non ancora studiati, fu maggiore. La presenza del iodio ha con ogni probabilità per effetto di impedire che il processo di polimerizzazione della aldeide (formazione del tetramero resinoso) si compia con quella rapidità, che non permette di arrestarsi ai prodotti intermedî. Difatti mentre Ciamician e Silber (²) ottennero gr. 82,5 di tetramero da 100 gr. di aldeide pura, io ne ebbi, operando in presenza di iodio, pochi grammi (circa 5 %) inoltre ottenni più dell'1,5 % di trimero e in massima parte un prodotto oleoso bollente a 189-191° e 18^{mm} che si mostrò essere un *dimero* dell'aldeide benzoica.

L'interpretazione data circa il modo di agire del iodio è in buona concordanza coi risultati avuti impiegando iodilbenzolo, iodosobenzolo e iodiobenzolo. Se facciamo astrazione dai prodotti, che si originano solo in piccola quantità, possiamo osservare come i tre polimeri dell'aldeide benzoica si formino in tutte queste esperienze, ma in quantità variabile. In presenza di iodilbenzolo, iodosobenzolo e iodiobenzolo si ottiene ancora buona quantità dello stesso tetramero resinoso, che già si forma esponendo l'aldeide pura, ma contemporaneamente si ha il trimero in quantità maggiore che non quando si operi con sola aldeide, inoltre si produce, sebbene in piccola misura, il dimero liquido non osservato finora coll'aldeide pura. Ciò si comprende se si pensa, che tal fatto può dipendere dalle traccie di iodio, che tutti i prodotti accennati sono in grado di liberare. È noto invero che il iodilbenzolo ed il iodosobenzolo tendono a trasformarsi in iodiobenzolo:

$$C_6H_5JO_2 \longrightarrow C_6H_5JO \longrightarrow C_6H_5J\,;$$

il quale ultimo, come tutti gl'ioduri organici, col tempo si altera ponendo in libertà tracce di alogeno.

Comunque sia è fuori dubbio ormai che l'aldeide benzoica può in determinate condizioni e specie sotto l'azione della luce polimerizzarsi in modo

(¹) L. c.
(²) Rend. R. Acc. Lincei, *18*, I, 216 (1909).

da fornire tre polimeri di progressiva complessità molecolare. Le proprietà fisiche di questi polimeri stanno in buon accordo colla loro complessità molecolare, come si vede dal seguente specchio:

Aldeide benzoica: liquido mobile, incoloro, p. eb. 179°.
Dimero : liquido più denso, incoloro se puro, lievemente giallo per tracce di impurità, p. eb. 189-191° a 18^{mm} (Mascarelli).
Trimero : solido cristallino, bianco, p. f. 250° (Mascarelli).
Tetramero : solido, polvere amorfa, bianco o leggermente giallo, p. f. 160-170° (Ciamician e Silber).

Parte sperimentale.

Siccome i migliori risultati furono quelli avuti con iodio e benzaldeide così incomincio da queste ricerche. Il modo di procedere nell'esame del contenuto dei varî tubi essendo analogo per tutti mi limiterò a descrivere con maggiori particolari il più importante.

Aldeide benzoica e iodio: Le esperienze furono intraprese esponendo al sole saldati in tubo di vetro gr. 50 di aldeide e gr. 0,5 di iodio dal 12 luglio 1906 al 7 gennaio 1907. La colorazione dell'iodio scomparve in pochi giorni e già nell'ottobre si vedevano abbondanti cristalli in seno al liquido. Accenno qui solo quali furono i prodotti più importanti, poichè, essendo questi in quantità scarsa, non poterono essere studiati convenientemente; cosa questa che si fece ripetendo la prova con maggior quantità di sostanza.

Dopo l'insolazione il contenuto del tubo si mostrava disseminato di numerosi cristalli bianchi ben sviluppati e cresciuti entro una parte oleosa alquanto densa e di colore rosso bruno. Si estrassero 10 gr. di acido benzoico, gr. 1,3 di trimero fondente a 248-249° dopo cristallizzazione, gr. 22 di parte resinosa frammista ad un olio bollente a 169-172° e 9-10^{mm}: il rimanente (salvo piccole quantità di prodotti secondarî fra cui il ioduro di benzoile caratterizzato meglio in seguito) era costituito da aldeide benzoica non trasformata. La parte oleosa venne separata dalla resina mediante estrazione con etere di petrolio, fu poi ripetutamente distillata nel vuoto: ma ebbi solo una piccola porzione bollente in modo abbastanza costante, come sopra è detto. Era un olio giallo, che all'analisi diede numeri assai prossimi a quelli richiesti per l'aldeide benzoica (trovato: C 79,83; H 6,03: calcolato per C_7H_6O: C 79,23; H 5,66). Per cui era prevedibile che il prodotto doveva essere con tutta probabilità un polimero di detta aldeide: purtroppo la scarsa quantità non permise un'ulteriore purificazione e si dovette ripetere l'esperienza con maggior quantità di sostanza.

In due tubi vennero saldati rispettivamente 100 gr. di aldeide e 1 gr. di iodio, 85 gr. di aldeide e 2 gr. di iodio. L'esposizione alla luce durò dal 22 aprile 1907 al 25 febbraio 1910 e dal 7 luglio 1907 al 26 febbraio 1910. Dopo una settimana il colore del iodio si fece assai debole, scomparve totalmente dopo dieci giorni: trascorso un mese cominciarono a rendersi visibili numerosi cristallini nel liquido giallo lievemente bruno, la quantità dei cristalli crebbe col tempo. I contenuti dei due tubi mostravano all'apertura lo stesso aspetto, furono quindi riuniti: essi erano costituiti di una parte solida cristallina abbondante e di una parte oleosa bruna verdastra opalescente. Nella parte solida si potevano osservare due specie di cristalli, gli uni più sviluppati (di acido benzoico) gli altri in forma di piccoli ammassi granulari. La parte solida fu separata per filtrazione dalla oleosa, il prodotto solido rimasto sul filtro venne lavato con etere, che sciolse l'acido benzoico e lasciò indisciolta una polvere bianca (gr. 3) fondente a 239-240° la quale aveva tutti i caratteri del trimero già isolato altra volta (l. c.).

La parte oleosa venne distillata in corrente di vapor acqueo. Nelle prime porzioni passò l'eccesso di aldeide, che non si era trasformata e poi cominciò a distillare lentamente l'acido benzoico, il quale rimase per la massima parte nell'acqua del pallone a distillazione. Durante questa operazione si svilupparono vapori irritanti fortemente gli occhi e provocanti un'abbondante lacrimazione: doveva trattarsi di ioduro di benzoile (dimostrato meglio in seguito) formatosi per azione dello iodio sulla aldeide benzoica:

$$C_6H_5CHO + 2J = C_6H_5COJ + HJ$$

in modo analogo a quello con cui Wöhler e Liebig [1] per azione del cloro sulla stessa aldeide prepararono il cloruro di benzoile.

Tutta la porzione distillata col vapor acqueo fu estratta con etere, lo strato etereo si lavò con soluzione di carbonato sodico per liberarlo dall'acido benzoico, (se ne ebbero da tutto il prodotto gr. 20,5) poi si dibattè con soluzione satura di bisolfito sodico, con che precipitò il composto bisolfitico dell'aldeide benzoica (se ne ricuperarono gr. 39).

Per stabilire la natura della sostanza pungente ancora contenuta nell'etere si trattò con ammoniaca, poi nello strato acquoso ammoniacale si riscontrò lo ioduro di ammonio: l'etere invece venne evaporato a b. m. il residuo oleoso fu bollito con acqua alla quale cedette poca sostanza capace di cristallizzare, scacciata l'acqua a b. m. venne fatto sublimare il residuo: si ebbero cristallini a forma di scagliette bianche esili dal p. f. 120-122° in tutto simili a quelli ottenuti facendo sublimare un campione di benzamide:

[1] Annalen d. Ch., *3*, 262 (1832). È da notarsi a questo riguardo che detti Autori ritengono, che lo ioduro di benzoile « scheint nicht durch directe Vereinigung der Bestantheile entstehen zu können »; la formazione in tal caso dipenderebbe dalla influenza della luce.

questi ultimi fondevano a 122-124°. Sebbene la scarsità del prodotto abbia impedito altro controllo è da ritenersi si trattasse di benzamide proveniente dalla scomposizione dell' ioduro di benzoile, scomposizione analoga a quella operata da Wöhler e Liebig (l. c.) con ammoniaca e cloruro di benzoile.

L'olio (circa 4 gr.) che accompagnava la benzamide risultò identico alla parte oleosa non distillata col vapor acqueo (vedi più sotto).

L'olio bruno denso (gr. 117 circa), che non distillò in corrente di vapor acqueo, venne estratto parecchie volte con acqua bollente per asportare la maggior parte dell'acido benzoico, poi sciolto in etere e lavato con carbonato sodico. Scacciato l'etere si riprese con etere di petrolio (p. eb. 30-50°) che ne sciolse la maggior parte colorandosi in giallo debolmente fluorescente, il residuo non solubile aveva l'aspetto di resina gialla friabile (resina dell'aldeide benzoica, gr. 10 circa).

La soluzione in etere di petrolio depositò per graduale concentrazione piccole quantità di resina, che aderiva in forma di pellicola alle pareti dei recipienti: eliminata per successive concentrazioni la parte resinosa si ottenne un olio di color rosso (gr. 104) che fu distillato nel vuoto. In una prima distillazione esso bollì a 185-195° e 22-24^{mm}, ma era ancora colorato in giallo: il residuo non distillato era semisolido e pecioso, non venne ancora esaminato. Ripetuta la distillazione si ebbero 72 gr. di olio lievemente giallo e debolmente fluorescente, che bolliva costante a 189-191 e 18^{mm}.

L'analisi elementare mostrò che esso ha la stessa composizione centesimale dell'aldeide benzoica (calcolato per C_7H_6O : C 79,23 ; H 5,66 , trovato C 79,15 ; H 5,77).

Il peso molecolare, determinato crioscopicamente in acido acetico ed in benzolo, dimostrò trattarsi di un *dimero* dell'aldeide benzoica (trovato: in acido acetico 204,8 , 221,6 , 223,1 ; in benzolo 203,0 , 204,7 , 204,4 , 207,5 ; calcolato per $(C_7H_6O)_2 = 212$).

Presentemente non ho ancora compiuto le ricerche necessarie per poter discutere sulla costituzione di questi polimeri: mi riserbo di farlo prossimamente.

Un fatto che rimane tuttora oscuro e che spero verrà chiarito in seguito, è quello della formazione di quantità considerevoli di acido benzoico senza che si riscontrino prodotti di riduzione dell'aldeide benzoica.

Ho già pronti alcuni tubi contenenti altre aldeidi aromatiche, i quali potranno essere esaminati quanto prima, a giudicare dall'aspetto esterno parrebbe, che la reazione sia avvenuta anche in quei casi.

Aldeide benzoica e iodosobenzolo: Gr. 35 di iodosobenzolo e gr. 95 di aldeide furono saldati in tubo di vetro. Appena le due sostanze vennero a contatto si manifestò una colorazione brunastra dovuta con ogni probabilità a liberazione di iodio. L'esposizione durò dal 3 agosto 1906 al 29 gennaio 1907. In pochi giorni il contenuto perdè la colorazione bianca e di-

ventò lievemente giallo: in processo di tempo il liquido si colorò intensamente in giallo, comparvero cristalli di acido benzoico e si formarono gocciole di un liquido incoloro, meno denso, che si raccolsero in uno strato galleggiante sul rimanente olio. All'apertura non si manifestò pressione. Lo strato galleggiante, opportunamente separato (circa 3 cc.), venne riconosciuto essere acqua. La sua formazione deriva dalle proprietà fortemente ossidanti del iodosobenzolo. La parte cristallina era costituita in massima parte di acido benzoico e di poco trimero (gr. 0,15). Dalla porzione oleosa si estrasse l'acido benzoico (da tutto il tubo si ebbero gr. 23,7 di acido) e poi l'aldeide intrasformata mediante bisolfito sodico (gr. 40,5). Il rimanente fu distillato in corrente di vapor acqueo: assieme col iodiobenzolo (greggio gr. 31,3) proveniente dalla riduzione del iodosoderivato, distillò una sostanza che col tempo cristallizzò; era in quantità così esigua, che solo potè determinarsi il punto di fusione, fra 130-140°.

Il residuo della distillazione con vapor acqueo era un olio denso bruno, che per raffreddamento si rapprese in massa resinosa (gr. 28): l'etere di petrolio ne sciolse solo una piccola parte oleosa (gr. 3) inquinata ancora di resina. Di quest'olio potei verificare solo che esso è capace di distillare a pressione ridotta dando un liquido lievemente giallo. Ritengo però che sia identico al dimero ottenuto in grande quantità operando con iodio.

Aldeide benzoica e iodiobenzolo: Rimasero esposti al sole dal 2 agosto 1906 al 19 dicembre 1906 saldati entro tubo gr. 25 di iodiobenzolo e gr. 40 di aldeide. Il contenuto dapprima incoloro assunse poi color giallo intenso. In ottobre si erano già depositati numerosi cristalli ben sviluppati di acido benzoico.

All'apertura il liquido era colorato in rosso lievemente bruno. Le sostanze isolate furono quelle stesse già avute nelle esperienze precedenti, si notò solo una differenza nel rapporto tra le diverse quantità. L'acido benzoico era in quantità considerevole, però fatte le dovute proporzioni, non così abbondante come nelle ricerche antecedenti; pochissimo fu il trimero, invece si ebbe buona quantità di sostanza resinosa e 3 gr. circa di prodotto oleoso bollente per la maggior parte a 175-180° e 11^{mm}. Contemporaneamente si ebbero pochi decigrammi di una sostanza solida, che, cristallizzata dall'etere di petrolio, era in esili cristalli bianchi dal p. f. 157°: la scarsità del prodotto mi impedì un ulteriore studio. Buona parte dell'aldeide primitiva era rimasta inalterata.

Le prove suddescritte insegnano che la trasformazione dell'aldeide benzoica si compie in tutte nello stesso modo, per cui è lecito pensare che detta trasformazione sia catalizzata dalla presenza di iodio.

Per accertarmi, che le trasformazioni dianzi descritte fossero provocate oltre che dalla presenza del iodio anche ed in modo particolare dalla luce,

preparai alcuni tubi con aldeide benzoica e iodio oppure iodiobenzolo, gli uni furono scaldati per cinque giorni a 100° e poi tenuti al buio, gli altri subito conservati al buio dal novembre 1906. Nel febbraio 1910 tutti conservavano il loro aspetto e la colorazione primitiva, nè si era depositata sostanza solida cristallina.

In queste ricerche mi valsi frequentemente dell'opera del laureando in chimica sig. Bosinelli. A lui rendo pubblicamente i miei ringraziamenti.

Chimica — *Sul comportamento di talune ureidi e sostanze puriniche rispetto a soluzioni di benzoato sodico.* Nota di Giovanni Pellini e Mario Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale — *Esperienze sulla condensazione enzimatica degli zuccheri.* Nota di E. Pantanelli e G. Faure, presentata dal Socio R. Pirotta.

Un organismo che si sviluppa rapidamente in cultura pura ed ha un potere amilolitico così potente, che i giapponesi se ne servono industrialmente per saccarificare la poltiglia di riso cotto destinata alla preparazione del Saké, è l'*Aspergillus Oryzae.*

Pochi giorni dopo la semina in substrati contenenti amido, il poderoso micelio di questo fungo ha emesso una energica amilasi, la cui attività (o concentrazione?) cresce poi sempre, anche dopo la formazione delle spore per raggiungere un massimo verso il 30-40° giorno a 25° C. In seguito la attività amilolitica diminuisce nuovamente.

Croft Hill [1] ha già avuto l'idea di servirsi dell'amilasi dell'*Aspergillus Oryzae* per tentare la catalisi enzimatica del processo opposto all'amilolisi, cioè della sintesi dell'amido, ed ha ottenuto una debole condensazione, facendo agire questo enzima sopra una soluzione al 60 % di glucosio.

Siccome però egli si serviva del prodotto commerciale conosciuto col nome di *diastasi Taka,* così era da sperarsi che partendo direttamente da culture del fungo in diversi stadii di sviluppo, si potesse colpire una maggiore attività sintetica della sua amilasi.

(1) Proceed. Chem. Society, XVII (1901), pag. 184.

L'*Aspergillus Oryzae* fu seminato sopra 500 cc. di soluzione nutritizia, sterile, contenente:

Tartrato ammonico	1	pt.
Fosfato acido di potassio	0,5	"
Solfato di magnesio cristallino . .	0,5	"
Amido di riso	2	"
Acqua di fonte	100	"

ed allevato in termostato a 25° C. In tali condizioni, il 3° giorno comincia già la formazione delle spore.

A distanza di 5 giorni, furono prelevati con pipetta sterile saggi del liquido culturale e vi fu determinata l'acidità debole (per la fenolftaleina) e totale (per il tornasole), lo zucchero riduttore, il carbidrato totale, l'amido [1], l'attività amilasica tenendo per un'ora a 56° 10 cc. del liquido e 10 cc. di una salda d'amido di riso al 2 %, e l'attività condensatrice aggiungendo a 5 cc. di liquido enzimatico 15 cc. di sciroppo di glucosio al 72 %, e lasciando in riposo per 48^h a 45° C; nell'uno e nell'altro caso determinandc il potere riduttore col liquido di Fehling secondo il metodo di Allihn al principio ed alla fine della prova.

Abbiamo già detto quale sia la curva dell'amilasi in funzione dell'età della cultura. Un enzima condensante il glucosio in quelle condizioni di prova comincia a notarsi quando l'attività amilasica è già in decadenza, verso il 35-40° giorno di cultura ed aumenta in seguito leggermente, ma irregolarmente, fino all'ottavo mese; più tardi scompare. L'amilasi invece si conserva anche in culture vecchie di un anno, sebbene assai debole; anche gli enzimi dei disaccaridi, maltasi ed invertasi (quest'ultima compare nelle culture di questa elegante plectascinea anche in assenza di saccarosio) si conservano sebbene indeboliti.

L'attività dell'enzima condensante emesso nel liquido culturale è assai minore di quella dell'enzima contenuto nel micelio. Da un estratto acquoso di micelio di un mese di età preparato nel modo solito [2] abbiamo ottenuto i seguenti risultati, che riportiamo partitamente per dare una idea dell'entità del fenomeno.

5 cc. di estratto del micelio (1:5) furono mescolati con 15 cc. di soluzione concentrata di glucosio o zucchero invertito (ca. 4 mol.), oppure di saccorosio (ca. 2 mol.) ovvero di soluzione satura di lattosio. Questi miscugli furono addizionati di toluolo e conservati in pesafiltri con tappo smerigliato; l'esperienza fu fatta parallelamente a 45° e alla temperatura am-

[1] I metodi adoperati per determinare queste sostanze sono già stati descritti in precedenti lavori; per l'acidità v. Ann. di Botan., III (1905), pag. 120; per gli zuccheri e l'amido v. Staz. sperim. agr., XLI (1909), pag. 329.

[2] Descritto già in Jahrb. f. wiss. Botan., XL (1904), pag. 307.

biente. Dopo 4 giorni trovammo che il saccarosio ed il lattosio si erano idrolizzati, per ciò li abbandonammo e continuammo l'esperienza con gli altri due zuccheri.

Nella tabella i valori sono tutti calcolati come glucosio.

L'acidità dell'estratto di micelio adoperato era tale che 0,2 cc. di soluzione decinormale di NaOH bastavano a neutralizzarla per 100 cc. di estratto.

Milligrammi di zucchero riduttore in 1 cc. del miscuglio.

Zuccheri		al principio	dopo 4 giorni	dopo 11 giorni	dopo 36 giorni	dopo 115 giorni
Glucosio	a caldo	736	686	300	220	—
	a freddo	736	688	418	—	—
Z. invertito	a caldo	801	806	478	310	220
	a freddo	801	(856)	488	328	290
Glucosio controllo sterile		736	—	—	—	528

Diminuzione dello zucchero riduttore in °/₀ del valore iniziale.

Zuccheri		dopo 4 giorni	dopo 11 giorni	dopo 36 giorni	dopo 115 giorni
Glucosio	a caldo	7,24 °/₀	44,9 °/₀	71,3 °/₀	—
	a freddo	7,36 »	60,3 »	—	—
Z. invertito	a caldo	—	39,2 »	47,6 »	64,5 °/₀
	a freddo	—	40,9 »	62,6 »	74,2 »
Glucosio controllo		—	—	—	28,9 »

Nella soluzione iniziale di glucosio, sterilizzata e tenuta come controllo, lo zucchero riduttore scese in 115 giorni a 528 mg., ossia ad un valore che nei miscugli con enzima era stato già raggiunto fra il 4° e l'11° giorno. In tutte queste prove lo zucchero non era diminuito per decomposizione, perchè alla fine dell'esperienza per mezzo di idrolisi con acido solforico diluito, si trasformò di nuovo quasi tutto il carbidrato in zucchero riduttore.

Per avere un'idea approssimativa della natura dei prodotti di condensazione, determinammo al principio ed alla fine dell'esperienza la *concentrazione molecolare* di questi miscugli mediante il *metodo crioscopico*, che prometteva risultati abbastanza netti, trattandosi di sostanze non elettrolite. Nella seguente tabella abbiamo riunito queste misure già calcolate in mol., paragonandole alle rispettive concentrazioni molecolari calcolate in base al potere riduttore, assumendo come unità di peso molecolare quello dei monosii (180).

Concentrazione molecolare.

Zuccheri		Al principio dell'esperienza		Alla fine dell'esperienza	
		sec. il pot. rid.	sec. det. criosc.	sec. il pot. rid.	sec. det. criosc.
Glucosio	a caldo . . .	4,09 mol.	4,32 mol.	1,22 mol.	3,24 mol.
	a freddo . . .	4,09 »	4,32 »	—	—
Z. invertito	a caldo . . .	4,44 »	4,62 »	1,22 »	5,45 »
	a freddo . . .	4,44 »	4,62 »	1,61 »	5,10 »
Glucosio controllo		4,09 »	4,32 »	2,93 »	3,49 »

Nelle soluzioni concentrate di glucosio diminuì la concentrazione molecolare, ossia aumentò la grandezza media delle molecole, o in altre parole una porzione delle molecole di esosio che esisteva in principio nel miscuglio si è condensata in molecole più grosse, ed il confronto col potere riduttore mostra che questo prodotto di condensazione deve avere poca o punta capacità riduttrice.

Anche nella soluzione controllo sterilizzata di glucosio si ebbe una diminuzione nella concentrazione molecolare presso a poco eguale a quella osservata nel miscuglio con enzima, mentre il potere riduttore subì una diminuzione molto minore. Questo prova che in assenza dell'enzima non si è formato quel prodotto di reversione non riducente, bensì un polisaccaride ancora riducente, che probabilmente sarà stato maltosio o isomaltosio, per analogia a quanto hanno trovato Croft Hill, E. Fischer ed Emmerling.

Nei miscugli con zucchero invertito parrebbe che l'enzima avesse fatto perdere il potere riduttore ai due monosii iniziali senza operare alcuna condensazione di molecole. La reversione sarebbe quindi stata apparente in questo caso. Siccome in altre misure analoghe abbiamo notato anche per lo zucchero invertito una leggera diminuzione della concentrazione molecolare, non possiamo per ora spiegare questo fatto.

Influenza della concentrazione. Nelle esperienze accennate ed in quelle dei precedenti autori fu osservata una condensazione solamente in soluzioni molto concentrate. La chimica fisica insegna che gli agenti catalitici, quindi probabilmente anche gli enzimi, possono accelerare solamente le reazioni chimiche di natura reversibile. In realtà questo postulato è infirmato dalle innumerevoli reazioni di ossidazione e riduzione, che non hanno affatto carattere reversibile, mentre sono catalizzate da enzimi e da agenti inorganici. Anche per le reazioni idrolitiche l'esperienza ha scosso in molti casi la pretesa reversibilità; così la maltasi condensa il glucosio in isomaltosio, che essa non può idrolizzare, mentre l'emulsina sintetizza dal glucosio il maltosio, che essa non attacca (Armstrong); così la lattasi forma da un miscuglio di glucosio e galattosio l'isolattosio e non il lattosio, che essa idro-

lizza (Fischer e Armstrong); così la revertasi forma dallo zucchero invertito l'isomaltosio, la levulosina, delle destrine ecc., ma non il saccarosio.

Ad ogni modo è certo che non vi può essere reversione di una reazione idrolitica se i prodotti di idrolisi non superano la concentrazione in cui essi stanno in equilibrio con l'idrolito, di qui la necessità di adoperarli in forte concentrazione. Si potrebbe però ritenere che, in soluzione molto concentrata la reazione idrolitica non sia più monomolecolare, ma bimolecolare, assumendo la poca *acqua* presente la parte di *massa attiva* nel sistema, e non più di semplice solvente. Da ciò deriverebbe anzitutto una forte diminuzione della velocità di reazione e in secondo luogo la possibilità di ottenere la reversione del processo anche in presenza di una minor quantità di zucchero (prodotto dell'idrolisi), purchè si stabilisca una elevata concentrazione, o, se si vuole, si diminuisca la concentrazione dell'acqua, aggiungendo molecole di sostanze estranee.

I nostri tentativi in questo senso furono fatti anzitutto sostituendo a 2 mol. di glucosio 2 mol. di un sale neutro, la concentrazione del glucosio era così abbassata a 36 %, ma non si ebbe alcuna condensazione, con *cloruro sodico*, *cloruro potassico*, *solfato potassico* (questo in parte indisciolto). Non è però escluso che questi sali o qualcuno dei loro ioni paralizzassero la attività reversiva dell'enzima, e non disperiamo di ottenere risultato positivo ricorrendo ad altri ioni.

Intanto, sostituendo a 2 mol. (sopra quattro) di glucosio 2 mol. di *mannite*, cioè di una sostanza non elettrolita assai affine allo zucchero, abbiamo ottenuto una condensazione del 36,2 % a temperatura ordinaria, e ciò prova che o la mannite entra anch'essa in condensazione insieme al glucosio, o la nostra tesi della funzione dell'acqua come massa attiva è giusta. Una nuova questione, che bisognerà risolvere.

Condensazione del maltosio. Finora abbiamo parlato della condensazione del primo gradino della sintesi dell'amido; ma dal glucosio per arrivare a questo carbidrato, che in un cloroplasto si forma in pochi minuti, nella *Spirogyra* in 15-20″ di illuminazione intensa, quanto è lunga la strada! Facendo agire liquidi culturali di *Aspergillus Oryzae*, o estratti acquosi o glicerinati del micelio, o il micelio stesso, impastato con tripoli ed asciugato fra carta, poi alla pompa e polverizzato, su soluzioni anche molto concentrate di maltosio (2 mol. = 68,4 %), non abbiamo finora potuto osservare una condensazione, per lo più anzi anche in quegli sciroppi si ha idrolisi (per opera della maltasi).

Le osservazioni precedenti di uno di noi sulla revertasi dei funghi [1] ci hanno però consigliato di ricorrere ad un ambiente debolmente alcalino,

[1] Rend. Accad. Lincei, 1907, II sem., pag. 424: Ber. Bot. Ges., XXVI *a* (1908), pag. 502.

ed in questo non solo abbiamo osservato una condensazione del 30-40 % del maltosio iniziale a 35° C, in 10 giorni, in sciroppi contenenti 68-70 % di maltosio, ma anche in soluzioni contenenti 8-10 % di maltosio si ebbe una reversione a prodotti non riducenti, precipitabili con alcool in forma di grossi fiocchi, cioè di natura destrinoide, oscillante fra 18 e 25 % del maltosio iniziale a 25° C in 10 giorni. Per ottenere questo risultato, basta che 100 cc. del miscuglio contengano 5-10 cc. di NaOH decinormale libera.

Questo fatto, già osservato anche per la revertasi, fa ritenere che l'enzima che opera la condensazione del maltosio non sia il medesimo che accelera l'idrolisi dell'amido o delle destrine a maltosio; nel miscuglio di enzimi fabbricato dal fungo si avrebbero accanto l'amilasi o destrinasi agenti in ambiente acido, e l'enzima sintetizzante, cioè condensante il maltosio, il quale agisce invece in ambiente alcalino.

Ricordando ora che il protoplasma della cellula in tutti gli organismi suole essere debolissimamente alcalino, mentre il succo dei vacuoli o in senso più generale estraplasmatico è più o meno acido, viene in luce un certo nesso tra i fatti da noi osservati *in vitro* e ciò che succede nella cellula vivente. Quivi il granello d'amido si forma sempre ed esclusivamente entro il plasma o stroma del cromatoforo, il quale è, al pari del citoplasma entro cui si trova immerso, debolmente alcalino, come dimostra la sua affinità per i coloranti acidi. D'altra parte il protoplasma che riempie totalmente la cellula giovanissima, a poco a poco si riduce ad un sottile strato periferico, mentre compaiono e s'ingrossano a dismisura i vacuoli; con ciò il terreno favorevole ai processi sintetici diminuisce progressivamente, mentre aumenta il campo per i processi idrolitici, costituito da vacuoli pieni di succo più o meno acido. Di qui l'attività costruttiva delle cellule giovani e quella distruttiva delle cellule adulte; di qui la difficoltà di fabbricare amido nei cloroplasti vacuolosi che s'incontrano nelle foglie colpite da malattie diverse.

Considerazioni simili si potrebbero estendere ancora largamente a tutti i casi di cellule in cui si osserva contemporaneamente la ricomparsa di un abbondante plasma ed il ripristino delle attività sintetiche, ma prima dovremo arricchire il patrimonio di fatti realmente osservati in questo campo delle sintesi enzimatiche, ancora ben poco noto.

Patologia vegetale. — *Influenza del terreno su lo sviluppo del Roncet od arricciamento della vite.* Nota di E. Pantanelli, presentata dal Socio G. Cuboni.

In una relazione presentata al Ministero di Agricoltura [1] ho riportato fra le principali conclusioni, che esiste una relazione costante fra ripartizione di questa malattia in date plaghe o punti e condizioni del terreno e del clima, nel senso che la malattia si manifesta *primariamente*, cioè senza essere portata dal di fuori impiantando legno malato, in terreni pianeggianti a sottosuolo umido, con particelle molto fine, quindi compatti e disaereati nella stagione fredda, a soprasuolo duro, crostoso, arido nella stagione calda.

Siccome il fattore fisiologico della malattia è un progressivo affievolimento dell'attività di produzione di nuove radicelle assorbenti, a struttura primaria, da parte delle radici passate a struttura secondaria già dall'anno precedente, era interessante stabilire qual nesso passa fra questo fatto e le dette proprietà del terreno, dal momento che nelle radici non si trovano lesioni o alterazioni anatomiche, nè tracce di parassiti animali o vegetali, e ciò neppure alle estremità, da cui si sono staccate le porzioni rimaste a struttura primaria, lasciando ferite che vengono normalmente cicatrizzate mercè la produzione di sughero nella parte corticale e di tilli o gommoresina nei vasi e nelle cellule del legno.

Sono dunque determinate proprietà del terreno quelle che inibiscono l'attività rizogena del cambium delle radici?

Ho sottoposto ad analisi chimica campioni di terra prelevati fra le radici di viti malate o sane nel R. Vivaio di Noto, Siracusa (che ora più non esiste), Vittoria, Palermo in Sicilia, nei Vivai consorziali di Lecce, Corato, Barletta, Cerignola, Ascoli Satriano in Puglia; in alcune vigne innestate su piede americano in Augusta, Termini Imerese, Vittoria, senza trovare notevoli differenze quanto alla distribuzione del ferro, calce, magnesia, potassa, acido fosforico, solfati. Si tratta in generale di terreni assai poveri di acido fosforico, spesso anche di magnesia, ma dalle numerose analisi eseguite ho dovuto concludere, che la ripartizione della malattia non è in relazione con la scarsità di questo o quel componente chimico del terreno.

A prima vista sembra invece facile giudicare, che maggiore importanza debba avere la struttura del terreno, da cui dipendono le sue proprietà fisiche. Fra queste le principali per la vita delle radici sono la riscaldabilità, l'igro-

[1] *Il Roncet delle viti americane in Sicilia.* Bull. d. Minist. di Agric., anno IX, serie C, vol. I, fascicolo 2° (Marzo 1910).

scopicità, la facoltà di ritenere l'acqua o capacità idrica, la porosità e la scioltezza.

Per farsi un'idea della tessitura di un terreno può fornire qualche indizio interessante il vecchio metodo della separazione meccanica dei ciottoli e sassolini di diametro superiore ad 1 mm., e dell'analisi fisico-chimica della terra fina secondo il metodo di Schlösing, prelevando i campioni a diversa profondità. Con questi procedimenti ho trovato che fra le radici malate, quelle cioè in cui l'attività rizogena si è arrestata, si ha costantemente più materia argilloide che fra le radici delle viti ancora sane di eguale sorta ed età, fra le quali aumenta invece in proporzione la sabbia o il calcare, spesso anche il contenuto in ciottoli. Tali differenze si notano anche nello spazio di pochi metri, ed è appena credibile quanto possa variare la struttura del terreno da un ceppo all'altro, sopra tutto quando si tratta di terreni alluvionali o di riporto al piede di colline, siano essi pianeggianti o in pendìo al piede di montagne più alte, come sono quelli in cui l'arricciamento suole comparire.

Però col termine materia argilloide si comprendono materiali di natura ben eterogenea in parte di natura colloide, come la silice, i frammenti di molti silicati idrati, delle zeoliti, i precipitati di ruggine, di allumina; in parte di natura cristalloide, come i frammenti minutissimi di rocce cristalline, che rappresentano l'ultimo stadio di frantumazione delle sabbie. La levigazione permette di fare un passo innanzi nella separazione di questi materiali; per la sua comodità e rapidità ho avuti buoni resultati col levigatore di Appiani, prelevando i campioni con una sonda di tipo americano, costruita dai fratelli Gatti di Modena, con la quale si possono cavare con la massima precisione saggi di 40-50 gr. di terra fino ad 1,20 m. di profondità, premesso che la terra sia abbastanza umida e sciolta, ciò che p. es. non è il caso in certi terreni argilloso-calcarei della Sicilia, in cui durante l'estate quattro uomini non riescono ad affondare la sonda di 5 cm.

La sonda e il levigatore permettono di orientarsi su la struttura del terreno, sopra tutto sul diametro delle singole particelle, più presto che il metodo di Schlösing; ma le numerose levigazioni eseguite mi hanno dato resultati irregolari ed inutilizzabili per il nostro scopo. La ragione di ciò stava nella presenza del calcare, il quale in quei terreni affetta tutte le grandezze dal ciottolo al globulo di pochi microm. di diametro. Allora ho anzitutto separato i ciottoli, sassolini e detriti facendo passare il saggio sospeso in acqua attraverso lo staccio di 1 mm., poi ho eliminato il calcare con acido cloridrico normale (3,65 $^{0}/_{0}$); poi ho raccolto, ben lavato, sospeso in acqua e levigato il residuo.

Da queste misure è resultato con nettezza, che fra le radici delle viti malate la percentuale di elementi fini, di diametro inferiore a 10 microm., non calcarei, è maggiore che fra le circostanti radici sane. La differenza è più o meno notevole, ma costante.

Non bastava però questa constatazione; occorreva sapere, se in queste particelle finissime predominano i materiali colloidi (emulsoidi), o i frammenti cristallini. A questo scopo le frazioni di diametro inferiore a 10 microm., riunite, furono stemperate in soda caustica 2 volte deci-normale (0,8 %), riscaldate per 10′ a bagno maria, indi levigate con la stessa soluzione di soda caustica come mezzo disperdente. È noto, che gli alcali stabilizzano le sospensioni di argilla, caolino ecc. ed impediscono o rallentano lo sfioccamento di molti colloidi positivi.

Il processo è certo suscettibile di perfezionamento, ma già in questa forma primitiva ha permesso una separazione delle particelle colloidali dai frammenti cristalloidi assai più avanzata che la levigazione con acqua, ed ha fornito dati assai utili, i quali mostrano che fra le viti malate la terra è più ricca di materiale colloidale che fra le viti sane di eguale sorta ed eta. Si tratta naturalmente di colloidi a carica positiva, quali la silice, le zeoliti, gli idrosilicati acidi, le materie umiche, perchè con questo procedimento la sedimentazione dei colloidi negativi, quali la ruggine, l'allumina, i fosfati basici ecc. è anzi accelerata.

Non sarebbe dunque esatto asserire, che la distribuzione della malattia è in relazione con la ricchezza in *argilla* del suolo, a meno che non si convenga di indicare con questo termine improprio la somma dei componenti colloidali del terreno.

* * *

Tale constatazione getta a prima vista poca luce sul problema. È noto che con la ricchezza in particelle fine aumenta la tenacità e compattezza del suolo, cioè diminuisce la *porosità*, ma la determinazione indiretta di questa rapportando il peso specifico apparente al peso specifico reale della terra fina non mi ha dato resultati regolari. D'altra parte con la ricchezza in materiali colloidali aumenta la capacità di trattenere l'acqua, e realmente la capacità idrica massima della terra è maggiore nei luoghi dove le viti sono malate. Tali terreni sono difficili a scolare, formano facilmente la crosta alla superficie e si comprimono a poco a poco, diventando poveri di aria e di una durezza estrema. Tutte queste condizioni regnano nei terreni dove si sviluppa il roncet, ma hanno sempre il carattere di fattori distributivi o predisponenti.

Infatti allevando talee o barbatelle, sane o malate, in un terreno artificiale costituito quasi esclusivamente di questi materiali, da cui si erano separati con una grossolana levigazione tutti i ciottoli, sassolini e la sabbia grossolana, si ebbe, in esperienze in vasi ed in cassoni istituite nel 1907 e nel 1908, un minore sviluppo di radici rispetto alle talee o barbatelle coltivate in sabbia od in terreno artificialmente arricchito di sassi, ma pur si ebbe uno sviluppo di radici.

In tali condizioni di esperienza non si riesce a produrre le deformazioni caratteristiche dei tralci e delle foglie partendo da legno sano; però se si impianta legno malato non se ne ottiene il risanamento, il quale è pronto invece coltivandolo in sabbia o in terreno mescolato a piccoli ciottoli.

La ricchezza in materiali colloidali e le proprietà fisiche del terreno, che da essa dipendono, sono dunque fattori favorevoli alla comparsa ed alla persistenza della malattia, ma non bastano a spiegare perchè nelle radici si affievolisce l'attività rizogena.

Lo stesso vale per l'umidità permanente del sottosuolo, la quale dipende dalla sua posizione rispetto all'orizzonte, dal poggiare sopra un fondo orizzontale o a conca di marna compatta, o di sabbia acquifera, o sopra una roccia qualsiasi, peggio se questa roccia è un calcare spugnoso che si mantiene ricco di umidità. Tali inconvenienti, dovuti alla natura e posizione del fondo, sono maggiori se il terreno è di natura argillosa, ma possono verificarsi anche in terreni sabbiosi, purchè la sabbia consti di particelle molto fine, fra le quali siano frequenti i globuli di silice colloide.

L'esame attento della distribuzione della malattia dimostra che essa comincia sempre là dove le acque sotterranee si arrestano per mancanza di scolo o per natura del terreno, e progredisce secondo la direzione di scolo dell'acqua, raramente risalendo sopra un pendìo. Anche sopra una forte pendenza basta la più leggera acconcatura o un breve ripiano per favorire la comparsa della malattia, come ho veduto in certe vigne a terrazze all'Elba, nel R. Vivaio di Catania, a Termini Imerese ecc. Paulsen e Iacono hanno già da alcuni anni accennato a questo fatto, confermato recentemente da Mirepoix ad annesso infine anche da Ravaz [1].

Da questa relazione costante fra la natura e disposizione del suolo e la comparsa della malattia in un vigneto ci dovremmo aspettare che piantando talee sane in un terreno di questo genere, non scassato, esse dovessero subito ammalarsi.

Le esperienze da me istituite a questo proposito nel Vivaio di Noto, il cui terreno possiede ad un grado estremo le dette proprietà sfavorevoli, così che la maggior parte dei vitigni americani sono colpiti da arricciamento, ha mostrato che piantando talee sane in un terreno in cui mai o almeno da qualche anno non sia stata coltivata la vite, la malattia non compare su le giovani viti, e se vi s'impiantano talee malate, esse risanano prontamente. Invece se si pianta legno accuratamente scelto fra il più sano e robusto là dove è stata estirpata una vite, fosse essa sana o malata, americana od europea, la malattia compare subito il primo anno e non scompare, anzi si aggrava nelle barbatelle malate. Tutto ciò ad onta dello scasso e di un'ab-

[1] Cfr. *Enquéte sur le court-noué*, Progrès agric. et vitic., 1909, II Sem., pag. 714 e 748.

bondante concimazione organica o chimica; e si verifica tanto in terreno argilloso, come in terreno sabbioso, purchè la sabbia sia molto fina [1], riposi sopra un fondo poco permeabile e lasci scolare con difficoltà le acque.

Riporto una di queste esperienze: Si estirpò nel decembre 1907 un grande appezzamento di *Rupestris du Lot* gravemente malata, scassando il terreno a 50-60 cm. di profondità. Sopra una metà longitudinale dell'area scassata si piantarono subito talee perfettamente sane di *Rupestris du Lot* provenienti dal Vivaio di Vittoria. Il sesto da 1,25 fu portato a 1,50 m. con la speranza che il maggiore spazio lasciato ad ogni vite fosse giovevole. E ciò non ostante sopra 520 talee piantate, solo 56 ripresero e di queste ben 38 mostravano nel luglio 1908 i caratteri del Roncet incipiente con forte nanismo dei tralci e deformazione delle foglie, nè risanarono nel corso dell'estate [2].

Su l'altra metà longitudinale si seminò ai primi di gennaio 1908 frumento *Verdastro*, che si sviluppò egregiamente fino a raggiungere l'altezza di 1,80-2 m., e mietuto l'8 giugno, dette 3,3 quintali di paglia e 1,42 quintali di semi. Ai primi di agosto questo terreno fu zappato e diviso in due parti, di cui una fu seminata a frumentone *quarantino*, l'altra a moha (*Panicum germanicum*). Il frumentone soffrì per le forti pioggie dell'autunno, ma dette 47 kg. di semi, il panico fornì in decembre 8,5 quintali di culmi, alti da 0,80 ad 1 m. Subito dopo questa enorme produzione di graminacee si piantarono senza concimazione in questa parcella 500 talee sane di *Rupestris du Lot* provenienti dal Vivaio di Vittoria, di cui ben 420 ripresero e solamente 12 mostrarono nella vegetazione 1909 segni incipienti di arricciamento, mentre le altre erano sane e rigogliose.

Esperienze simili furono eseguite fra il 1907 e il 1908 estirpando un vasto appezzamento di *Aramon* × *Rupestris* G. 1 di 10 anni, in gran parte deperito per arricciamento. L'area rimasta libera fu in parte adibita a barbatellaio, in parte vi si fece cultura di frumento, di saggina (*Sorghum vulgare*) e di cotone, che dettero forti raccolti nel corso del 1908; al principio del 1909 si impiantarono barbatelle anche su questa parte e il resultato fu analogo al precedente.

Ho esperimentato nel 1908 e nel 1909 con diverse piante, tanto leguminose (fagioli, ceci, veccia, fava) come graminacee (frumento, avena, mais, panico, sorgo), crocifere (senape, colza, ravizzone), inoltre patata, cotone, lino, per stabilire qual'era la più adatta per *riposare* il terreno stanco della

[1] Gli studii di Atterberg (Landw. Vers., 1908) hanno mostrato, che le particelle finissime di sabbia hanno molte proprietà fisiche a comune con i materiali colloidali.

[2] Ruggeri ha da tempo eseguito una simile esperienza nel Vivaio di Milazzo con eguale resultato. Vedi *Viticoltura moderna*, IX (1902), pag. 70. Osservazioni simili, fatte da Segapeli a Catania, sono riportate da Schiff-Giorgini, Bull. d. Minist. d'Agric. 1906, vol. VI, pag. 973.

cultura della vite, ma solamente le graminacee ed il cotone hanno dato buoni resultati; fra le graminacee le più efficaci furono quelle a potente sviluppo radicale, come il sorgo ed il mais.

Le leguminose ebbero un'azione molto minore delle graminacee e del cotone quanto alla eliminazione dell'agente patogeno. Sovesciate, fecero piuttosto male che bene. Anche l'interramento di stallatico riuscì nocivo, se ad esso erano mescolati frammenti di legno o di radici di vite.

In tutte queste esperienze servì come indice la percentuale di ripresa di talee sane poste a confronto di talee malate, notando in ambo i casi durante la vegetazione quanti germogli si sviluppavano malati e con quali sintomi; alla fine della vegetazione su le barbatelle estirpate con la massima cura si misuravano le radici e si sottoponevano ad esame microscopico, prelevandone anche campioni per analisi chimiche. La *Rupestris du Lot* è il vitigno più adatto per tale scopo, ma anche la *Riparia Gloire* ed il *420 A*, *Berlandieri Ress.* 1 e 2, mostrano un portamento simile.

Risultano due fatti distinti, sebbene probabilmente differenti solo per l'intensità diversa della causa:

1. Si può ottenere sperimentalmente la comparsa dell'arricciamento anche al primo anno d'impianto, allevando talee o barbatelle *sane* in luoghi dove furono estirpate da poco altre viti.

2. Intercalando culture erbacee, in generale la ripresa delle talee in barbatellaio aumenta, mentre si riduce il pericolo dell'arricciamento, e cresce il coefficiente di risanamento del legno malato.

La *stanchezza* del terreno per la vite è un fenomeno ben noto, specialmente nei vivai, dove l'attecchimento di barbatelle sopra una stessa parcella, per quanto ben lavorata e concimata, scende in pochi anni a cifre irrisorie. Il dott. Montoneri, Direttore del Vivaio di Noto, fin dal 1905 ottenne dal Ministero il permesso di alternare nei barbatellai la cultura dei maglioli con altre culture, fra cui le leguminose dettero buon resultato quanto all'attecchimento. In seguito le mie esperienze in quello stesso vivaio hanno mostrato che per evitare l'arricciamento alcune graminacee sono da preferirsi.

* * *

Sono dunque almeno tre i gruppi di fattori variabili che influenzano la comparsa della malattia in mezzo a materiale che era sano al momento dell'impianto, ciò che con una parola chiameremo *origine* del Roncet od arricciamento:

1. Storia del terreno prima dell'impianto (se era coltivato a vite o ad alberi, oppure ad erbe) e dopo l'impianto (lavori che in esso vengono fatti, compressione progressiva del sottosuolo, culture consociate ecc.).

2. Proprietà specifiche del vitigno (profondità ed estensione del sistema radicale, relazione fra l'epoca e rapidità di sviluppo delle parti aeree e delle radici, sensibilità specifica alla cosiddetta stanchezza del terreno).

3. Posizione e proprietà fisiche del terreno.

Di questi tre gruppi di fattori, il terzo ha un'azione distribuitiva o predisponente, e il secondo influisce evidentemente solo nel tempo, e su l'intensità del fenomeno.

I fattori causali vanno cercati nel primo gruppo, e dalle nostre esperienze resulta che il più saliente è la cosiddetta *stanchezza*. Con questo termine però si indicano fatti totalmente eterogenei, fra i quali bisognava precisare quali determinassero l'origine della malattia. Le prove di concimazione sul campo, in cassoni ed in vasi, ripetute ogni anno, hanno mostrato che la stanchezza non è dovuta a mancanza o consumo di un determinato elemento nutritizio.

Invece essa si è mostrata in relazione con la presenza nel terreno di frammenti di radice della vite stessa, che con l'andar degli anni si accumulano intorno alle sue radici in conseguenza di fatti fisiologici e disposizioni anatomiche, che non potrei qui descrivere senza illustrazioni. Nei nuovi impianti su terreno vergine si tratta di esili estremità radicali o radichette laterali a struttura primaria, le quali però in copia stragrande ogni anno si staccano dal sistema radicale vivente; là dove si estirpa una vigna il sottosuolo è ricco anche di frammenti di radici a struttura secondaria, dalle più sottili alle più grosse.

Da questo materiale residuo esce l'azione inibente lo sviluppo di nuove radicelle a primavera, come avevo osservato fin dal 1907 in esperimenti in vaso. Essi sono stati ripetuti nel 1908 in vasi, nel 1909 in cassoni con gli stessi resultati.

I frammenti delle radici grosse restano in parte vivi per parecchî anni nel sottosuolo, ma, come è noto, per lo più insieme a tutte le radici sottili cadono in preda al marciume, iniziato dalla cosiddetta *Dematophora*, sostituita spesso nei vivai siciliani da una specie di *Fusarium*, di cui parlerò altrove. In seguito acari, bacterii ed altri organismi completano l'opera distruttrice, ma molto più lentamente di quel che si creda, così che il materiale semivivo si accumula di anno in anno. A contatto o in vicinanza di questi residui l'attività rizogena del cambium radicale è inibita, come mostra l'osservazione diretta nel campo e l'esperimento in vaso, non però perchè la *Dematophora* od altri microrganismi penetrino dal morto o morente nei tessuti. Infatti l'arresto nella produzione di radicelle è indipendente dalla presenza di *Dematophora* e, come sopra ho detto, nelle radici in cui avviene questo fatto non si trova traccia di penetrazione di alcun parassita.

Non restava che ricercare se nel terreno si diffondano dai residui sostanze tossiche, ed alcune esperienze che eseguii sopra talee in vaso nel 1908 e nel 1909 rendono probabile che esse esistano, sebbene non risolvano la questione se esse provengano dai tessuti dei residui di radice o dai microrganismi che vi s'insediano. Nel corrente anno ho ripetuto ed allargato queste esperienze, facendo uso anche di terre sterilizzate, e ne riferiremo a suo tempo il resultato.

Patologia vegetale. — *Nuove osservazioni sopra i processi di distruzione delle tuberosità fillosseriche.* Nota di L. PETRI, presentata dal Socio G. CUBONI.

Una recente Nota comparsa in questi Rendiconti [1], nella quale vien posto in dubbio se gli acari possano aggravare il danno causato dalla fillossera alle radici della vite, mi determina a pubblicare un breve riassunto delle ricerche che a tal riguardo ho iniziato sino dal 1908 per integrare e definire meglio quanto avevo già esposto intorno all'azione degli acari sopra le radici fillosserate, in una mia prima Memoria [2]. Per quanto riguarda la descrizione dettagliata dei fatti che potei osservare a Fauglia (Pisa) nel 1905 e 1906, rimando il lettore alla Memoria suddetta, giacchè oggi a quella descrizione e all'interpretaziene che allora detti delle cose esaminate non ho niente da modificare. Secondo quanto ho già pubblicato, io ritengo che solo le tuberosità sottoperidermiche di 1° e 2° grado, quali ho descritto ed illustrato, si prestano, quando ancora sono viventi, ad essere attaccate dagli acari [3]: sono esse che, a causa della loro particolare struttura, provocano la formazione di profonde erosioni le quali rappresentano un reale e grave pericolo per le radici [4]. Nelle tuberosità di 1° grado basta infatti la sola azione diretta degli acari sul cambio iperplastico. e in quelle di 2° grado il fissarsi della fillossera sui tessuti profondi. ancora sani, posti allo scoperto dalle gallerie degli acari stessi, per portare lo sfacelo nel cilindro centrale della radice. Questa è l'origine di quelle grandi cavità, molto penetranti, che equivalgono a vere amputazioni delle radici di 1, 2 e 3 anni. Nel 1908, in una relazione letta al Congresso degli Agricoltori italiani, a Siena, ho detto che questa azione complementare dell'acaro può esser compresa anche indipendentemente dal semiparassitismo o saprofitismo di questo organismo. Perchè infatti il pericolo più grave per la radice è dato da questo fatto: che i tessuti profondi della corteccia ancora sani, sono posti a portata della fillossera, prima che abbiano raggiunto uno spessore sufficiente. In questo caso l'azione deleteria della puntura fillosserica si esercita quasi direttamente

[1] Vol. XVIII, 1909, pag. 650.

[2] *Studi sul marciume delle radici nelle viti fillosserate.* Roma, G. Bertero, 1907.

[3] Le ricerche della dott.ª A. Foà, sopra i diversi acari che vivono a spese delle radici attaccate dalla fillossera, non precisano ancora se l'acaro che più comunemente si trova nelle tuberosità sia il *Rhizoglyphus echinopus* o l'*Heteroglyphus vitium* Foà. Provvisoriamente in questa Nota continuo a chiamare l'acaro delle tuberosità col nome della specie più conosciuta.

[4] Cfr. pp. 122-131, figg. 1 tav. III, 2 tav. IV, 1 e 2 tav. VI della Memoria citata.

sullo strato cambiale. È evidente però che un tal fatto tanto più facilmente potrà verificarsi quanto più saranno profonde le gallerie degli acari e quanto più precocemente saranno state aperte. A questo proposito, nella Memoria citata ho scritto: « L'andamento del fenomeno di distruzione di una tuberosità sottoperidermica di 2° grado è, nelle sue linee generali, quello indicato; esso però varia moltissimo anche nei suoi dannosi effetti per la radice, a seconda della profondità della zona di accrescimento, del suo sviluppo più o meno completo, della stagione in cui il primo attacco dell'acaro si compie » (pag. 128).

In altre parole, il *danno* che una radice fillosserata potrà risentire dal *Rhizoglyphus* sarà in rapporto prima di tutto con la struttura della tuberosità, in secondo luogo con la rapidità dell'attacco dell'acaro sopra la zona di accrescimento che, in condizioni non ancora ben definite, può essere attaccata all'inizio dei processi degenerativi che sopravvengono in questo tessuto dopo il completo accrescimento della tuberosità.

In questo caso il semiparassitismo del *Rhizoglyphus* può esser considerato come un fattore diretto dello sfacelo della radice. Così avviene infatti nelle tuberosità di 1° grado [1]. Per quelle di 2° grado la possibilità del ritorno della fillossera nelle gallerie abbandonate non rende necessario l'esplicarsi di una simile azione semiparassitaria, perchè la radice possa risentire un danno, per quanto attenuato, dalle erosioni dell'acaro.

Per ciò che riguarda le condizioni che determinano e favoriscono il fissarsi della fillossera sui tessuti profondi nell'interno delle gallerie, io credo che la causa principale sia l'elevata siccità del terreno ed anche le buone condizioni di nutrizione che la fillossera trova in questi tessuti in accrescimento, ricchi di sostanze azotate e idrocarbonate solubili, difese verso l'esterno da un sottile strato di sughero di recente formazione. Oltre a queste due principali condizioni io non voglio escluderne altre, nel 1907 scrissi anche: « L'alternarsi dell'azione dell'acaro a quella della fillossera e viceversa, è legato a circostanze molto indeterminate e forse molto difficili a determinarsi, ma che certamente non seguono una legge fissa » (pag. 129).

Se effettivamente i processi di *rapida distruzione* delle tuberosità di 2° grado, che io ho descritto, si dovessero verificare sempre, in tutti i vigneti fillosserati, l'andamento dei deperimenti delle viti non presenterebbe probabilmente quella diversità che è stata ovunque constatata. E a questo proposito, sino dal 1908 [2] ho scritto molto chiaramente che nella pratica si verificano dei casi nei quali l'acaro può mancare nel terreno dei vigneti fillosserati, o, data anche la sua presenza, la sua azione semiparassitaria sulle tuberosità può essere ostacolata da circostanze sfavorevoli. Per quanto

[1] Cfr. pag. 128, fig. 2, tav. IV, della Memoria citata.

[2] Relazione citata, pag. 15 dell'estratto.

nel 1905-1906 non avessi eseguito speciali ricerche sulla frequenza dei fenomeni descritti, pure io sapeva per mia propria esperienza che il materiale di studio più adatto per osservare l'azione degli acari sulle tuberosità doveva esser raccolto in determinate vigne fillosserate. In prevalenza ne trovai in un vigneto del sig. Conti, presso l'Osservatorio antifillosserico di Fauglia. Le viti (¹) erano allevate ad alberello in un terreno argilloso e assai sassoso, secco d'estate. Il deperimento prodotto dagli attacchi della fillossera procedeva con rapidità (²) notevole manifestandosi con alcune macchie caratteristiche. Le radici per l'esame venivano raccolte per lo più dalle viti della periferia delle macchie, quindi da piante all'inizio del deperimento. A sud di Fauglia, presso Lorenzana, trovai pure del buon materiale. Una particolarità di queste radici era l'emanazione di odore di trimetilammina e di altre basi volatili affini.

Le mie ricerche sulla varia struttura delle tuberosità (³) mi hanno poi dimostrato che non tutte le varietà di vinifera e non in tutte le località esse formano tuberosità di 2° grado con zone di accrescimento molto profonde. Così il *Cassòlo* del Lago Maggiore, e il *Negrara* ne formano più facilmente della *Fresia*, il *Negro-amaro* di Lecce ne forma pure, ma non così frequenti come mi sarei aspettato da un vitigno meridionale.

I terreni umidi, sciolti e profondi, favoriscono la formazione di tuberosità superficiali, a iperplasia diffusa, mentre i terreni ghiaiosi ed aridi soggetti alla siccità nei mesi estivi, provocano la formazione di tuberosità molto penetranti. Tutto ciò è in rapporto con la localizzazione e l'elaborazione delle sostanze appetite dalla fillossera e col grado d'irritabilità delle cellule corticali suscettibili di reagire alla puntura con un'attiva proliferazione.

Sul Lago Maggiore ho eseguito molte ricerche per determinare la presenza e la frequenza del *Rhizoglyphus echinopus*, servendomi, oltre che dell'esame diretto, anche dell'apparecchio speciale ideato dal prof. A. Berlese. Sopra moltissime radici di vite nostrale fillosserata, solo pochi individui di quest'acaro potei trovare e quei pochi vivevano sulle radici di Cassòlo raccolte a Cannero, sul declivio di una collina vôlta a mezzogiorno e che nell'estate ha un terreno asciutto, sassoso. Su quelle radici potei notare anche delle gallerie profonde, aperte lungo la zona d'accrescimento delle tuberosità similmente a quanto avevo osservato a Fauglia. Nelle radici fillosserate, tanto di *Vinifera* che di *Isabella*, nei terreni umidi del Lago Maggiore

(¹) La varietà è chiamata a Fauglia: *Beaujolais*. Si tratta evidentemente di una varietà francese, forse il *Gamay rosso* del Beaujolais.

(²) Per quanto riguarda le conseguenze dell'attacco degli acari la *rapidità del deperimento* non vuol dire sempre la *rapidità del diffondersi della macchia fillosserica*, ma soprattutto la *brevità* del periodo di tempo che va dal primo manifestarsi del deperimento in una vite sino alla sua quasi completa distruzione.

(³) Ne pubblicherò un riassunto preliminare quanto prima.

sono frequenti, in luogo del *Rhizoglyphus*, il *Tarsonemus floricolus* Can. et Fanz., *Gamasus* sp. *Scolopendrella notacantha* [1], le larve di un dittero ortorapo, lombrici, e frequentissimi sono poi dei Poduridi appartenenti ai generi *Aphorura* e *Isotoma*. Da quanto ho potuto osservare mi resulta che questi ultimi insetti vivono solamente nelle zone di tessuti già invasi dal marciume.

In Sicilia, dove mi sono recato nel 1908 e 1909, non ho trovato viti nostrali di impianto relativamente recente, attaccate dalla fillossera e in rapido deperimento, condizioni queste strettamente necessarie per poter verificare se i fatti osservati a Fauglia si fossero ripetuti. Visitai le vecchie viti (var. Cicirieddu), di quasi 50-60 anni di età, coltivate presso Vittoria (nelle vicinanze del R. Vivaio), in terreni contenenti una grande percentuale d'argilla. Le radici più superficiali, di 2-3 anni, portano tuberosità di 2° grado e talvolta con zone di accrescimento assai profonde. Non ho potuto trovare, sul materiale raccolto, individui di *Rhizoglyphus echinopus*; esistono però traccie di erosioni fatte da acari. Le ricerche ulteriori potranno dire se in quei vigneti si trovi realmente l'acaro in questione. Faccio notare però che le condizioni speciali di queste viti, le quali all'epoca della prima infezione fillosserica in Sicilia avevano già un sistema radicale fortemente sviluppato, in un terreno contenente una certa quantità di sabbia, non ci possono fornire dati utili per la questione che c'interessa.

Nell'ultimo biennio ho avuto occasione di visitare, in Sicilia, alcuni deperimenti dell'*Aramon* × *Rupestris Ganzin n. 1* in diverse località dove la presenza della filllossera sulle radici era ben manifesta.

A Canicattì (contrada Cazzola), a Siracusa (contrada Garancino) ho trovato la fillossera fissata sui tessuti corticali profondi, in cavità penetranti, aperte da acari in corrispondenza di tuberosità di 2° grado.

L'*Aramon* × *Rupestris G. n. 1* però non produce che eccezionalmente tuberosita con zone di accrescimento molto profonde, in generale sono tuberosità superficiali che frequentemente ho veduto corrose da acari.

Dall'esame del materiale raccolto, io posso solo desumere il danno, che l'azione complementare degli acari ha certamente prodotto in alcune viti delle località sopracitate. La questione se i tessuti furono attaccati quando ancora erano viventi o solo dopo che erano invasi dal marciume resta per ora insoluta, non avendomi permesso la brevità del tempo di fare lunghe osservazioni sul posto.

La presenza degli acari nel terreno non rappresenta la condizione sufficiente perchè le radici fillosserate debbano venir gravemente danneggiate.

Un esempio di ciò ho potuto osservare nei dintorni di Catania, in contrada Bombacaro, dove le radici di alcuni esemplari di *Aramon* × *Rupe-*

[1] Devo la determinazione di questi organismi alla cortesia del prof. A. Berlese.

stris G. n. 1, importati dalla Francia dal dott. F. Paulsen (1), circa 15 anni or sono, presentano delle tuberosità corrose dagli acari.

Si tratta in questo caso di tuberosità a iperplasia diffusa e superficiale.

Lo stesso fatto accade nel R. Vivaio di Palermo per lo stesso vitigno.

Sempre in contrada Bombacaro a poca distanza dalle vecchie viti di *Aramon* × *Rupestris*, in un recente impianto della medesima vite innestata con Morello, esiste un deperimento di varie piante, sulle radici delle quali ho trovato tuberosità con zone di accrescimento profonde e con erosioni penetranti, prodotte da acari (2). In questi casi, come del resto avviene in generale, l'avanzarsi più o meno profondo dell'acaro è subordinato all'alterazione primitiva prodotta dalla fillossera. Quali siano le cause che possano aver determinato la formazione di tuberosità penetranti in queste viti, lo potranno forse rivelare ulteriori ricerche. Lo studio che ho fatto per ora di questi ed altri deperimenti in Sicilia è attualmente assai incompleto e non posso assolutamente pronunziarmi sulla parte da attribuirsi alla fillossera e agli acari nel determinare od aggravare i danni ai quali soggiace in Sicilia l'*Aramon* × *Rupestris*.

Un altro fatto desidero di far notare. Su tutte le radici fillosserate di questo vitigno, nelle varie località che ho visitato in Sicilia, e specialmente in contrada Bombacaro a Catania, ho trovato che, in corrispondenza di tuberosità, si trovano i tessuti corticali invasi, sino al cilindro centrale, da un micelio giallo, formante delle grosse vescicole dello stesso colore. Questo micelio, che appartiene al fungo (simile a un *Orcheomyces* Burgeff) endofita delle radichette erbacee (micorize), vive comunemente da saprofita sulla superficie esterna delle radici di 2-3 anni. Giammai lo avevo osservato nello interno della corteccia secondaria. Questo fatto così eccezionale è degno di interesse e non solo per il caso della vite. Io per ora ignoro se la penetrazione di questo micelio avvenga nei tessuti ancora vivi, perchè quando raccolsi il materiale il micelio si trovava in porzioni di corteccia necrotizzata. Io credo che la penetrazione di questo fungo nelle radici avvenga nella primavera e anche in autunno (3).

Riassumendo, dalle osservazioni fatte in diverse regioni fillosserate, per ora non mi resulta alcuna prova in contrario a quanto nel 1907 ho descritto come il *processo tipico di rapida distruzione* di una tuberosità con grave danno della radice.

(1) Il dott. Paulsen li acquistò direttamente dal Ganzin.

(2) Non ho eseguito alcuna raccolta di questi acari e non posso dire che si tratti proprio dell'*Heteroglyphus* o del *Rhizoglyphus*. Gli escrementi rimasti nelle gallerie misurano: $\mu = 26 - 30 \times 36 - 39$; dimensioni che coincidono presso a poco con quelle delle deiezioni del *Rhizoglyphus*.

(3) Ho osservato la penetrazione del fungo delle micorize nella corteccia di radici di 2-3 nnni anche nella *Rupestris du Lot* a Partinico (contrada Rama).

La natura del terreno, la varietà del vitigno, l'andamento della stagione influiscono notevolmente sul verificarsi e sull'entità del processo. Secondo quanto hanno osservato Viala e Mangin ed io stesso, nel caso delle radici fillosserate deve essere ammessa la facoltà in certi acari (*Rhizoglyphus*, *Heteroglyphus*) di attaccare le tuberosità quando ancora sono viventi.

Le inconstanti, e per ora ben poco determinate condizioni, nelle quali questo parassitismo secondario si compie, rendono possibile il perdurare del disaccordo fra alcuni ricercatori.

Sono convinto di poter dare la dimostrazione delle mie affermazioni nella stagione opportuna, in un vigneto che presenti rapidi deperimenti di viti nostrali, in terreno secco.

Queste ricerche dovranno anzi essere estese per quanto è possibile per determinare se in tutti i rapidi deperimenti di viti attaccate dalla fillossera si ripeta lo stesso processo di distruzione delle radici.

Fisiologia. — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Azione del succo gastrico sulla zeina e sulla gliadina.* Nota II di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Patologia. — *Il kala-azar nella seconda infanzia, nell'adolescenza e nell'adulto.* Nota del prof. U. Gabbi, presentata dal Socio B. Grassi.

Nella mia seconda pubblicazione su questo argomento (Policlinico, maggio 1909), io ho descritto un caso di kala-azar in un giovane di 18 anni, ritenuto affetto prima da malaria insanabile e poi da pseudoleucemia splenica. Espressi allora il dubbio che la infezione da Leishmania si potesse riscontrare, sebbene con minor frequenza, anche nell'adolescente e nell'adulto, e lo fondavo sull'osservazione di casi di individui ritenuti morti per malaria grave ed incurabile sebbene, *vita durante*, non si fossero trovati nè parassiti, nè pigmento nel sangue e nella milza.

Ugualmente mi sorprendeva il reperto di tumori cronici di milza in individui morti per malattie comuni ed abitanti in paesi di malaria mite.

A queste mie vedute nella discussione interessante che su questo tema si accese al Congresso internazionale di medicina a Budapest, si associò il Laveran, il quale ritenne prematuro escludere che la infezione si potesse riscontrare nell'adolescente e nell'adulto.

Le mie previsioni cominciarono a confermarsi quando potei constatare la malattia in due ragazzine, l'una di *undici* e l'altra di *tredici* anni (segnalate a me dal dott. Lacava di Bovalino), ed in un uomo di 38 anni di Mes-

sina (segnalato a me dal dott. Occhipinti di quella città). Nella prima, che fu accolta per un mese nella clinica medica di Roma, fu messa in evidenza la Leishmania con due punture di milza; nella seconda pure la si vide nel succo splenico ottenuto con puntura; nel terzo il parassita fu incontrato in tre su quattro punture spleniche. Il parassita fu trovato libero od endocellulare, ma in numero scarso.

Sono quattro adunque su una sessantina di casi che sono stati sino ad oggi pubblicati, i casi che dimostrano che l'*età* non ha quel valore di differenziazione tra kala-azar indiano ed italo-tunisino, che le si è voluto concedere nell'attesa di poter mettere in rilievo differenze morfologiche e biologiche nel parassita che genera la malattia.

D'altro canto è bene non dimenticare che anche nell'India la malattia colpisce individui di tutte le età, ma più specialmente i bambini. Il dottor Markham Carter, direttore dell'Istituto Pasteur dell'India, nel rassegnare i caratteri differenziali tra kala-azar e bottone d'Oriente, ha scritto che in quelle regioni « *i bambini sono più comunemente attaccati* » (British med. Journ., sept. 1909).

È perfettamente vero che qui da noi finora si è trovata la malattia con grandissima prevalenza nei bambini, ma non bisogna dimenticare che le malattie tropicali quando si diffondono e domiciliano nei climi temperati, pèrdono della loro virulenza. La malaria e la febbre di Malta non hanno da noi nè la gravità, nè la frequenza che si constatano nei paesi dei tropici. L'insistere, proprio nei primi momenti dello studio di una malattia appena appena identificata, nel differenziarla da quella che le dà il nome ed il contenuto sintomatico — per il fatto della *età* — mi pare che possa anche costituire un danno, quello cioè di sospendere ogni ricerca di possibili casi nell'adolescente e nell'adulto. Chi conosce la ripugnanza che hanno gli abitanti dell'Italia meridionale e della Sicilia per gli ospedali, deve comprendere come i casi non si debbano attendere, ma ricercare; e quest'opera veramente umana deve essere fatta dai medici pratici, ai quali spetta la segnalazione dei casi.

Molto più poi che rispetto alla morfologia, la Leishmania che troviamo nei casi della Sicilia e della Calabria, non presenta alcuna differenza nè negli strisci, nè nelle sezioni degli organi con la *L. Donovani* (India), nè con la *L. infantum* (Tunisi). Ciò risulta evidentemente dal confronto dei nostri preparati con quelli gentilmente inviatici da Nicolle e da Patton.

Anche rispetto alle differenze biologiche non ancora una si è data che sia veramente decisiva.

Il reperto del bottone di Oriente fra noi in quello stesso paese dove si riscontra il kala-azar, deve rendere anche più circospetti nel trarre, appena sul limitare delle ricerche, delle conclusioni definitive [1].

[1] Nella Comunicazione sul bottone di Oriente fatta da me e dal dott. Lacava è incorso errore nella nota in calce, la quale deve essere così corretta: « Del paese di Bovalino (Calabria), dove si osservano tre casi di kala-azar... e due in adolescenti ».

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte del Socio straniero prof. EDOARDO PFLUEGER, e del Corrispondente prof. ENRICO SERTOLI; ricorda inoltre la perdita fatta dalla scienza nella persona del prof. ANGSTRÖM di cui rammenta brevemente i meriti.

Il Socio R. NASINI legge la seguente Commemorazione del Socio straniero dott. LUDWIG MOND.

« *Compiuta è l'opera tua. E bella, grande ed alta fu questa opera. Fu quella di un uomo retto dallo spirito elevato, dal cuore aperto e generoso, dagli affetti forti e profondi: quella fu di un uomo che ebbe vaste e logiche le concezioni e la volontà ferma. Attento e minuzioso nell'esame, deciso e tenace nell'esecuzione, con persistente energia egli volle conservati gli edificî che era giunto ad innalzare* ».

Queste ispirate e calde parole pronunziò, sul feretro del nostro Socio straniero LUDWIG MOND, colui che ben lo conobbe e ben seppe apprezzarlo, Ernesto Solvay, l'insigne industriale e filantropo belga, che insieme col Mond può dirsi si dividesse il regno della grande industria chimica.

Uomo veramente eminente fu Ludwig Mond: non solo fu egli forse il più grande chimico industriale dei nostri tempi, come ebbe a dire il Witt, ma fu anche un'alta personalità umana, uno di quelli uomini che per il complesso delle loro qualità morali ed intellettuali e per l'insieme della loro vita onorano l'umanità.

Con mesta riconoscenza io accettai dal nostro Presidente l'incarico di commemorare qui tra noi questo uomo, dal quale tanti incoraggiamenti ed aiuti io ebbi nella mia vita scientifica, ed a cui mi legarono un affetto intenso ed una venerazione fatta di ammirazione e di gratitudine: vorrei che la profondità dei miei sentimenti trasparisse, quale omaggio alla sua memoria, in quello che di lui mi accingo a dire.

Ludwig Mond, nato a Cassel il 7 marzo 1839, studiò chimica sotto illustri maestri, il Kolbe a Marburg, il Bunsen a Heidelberg. Cominciò la sua carriera di chimico industriale a Mainz in una fabbrica di acido acetico per distillazione del legno, lavorazione che era stata impiantata dal padre di Remigio Fresenius. Poi in Colonia si occupò dell'ottenimento dell'ammoniaca da varî materiali azotati, specialmente dai ritagli di cuoio, e fu anche assistente di A. Loewenthal, che doveva più tardi divenire sno suocero, e che fu uno degli iniziatori della galvanoplastica e della elettrochimica in Germania. Fu dopo in altre fabbriche in Germania e in Olanda e, trovato il processo di recuperazione dello zolfo dai residui della soda Leblanc, residui

che costituivano uno dei principali incagli a questa industria, cercò di applicare la sua invenzione in varî impianti, così in quello di T. Hutchinson a Widnes in Inghilterra, e fondò una fabbrica a Utrecht che lavorò col suo processo. Nel 1867 si stabilì definitivamente in Inghilterra e introdusse in varie fabbriche di soda Leblanc il suo processo. Questo, insieme con quello dello Schaffner, studiato presso a poco contemporaneamente, fu come la preparazione al processo Chance, anche adesso utilizzato dove si produce la soda Leblanc. Nel 1872 conobbe il Solvay e studiò il suo processo all'ammoniaca, già impiantato regolarmente, ma in piccola scala, nel Belgio. Provatolo, e acquistato il brevetto, introdusse la lavorazione in Inghilterra e nel 1873 impiantò col Brunner a Winnington, approfittando delle acque salate e delle miniere saline ivi esistenti, la lavorazione della soda alla ammoniaca, alla quale si dètte con tutta l'energia, con tutto il suo ingegno. La lotta era aspra. Mille difficoltà di ordine pratico si opponevano al trionfo della nuova industria, e fu gran merito del Mond quello di vincerle ad una ad una: diecine e diecine di invenzioni, alcune brevettate, altre no, migliorarono di anno in anno la lavorazione con ottimi frutti. Nel 1880 la lotta era completamente decisa in favore della soda Solvay; il Mond aveva già accumulato una ingente fortuna e le fabbriche di Winnington erano già, come si sono mantenute, il più grande impianto del mondo per la soda e per i prodotti affini. Allora potè volgere anche ad altri scopi il suo talento. Nel bel discorso, che egli fece, come presidente, alla Società chimica industriale inglese nel 1889, ed in cui espose molte sue vedute sulle relazioni tra scienza e industria, egli rese conto delle sue ricerche, che miravano soprattutto a risolvere per via chimica il problema dell'azoto. Principalissima quella della utilizzazione dei combustibili fossili di minor pregio per ottenere non solo gas da bruciare, ma insieme l'ammoniaca. Da questi studî nacque l'industria del gas Mond, che è ad un tempo distillazione del carbone e preparazione di gas misto, ed è tanto importante per noi, che possediamo abbondanza di torbe e ligniti, assai poco utilizzate sin qui. Non ancora tutti gli ostacoli sono superati, ma, là dove le condizioni lo hanno permesso, l'industria si è bene sviluppata. Oltre tre milioni di tonnellate di carbone si sono gassificate nei gasogeni Mond ed il grande impianto di Dudley Port nella Contea di Stafford fabbrica solfato ammonico e distribuisce il gas Mond a più di cento manifatture, sparse sopra un esteso territorio, gas che si impiega per ogni sorta di applicazioni, sia come forza motrice, sia per riscaldamento di forni di ogni tipo. Ed anche in Italia sta sorgendo a Orentano, in quel di Lucca, un impianto, a cui presiede l'egregio ing. A. Cerasoli che fu del Mond segretario tecnico.

Ad un'altra grande impresa mirò il Mond insieme col dott. Langer, a rendere industrialmente pratica la pila a gas del Grove, adoperando, come gas, l'aria e il gas all'acqua, depurato dall'ossido di carbonio. Se a questa

idea grandiosa non corrispose l'applicazione pratica, è ad ogni modo ammirabile l'ardimento, la poesia del lavoro scientifico e tecnico che traspare dalle ricerche del Mond su questo argomento, sul quale forse l'avvenire può riservare delle sorprese tali da rendere realtà il suo sogno: il processo di contatto per la fabbricazione dell'acido solforico fu per molto tempo irrealizzabile; poi le piccole difficoltà, che pur ne impedivano la esecuzione, sparvero di fronte all'indagine continuata. A quel lavoro si connettono in un certo modo le importanti ricerche scientifiche eseguite dal Mond insieme col prof. Ramsay e con lo Shields sulla occlusione dell'idrogeno e dell'ossigeno col palladio e col platino. Caratteristica di ogni lavoro del Mond fu questa: che ogni ricerca scientifica doveva esaminarsi in relazione colle sue applicazioni all'industria ed ogni trovato industriale ricevere la sua spiegazione, il suo aiuto se incompleto, nella rigorosa indagine scientifica.

Dove però, a giudizio di tutti, eccelse l'opera del Mond, fu nella scoperta del nichel carbonile e nella applicazione di questa scoperta all'industria. Mai forse la scienza e l'industria si sono così strettamente allacciate e intrecciate, mai dall'una ebbe l'altra tanto aiuto. Ricordo una luminosa domenica di giugno del 1889: era la prima volta che io metteva il piede nella bella residenza del Mond, ai Poplars. Erano da lui convenuti, nel pomeriggio di quella domenica, Mendeléeff, chiamato a Londra per la Faraday Lecture, il Frankland, il Roscoe, il Ramsay, il Thorpe ed altri uomini di scienza. Nel laboratorio privato del Mond ci fu mostrato, con nostra grande meraviglia, quel gas — tale lo si credeva allora — che conteneva tanto nichel. Ben rammento quante e quante opinioni diverse furono manifestate su di esso: *tot capita, tot sententiae!* Il Mond ce ne fece la storia. Egli si occupava di quella sua bella invenzione del recupero del cloro dal cloruro ammonico che si forma nel processo Solvay. Ad alta temperatura il cloruro ammonico attaccava tutti i materiali, e grandi difficoltà vi erano per le valvole che dovevano permettere, alternativamente, l'entrata ad alta temperatura del vapore di cloruro ammonico e dell'aria. Ottimamente funzionavano nelle esperienze di laboratorio le valvole di nichel, ma, quando si applicavano in quelle industriali, anche esse venivano attaccate e si formava su di esse un deposito nero. Ora la sola differenza tra le esperienze di laboratorio e quelle industriali era che, in quelle, per spazzar via un gas prima di introdurre l'altro, si impiegava l'anidride carbonica pura, nelle seconde anidride carbonica che proveniva da un forno a calce e che conteneva un po' di ossido di carbonio. Nello stesso tempo il Mond col Langer si occupava della eliminazione dell'ossido di carbonio dai gas dei generatori, quelli che gli servivano per la sua pila, e avevano trovato che il nichel ad alta temperatura, in opportune condizioni, trasforma l'ossido di carbonio in anidride carbonica. Questi due fatti spinsero a investigare metodicamente l'azione dell'ossido di carbonio sul nichel e ne venne fuori la scoperta del nichel carbonile. Bruciavano il gas, il velenoso

ossido di carbonio, che usciva dal tubo in cui vi era il nichel portato ad alta temperatura, e si accorsero che, quando la temperatura scendeva sotto ai 100°, la fiamma diventava stranamente luminosa e da essa per raffreddamento si deponeva una sostanza che riconobbero esser nichel puro. La scoperta di questo interessante composto, così impreveduto e che tanto meravigliò i chimici, era fatta.

Il gas fu poi condensato, ed il liquido, che era il nichel tetracarbonile, fu studiato sotto ogni aspetto, come sempre voleva si facesse il Mond. Ma la preparazione era difficile, non ben precisabili le condizioni per l'ottenimento, delicata la questione della temperatura più adatta, cosicchè a nessun chimico sarebbe passato per la mente che una utilizzazione industriale potesse scaturire da quella scoperta, certo di primo ordine per la scienza pura, alla quale sussegui quella dei ferrocarbonili. Ma ben fu detto in una memorabile riunione dell'Associazione degli ingegneri in Londra da J. E. Stead [1]: se nessuno poteva pensare che quel processo potesse diventare industriale, si pensava pure che se c'era un uomo al mondo cui a tanto fosse dato riuscire, questi era il dott. Mond. Le difficoltà non consistevano solo nell'ottenimento del composto: ve ne erano — e sembravano quasi più grandi — nell'arrostimento dei minerali solforati e arsenicali di nichel, nella delicata successiva riduzione coll'idrogeno, nei pericoli per la velenosità del gas. Pure il miracolo industriale si fece. Eseguito prima, come disse il Mond, un completo apparecchio tecnico in scala lillipuziana, si procedette subito dopo all'impianto di Birmingham, che io con tanto stupore vidi in pieno funzionamento nel 1894. Quella che a me non era parsa che una delicata esperienza di laboratorio, la vedevo, gigantescamente ingrandita, trasformata in produzione industriale procedente con mirabile regolarità e precisione! Ma non si trattava — per la grande industria moderna — che di un piccolo impianto. Ancora alcuni anni, che però furono anni di immani fatiche, di crude lotte, di grandi dolori, che logorarono — ahi quanto! — la forte, ma squisitamente sensibile fibra del dott. Mond, ancora alcuni anni, e la potente Mond Nichel Company si sarà costituita e le estesissime miniere del Canadà serviranno a preparare la metallina di nichel e rame nello stabilimento di Victoria Mines nell'Ontario, metallina che verrà raffinata nella grande fabbrica di Clydach nel South Wales. Fu dunque con giusto orgoglio che il Mond potè annunziare l'anno scorso a Londra, quando inaugurò la sezione di chimica inorganica del VII Congresso internazionale di chimica applicata, che 10,000 metri cubi di ossido di carbonio, carichi di nichel, circolavano nelle sue fabbriche di Clydach,

(1) « The Extraction of Nickel from its Ores by the Mond Process by W. Chandler Roberts Austen F. R. S. with an Abstract on the discussion upon the Paper ». Seduta dell'8 novembre 1898 della « Institution of Civil Engineers ». Proceedings di questa Associazione, vol. 135, parte I. Si parla a lungo del processo Mond, dei minerali di nichel e vengono descritti e illustrati con figure gli apparecchi industriali.

ove notte e giorno il nichel silenziosamente si deponeva, quel nichel di Clydach che basta ormai a quasi tutto il consumo mondiale dell'utilissimo metallo, pel quale nuove applicazioni sono sórte, per la maggiore facilità della sua estrazione.

Disse Lord Kelvin al Mond: « Voi avete dato le ali a un metallo pesante: cercate di darle anche ad altri ». Ma per molto tempo solo il ferro prese il volo. Non fu che in questi ultimi anni che dal cobalto, dal rutenio e dal molibdeno si poterono avere i composti carbonilici. Singolari composti, la cui esistenza l'anno passato ci fu svelata dal Mond, i quali non si formano che ad alta temperatura e sotto fortissime pressioni (a 450 atmosfere e ai 300° quelli del rutenio e del molibdeno) e che ci fanno presumere come forse anche per i gas inerti sieno possibili analoghe combinazioni con altri elementi, realizzando temperature ancora più elevate, pressioni ancora più forti. Questo fu l'ultimo lavoro a cui il Mond dètte il nome e, certo, ben degno coronamento esso è della sua vita scientifica [1].

[1] Le principali pubblicazioni del dott. Mond sono le seguenti:

L. Mond. « The Patent Laws, with special reference to chemical Inventions ». Soc. of. .chem. Ind., 1881.

L. Mond and C. Langer. « A new Form of Gas Battery ». Proc. R. Soc. *46*, 296. 1889.

L. Mond. « Presidential Address at the annual Meeting of the Soc. of. chem. Ind. ». 10 th Iuli 1889. Journ. Soc. chem. Ind. VIII, 1889.

L. Mond. « Development of voltaic Electricity by atmospheric Oxidation of combustible Gases ». Journ. Soc. chem. Ind. IX, 1890.

L. Mond, C. Langer, F. Quincke. « Action of earbon Monoxide on Nickel ». Journal Chem. Soc. LVII, August 1890 ».

L. Mond and C. Langer. « On Iron Carbonyls ». Journ. Chem. Soc. LIX, December 1891.

L. Mond and F. Quincke. « Note on a volatile eompound of Iron with carbonic Oxide ». Irans. Chem. Soc. 1891.

L. Mond. « On Nickel earbon Oxide and its application in Arts and Manufactures ». Rep. British Ass. 1891.

L. Mond and R. Nasini. « Ueber einige physikalische Eigenschaften des Nickel-tetra-Karbonils und andrer Nickelverbindungen ». Z. physik. Chemie VIII, 2, 1891.

L. Mond e R. Nasini. « Studî sul nichel tetracarbonile ». Rend. Acc. Lincei, maggio 1891 e Gazzetta chimica italiana 1891.

L. Mond. « Metallic Carbonils ». Proc. Royal Inst. of Great Britain. 1892.

L. Mond e G. Cuboni. « Sopra la così detta rogna dei bronzi antichi ». Rend. Accademia Lincei. 1893.

L. Mond. « Address delivered at the opening of the Schorlemmer Laboratory for organic Chemistry ». Manchester, Sowler and C°. 1895.

L. Mond, W. Ramsay, J. Shields. « On the occlusion of Oxygen and Hydrogen by Platinum Black. Part I ». Proc. R. Soc. *58*.

L. Mond. « The History of my Process of Nickel Extraction ». Journ. Soc. chem. Ind., November 1895.

L. Mond. « Address to the chemical Section of the British Ass. ». Liverpool 1896. Rep. British Ass. 1896.

Ebbe il Mond non ordinarie attitudini alla scienza pura, ma certo dove rifulse il suo ingegno fu nelle applicazioni di essa all'industria. Rapidissima in lui l'intuizione, e quasi sempre sicura, se un trovato scientifico poteva diventare pratico; e il tentativo subito si faceva, sormontando le difficoltà materiali di ogni specie, che per lui non esistevano e non voleva esistessero nemmeno per chi lavorava con lui. Arditissimo e rapido nelle iniziative altrettanto fu paziente, minuzioso e tenace nella esecuzione. Per la scienza pura egli nutrì una venerazione senza limiti; ben minore fiducia ebbe nello insegnamento della chimica tecnologica o industriale e nei laboratori e negli istituti che a questi rami speciali volevano erigersi o si erano eretti. E forse anche eccedette, e fu incline a negare ogni efficacia di tale indirizzo nella cultura del chimico. Così se prendiamo in esame le molte e cospicue elargizioni che fece il Mond, e di cui tra poco diremo, nemmeno una ne troviamo per aiutare, o insegnamenti, o istituti di chimica applicata. Si diventa chimico industriale, egli diceva, quando, e solo quando, si ha un largo e solido fondamento nella scienza pura. « *Il lavoro dello scienziato deve essere il primo e i principii scientifici debbono esser bene elaborati e chiaramente compresi prima che un importante progresso nelle nostre industrie possa oggi essere compiuto* ». In tal modo egli si esprimeva nel discorso che fece per l'apertura del laboratorio Schorlemmer per la chimica organica a Manchester, ed esortava i giovani « *a mirare al progresso della scienza in sè e per sè senza occuparsi di un risultato pratico immediato; questo è certo*, aggiungeva, *che verrà prima o dopo* ». Ben disse di lui il Guye, che lo chiamò organizzatore di genio, che sempre egli stette all'agguato delle nuove applicazioni della scienza all'industria chimica. Con vero entusiasmo seguì il rifiorire della chimica fisica: vide subito quali enormi vantaggi l'industria poteva trarre dalla rinnovata disciplina, in quanto che appunto essa mirava a stabilire le condizioni più opportune per le trasformazioni chimiche, per affrettarle, per ritardarle [1]. Nessun più fervido ammiratore e più valido cooperatore di lui ebbe la nostra giovane scienza, alla

---

[In questo discorso si parla dei varî metodi per la preparazione del cloro, e del processo Mond per il suo ricupero dal cloruro ammonico].

L. Mond, W. Ramsay, J. Shields. « On the Occlusion of Oxygen and Hydrogen by Platinum Black. Part II ». Phil. Trans. R. Soc., Vol. 190. 1897.

L. Mond, W. Ramsay, J. Shields. « On the Occlusion of Hydrogen and Oxygen by Palladium ». Ibidem, vol. 191. 1898.

L. Mond, H. Hirtz, M. Dalton Cowap. « A volatile Compound of Cobalt with Carbon Monoxide ». Chemical News, 2 October 1908.

L. Mond. « Note on the volatilisation of heary Metals by means of Carbon Monoxide and its industrial Application ». [Questa Nota fu presentata alla Sezione di chimica inorganica del 7° Congresso internazionale di Chimica applicata in Londra nel maggio 1909. Si parla in essa dei composti carbonilici del cobalto, del rutenio e del molibdeno].

[1] Del Mond considerato come chimico-fisico parlo a lungo nella mia pubblicazione. *La Chimica fisica: il suo passato, quello che è, quello che si propone.* Padova, Draghi, 1907.

quale principalmente intendeva fosse dedicata la Davy Faraday Institution. Di nessuna cosa egli parlava più volentieri, ed invero con molta competenza, che dei progressi continui di questa disciplina, ai quali proprio si entusiasmava.

Riguardo alle invenzioni industriali egli credeva che solo criterio per giudicarne fosse la praticità loro su larga scala, non la novità, non la ingegnosità: poco importava che tutto fosse già noto: inventore era quello che la cosa, nota o no, rendeva possibile nelle sue applicazioni. Chimico tecnologo moderno, egli non credeva si potesse più dire che la necessità è la madre delle invenzioni, ma si doveva invece riconoscere che fattrice del progresso scientifico è la costante metodica investigazione dei fenomeni naturali, e pensava fosse lecito ormai parlare di una scienza delle invenzioni, cioè di una disciplina intesa a sviluppare metodi scientifici per risolvere problemi industriali. Tale idea sempre lo guidava, la ritroviamo in molti suoi discorsi, si manifestava nelle discussioni, spesso assai vivaci, che egli aveva cogli amici e coi colleghi. Sebbene possedesse grandiosi impianti elettrochimici e ad alcuni processi, come a quello del Hopfner per lo zinco, avesse portato importanti miglioramenti, non fu un esagerato ammiratore dell'elettrochimica nelle sue applicazioni industriali, vale à dire non ritenne che tutto ormai nell'avvenire dovesse farsi e si sarebbe fatto colla applicazione dell'elettricità alla chimica. Spesso a noi italiani diceva di non fondare troppo esagerate speranze sul nostro carbone bianco perchè, da ultimo, è sempre col carbone nero che si ha da lottare. Riteneva che molte reazioni e metodi erano da scoprirsi, di utilizzazione ancor più semplice e più economica che quelli elettrochimici. Una delle sorgenti di maggior sua soddisfazione nella scoperta del nichel carbonile, e nella successiva trionfale applicazione all'industria, fu quella di aver trovato una reazione, un processo, così semplice da non potere essere superato da nessun trovato elettrochimico. Ho voluto esporre queste idee del Mond, del grande industriale, dell'uomo che apparve meravigliosamente pratico e che seppe crearsi una fortuna principesca, perchè se qualche industriale nostro legge queste pagine, si persuada che il più grande segreto per far prosperare una industria è oggi quello di lavorare secondo quei dettami che solo la scienza, intensamente e continuatamente rivolta all'industria stessa, può suggerire.

Quale uso fece il Mond delle sue ricchezze è ormai universalmente risaputo [1]. Pochi uomini furono più di lui liberali verso la scienza, verso

[1] Circa 9 milioni di lire il Mond ha elargito in questi ultimi anni (compresi i legati) per la scienza, le arti, la cultura e la previdenza. Fra i più importanti doni e legati vanno rammentati i seguenti: alla Royal Society di Londra e alla Università di Heidelberg lire 1,250,000 per ciascuna; all'Accademia « der bildenden Künste » di Monaco e alla città di Cassel lire 500,000 per ciascuna; per il laboratorio Davy-Faraday lire

le arti, verso le istituzioni di previdenza e di beneficenza. Alieno, lui ed i suoi dal fasto, dalle spese intese solo a soddisfare ambizioni spesso puerili, egli per il benessere degli altri, per il progresso umano sotto ogni sua forma fece uso veramente regale della sua fortuna. Non appena al suo ardire e alla sua tenacia sorrise il successo, subito cominciò delle sue ricchezze a fare uso mirabile: era l'energia che si accumulava sotto forma di capitale che egli utilizzava per creare nuove industrie, per fare intorno a sè la felicità e la prosperità. Le sue ricchezze non costarono lagrime e rovine, come alcune di quelle colossali di oltre mare, che i possessori riversano poi tardamente, e non sempre con molto discernimento, in pro della umanità, che si vendica col non esser loro nemmeno grata; non dissimili molto dai grandi predoni delle epoche passate che ai conventi e agli ospedali cedevano paurosi, prima di morire, l'oro male accumulato. La istituzione del laboratorio Davy Faraday, per cui dètte tre milioni di lire, il largo aiuto alla Royal Society per varie imprese, tra le quali quella del Catalogo internazionale della letteratura scientifica, a cui tanto si interessa la nostra Accademia, le molte sovvenzioni per le ricerche a bassa temperatura che sono riuscite così importanti mercè la grande abilità del nostro Socio straniero Sir James Dewar, i legati alla Università di Heidelberg, alla Società chimica tedesca per fondare il « chemische Reichsanstalt », l'istituzione del premio Cannizzaro, non costituiscono che una piccola parte dei benefici arrecati dal Mond alla scienza pura. Ovunque poi sorgesse un'istituzione per prevenire o alleviare i mali, per elevare la cultura, per far progredire la scienza o le arti, l'appoggio del Mond non venne mai a mancare, e la sua memoria è indissolubilmente legata a fondazioni che, speriamo, non morranno. Beneficî altrettanto cospicui ebbero da lui i suoi operai e i suoi dipendenti nelle grandi fabbriche che egli aveva fondato, o alla cui direzione partecipava. Se la ristrettezza del tempo non me lo vietasse, io vorrei mostrare quali mirabili istituzioni di previdenza, di soccorso e di cultura sieno state ivi create, e quanto egli cercasse l'innalzamento morale e intellettuale dei suoi operai, larghe somme concedendo a questo scopo. Nulla gli fu più caro della riconoscenza di essi, la quale si manifestò a lui a Winnington in forma commovente e solenne, come nulla più lo addolorò se vide le sue intenzioni,

---

3,000,000; alla Società chimica tedesca lire 246,000; all'Accademia dei Lincei per la fondazione del premio Cannizzaro lire 187,000; alla Royal Society per il « Catalogue of Scientific Papers » lire 350,000; al « Lister Institute of preventive Medecine » lire 189,000; al « Infants Hospital » lire 346,000; per le ricerche sulla velenosità del nichel carbonile lire 130,000; alla Brunner, Mond and C°. Ltd. per il fondo delle pensioni agli operai lire 500,000; alla Royal Institution lire 120,000; per l'edificio dell'Istituto fisiologico dell'University College di Londra, che prenderà il nome del Mond, lire 75,000. E queste non rappresentano che una parte delle somme da lui elargite, senza tener conto di quelle impiegate in pura beneficenza.

l'opera sua qualche volta da loro non compresa. Certo egli voleva che l'uomo lavorasse e a lavorare lo aiutava in tutti i modi; se però gli sembrava che si volesse sfruttare la sua beneficenza, che si volesse vivere di essa, allora si irrigidiva, si manifestava il suo carattere forte, violento, che potè non rare volte sembrare duro, a chi non seppe penetrare nell'anima sua. Ma alla beneficenza che cerca la miseria nascosta e vergognosa per alleviarla, che perdona anche alle debolezze, che non opprime sotto il disprezzo, ma redime, provvide sempre l'angelo di Casa Mond, quell'angelo di bontà, di semplicità e di delicatezza che egli ebbe a compagna della sua vita.

« **Là dove egli pose la mente, Ella il cuore** »:

così in una stupenda iscrizione Marco Tabarrini riassumeva la vita di una benefica donna, la contessa Paolina, moglie del grande industriale Francesco De Larderel, e così potrebbe riassumersi quella della eletta Signora, che fu la buona ispiratrice del cuore del Mond, e seppe così bene smorzarne le impetuosità o mitigarne gli effetti, che il nome loro, ovunque essi abbiano vissuto, è nome benedetto da tutti. Delle sue fatiche si riposava nel culto dell'arte. La musica e la pittura predilesse. Ammirò, sopra tutti, i nostri vecchi pittori e nella sua casa di Londra raccolse una delle più belle gallerie dell'Inghilterra, galleria di capolavori, che alla sua morte lasciò al Governo inglese. E così questo, che fu l'unico suo grande lusso, ritornò anch'esso a beneficio della sua patria di adozione. Dicesi che sia il più gran dono che in questi ultimi cento anni abbia avuto il Governo inglese da un privato.

Amò di grande amore il nostro paese: lo amò nello splendore del suo cielo, nella bellezza dei paesaggi, nei costumi del popolo, nell'arte degli antichi: lo amò nei suoi uomini di scienza, nei suoi letterati, nei suoi artisti. Molte istituzioni nostre di previdenza e di beneficenza soccorse; molte sventure, grandi e piccole, consolò insieme con la sua buona compagna. Seguiva con interesse vivissimo tutte le nostre vicende economiche e politiche. Un tempo avrebbe anche voluto partecipare al nostro sviluppo industriale; ma non fu ben secondato; e fu danno. Gli italiani trovavano nella sua casa ospitale dei Poplars un lembo del loro paese, dove tutto parlava dell'Italia. Quanti lieti ricordi del nostro paese e dei nostri uomini evocava il sig. Mond e la sua gentile famiglia! quanta ammirazione per l'Italia prorompeva dai loro cuori, mentre a noi sorridevano la Vergine del Tiziano e la bella Flora di Palma il Vecchio!

Qui a Roma il Mond veniva colla famiglia da più di venti anni, ospite della sua congiunta miss Harry Hertz, la coltissima, buona e spirituale dama che Roma ormai considera come sua cittadina. Veniva in quel palazzo Zuccari di cui tutti loro erano innamorati, così glorioso per i ricordi, dive-

nuto anch'esso nido dell'arte, così semplicemente e largamente ospitale a tutti. Per la scienza italiana ebbe il Mond grandissima predilezione, e cospicui aiuti ebbero da lui l'Istituto chimico di Roma e quelli miei di Padova e di Pisa, e largamente egli volle incoraggiare le mie ricerche sopra i gas dei soffioni boraciferi: idee grandiose ed ardite egli aveva a proposito della emanazione radioattiva in essi contenuta, così grandiose che io non ebbi il coraggio di seguirlo. Per il nostro grande Cannizzaro nutrì un'ammirazione intensa, una venerazione profonda: diceva che l'amicizia di lui era una delle più grandi soddisfazioni della sua vita. In onore del Cannizzaro istituì presso la nostra Accademia quel cospicuo premio a lui intitolato, che l'anno 1911 sarà assegnato per la prima volta, ed al quale è da augurare frutto pari all'amore per la scienza che ebbe colui che lo istituì. L'anno decorso gli Italiani, che convennero in Londra pel Congresso internazionale di Chimica applicata, vollero mostrare al Mond il loro grato animo; ed il 30 maggio, in occasione di una splendida Garden Party data dal Mond ai congressisti, gli fu offerta in nome di quasi cinquecento chimici nostri, una targa di bronzo, lavoro egregio dello scultore Carlo Fontana, nella quale l'opera del Mond veniva simboleggiata. Parlarono, presentandola, il prof. Ciamician, io ed il prof. Paternò, il quale così molto bene si espresse: « Il premio che avete istituito presso l'Accademia dei Lincei e che avete voluto adornare col nome illustre e venerato di Stanislao Cannizzaro sarà per i chimici italiani, ora e sempre, monumento perenne di riconoscenza verso di voi. L'onore fatto al nostro grande Maestro è una catena indissolubile che lega il vostro nome alla scienza italiana ». Rispose il Mond dicendo che egli aveva avuto in mira di additare alle presenti e alle future generazioni di chimici, quali splendidi risultati si possano ottenere da una vita di vera devozione alla scienza, quale era stata e quale era quella del Cannizzaro. Fu così lieto in quel giorno, appariva così pieno di nuovo vigore, di nuova energia che tutti speravamo ormai che ancora per molti anni sarebbe conservata la sua vita. Invece non lo dovevamo più rivedere tra noi!

A chiunque ebbe occasione di avvicinare Ludwig Mond, rimarrà sempre scolpita nella mente la sua bella e possente figura, quella testa così caratteristica, dolce e fiera nel tempo stesso, quella testa jeratica che così profondamente conservava l'impronta orientale. Gli occhi ebbe vivacissimi e penetranti, dalla bocca, che bene spiccava nella barba foltissima e crespa, traspariva insieme la gioia di vivere e la bontà. Fu piacevole, amabile nel conversare, e aveva per gli amici delicatezze squisite. Fu anche pronto all'ira quando le persone e le cose non si piegavano alla sua volontà, perchè egli fu — come doveva essere — un dominatore. Gli onori non disprezzò, come da qualcuno fu detto; ma certo non avrebbe mai ricorso a nessuna sollecitazione diretta o larvata per ottenerli; nè mai ne manifestò il desiderio.

Vennero a lui in grande copia, e veramente cospicui, specie quelli scientifici, negli ultimi suoi anni. Non tutti però quelli che a lui sarebbero stati dovuti, non quelli, mi sembra, che avrebbe dovuto tributargli l'Inghilterra, dopo che tante ricchezze egli aveva procurato alla sua patria di adozione, tante istituzioni aveva create ed aiutate, di tante iniziative si era fatto promotore! Degli onori fu lieto, e molti fra noi ricorderanno che, non è ancora un anno, egli ci invitò numerosi, qui in Roma, per festeggiare l'alta onorificenza di cui lo aveva insignito il nostro Governo, e per ringraziarci per le manifestazioni che l'Accademia aveva a lui fatte, per l'istituzione del premio Cannizzaro. Era veramente commosso quella sera: mi diceva che si sentiva ringiovanito e che desiderava e sperava vivere ancora per poter godere in pace di tanti affetti che lo circondavano. E l'anno passato davvero sembrava risorto dalla malattia di esaurimento che da tempo lo affliggeva, e noi eravamo tanto contenti che proprio la nostra Roma gli avesse ridata la salute e la energia. Anche nell'estate a Londra, egli sembrava ritornato ai bei tempi della sua floridezza: prese parte attiva ai lavori del nostro Congresso, si occupò di scienza, del catalogo internazionale, delle sue industrie. Si disponeva nel novembre a tornare in Italia, e qui lo si aspettava, quando fu colto da una indisposizione che sembrava leggera in principio: mai le condizioni si aggravarono e il giorno 11 dicembre quel cuore forte e benefico cessò di battere e si spense per noi quell'alta intelligenza: venne la pace eterna per quella nobile vita, così intensamente vissuta, più per gli altri invero che per sè. Come un antico patriarca egli chiuse serenamente gli occhi circondato da tutti i suoi cari. La morte fu crudele con lui che poteva e desiderava, dopo tanto lavoro senza mai riposo, vivere ancora, riposandosi alfine, nell'affetto della famiglia e degli amici, nel culto della scienza e dell'arte; che poteva finalmente comprendere quali tesori a lui stesso nascosti racchiudeva il suo cuore e l'anima sua. Qualche anno di vita ancora gli mancava per compiacersi nella sua coscienza del frutto di tanto bene fatto agli altri. E pur nondimeno la sua fine ci appare degna di invidia: una sera tranquilla che chiude una giornata radiosa di lavoro alto, fecondo, benefico. Se negli ultimi istanti a lui riapparve — come si dice avvenire — tutta intiera la vita, nessun pensiero potè angustiarlo nel doloroso addio: ogni dovere egli l'aveva compiuto; le sue imprese erano riuscite; all'umanità egli aveva portato così larga mèsse di bene, come pochi possono gloriarsi di avere portato; lasciava figli degni di sè, lasciava la sua compagna diletta che il suo nome e le sue ricchezze avrebbe fatto ancor benedire: a tutti lasciava in retaggio l'esempio di una vita che veramente onorava l'umanità, mentre nei suoi cari nipotini rifioriva la stirpe.

Riposa nel cimitero di Finchley, non lungi dai Poplars, nel maestoso e bel mausoleo che egli volle per sè ed i suoi eretto dall'arte italiana. Ma Winnington e Clydach, i centri delle grandi sue industrie, che il suo ingegno

creò, la sua tenacia fece prosperare, saranno sempre il maggior monumento alla memoria di Ludwig Mond, che forse fu il più alto rappresentante del grande industriale dei nostri tempi, che deve essere insieme, uomo di scienza, uomo di azione e uomo di cuore.

Dopo la commemorazione del dott. MOND, il Presidente inviava alla vedova del defunto Socio il seguente telegramma:

Signora Mond. — Roma.

Nell'odierna seduta dell'Accademia dei Lincei il Socio prof. Nasini commemorava il dott. Ludwig Mond, ricordandone le molte benemerenze scientifiche e filantropiche. A Lei, in nome dell'Accademia riconoscente per la liberalità di Suo marito, rinnovo in questa circostanza condoglianze vivissime per la perdita dell'illustre Collega.

Il Presidente BLASERNA.

A questo telegramma la signora MOND rispondeva colla lettera seguente:

A S. E. Pietro Blaserna
Presidente della R. Accademia dei Lincei. — Roma,

Eccellenza!

Sono stata molto commossa dal Suo gentile telegramma di ieri, e La prego di partecipare i miei più sentiti ringraziamenti all'Accademia la quale volle rendere l'ultimo tributo al mio caro estinto, che fu sempre così fiero di appartenerle.

Sono stata molto dolente che la mia salute non mi ha permesso di esser presente alla commemorazione che il nostro amico professore Nasini fece con tanto amore e cognizione.

La ringrazio, Egregio Presidente, anche a nome dei miei figli Roberto e Alfredo, dolenti essi pure di non aver potuto intervenire.

Devma
FRIDA MOND

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Segretario MILLOSEVICH, a nome dei Soci TARAMELLI, relatore, e CAPELLINI, legge una relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi accademici, della Memoria: *Fossili ordoviciani del Nucleo Centrale carnico*, del prof. VINASSA DE REGNY.

La proposta della Commissione esaminatrice, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe, salvo le consuete riserve.

Il Socio MENOZZI, relatore, a nome anche dei Soci CANNIZZARO, CIAMICIAN, KOERNER, legge una Relazione della Commissione incaricata di

riferire sul concorso bandito dalla Federazione Italiana dei Consorzi agrari, per un metodo atto a determinare il grado di finezza degli zolfi. La Classe approva le conclusioni della Relazione suddetta.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci stranieri Helmert e Ramon Cajal.

Il Presidente Blaserna offre, a nome dell'autore, varie pubblicazioni del tenente del Genio navale ing. Rabbeno; presenta inoltre alcune Memorie a stampa del Socio straniero Mascart, inviate dal figlio del defunto Accademico insieme ad altre sue proprie.

Il Segretario Grassi fa omaggio della pubblicazione: *La genèse endothéliale des leucocytes mononucléaires du sang*, del prof. Patella dell'Università di Siena.

CORRISPONDENZA

Il Presidente presenta un piego suggellato, inviato dal prof. Mondello direttore dell'Osservatorio di Ardenza (Livorno), perchè sia conservato negli Archivi accademici.

Il Segretario Millosevich dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società delle scienze di Varsavia; le Società Reali di Londra e di Vittoria; la R. Società zoologica di Amsterdam; le Società geologiche di Washington e di Manchester; la Società di scienze naturali di Buffalo; il Museo di storia naturale di Amburgo; la Biblioteca Bodleiana di Oxford; gli Osservatorii di Oxford e di Cambridge Mass.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 3 aprile 1910.

De Giovanni A. — Le deviazioni nella evoluzione dell'Essere. Fonti di Patologia. (Estratto dagli « Atti della Società italiana per il progresso delle scienze ». Terza riunione). Roma, 1910. 8°.

Galdeano (de) G. — Teoria de las ecuaciones diferenciales. (« Nueva Enciclop. Matem. ». t. IX y ultimo). Zaragozza, 1907. 8°.

Helmert J. R. — Die Tiefe der Ausgleichsfläche bei der Prattschen Hypotese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten. (Sonderabd. aus « Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akad. der Wissenschaften », B. XLVIII, 1909). Berlin, 1909. 8°.

Jaeger Fr. — Forschungen in den Hochregionen des Kilimandscharo. (Sonderabd. aus « Mitteilungen aus d. Deutschen Schutzgebieten », B. XXII). Berlin, 1909. 4°.

Lachaud M. — Nouvelle théorie des sciences physiques. Unité de la materie. - Étude des fluides. - Forces. - Travail. - Énergie rayonnante. - Électricité. Paris, 1910. 8°.

Liapounoff A. — Sur une classe de figures d'équilibre d'un liquide en rotation. (Extr. des « Annales scientifiques de l'École Normale supér. », t. 26). Paris, 1909. 8°.

Mascart E. — Aimantation induite par le champ terrestre sur les aimants. (from « Terrestrial Magnetism » 1899). Cincinnati, 1899. 8°.

Mascart E. — Recherches sur le spectre solaire ultra-violet, et sur la détermination des longueurs d'onde. Paris, 1864. 8°.

Mascart E. — Sur la construction de la règle géodésique internationale. (Extr. des « Annales scientifiques de l'École Normale supérieure », 2e série, t. IX, 1880). Paris, 1880. 8°.

Mascart J. — Comparaison des anciennes mesures. (Extr. du « Bulletin de la Société astronom. de France », 1908). Paris, 1908. 8°.

Mascart J. — Corrections aux tables de logarithmes décimales de De Borda. S. l. e d. 8°.

Mascart J. — Enseignement de l'astronomie. Système métrique. Les planètes et leur origine. (Extr. du « Bulletin de la Société astron. de France », 1909). Paris, 1909. 8°.

Mascart J. — Les problèmes de Mars. (Extr. de « Ciel et Terre. — Bulletin de la Société Belge d'Astronomie », 1910). Bruxelles, 1910. 8°.

Mascart M. — Électricité moderne. (Association française pour l'avancement des sciences). Paris, 1894. 8°.

Mascart M. — Sur les enregistreurs de l'électricité atmosphérique et du magnétisme terrestre. (Extr. du « Journal de Physique », 1, X). Paris, 1881. 8°.

Médaille offerte à M. Mascart. Paris, s. d. 8°.

Mission Russe. — Missions scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg, 1899-1901. T. I. Géodésie. St. Pétersbourg, 1909. 4°.

Montel Alf. — Le case nelle regioni sismiche e la scienza delle costruzioni. Torino, 1910. 8°.

Patella V. — La genèse endothéliale des Leucocytes mononucléaires du sang. Siènne, 1910. 8°.

Rabbeno G. — La navigazione aerea a sostegno dinamico. (Estr. dagli « Atti

del Collegio degli Ingegneri navali e meccanici in Italia », vol. VII). Genova, 1909. 8°.

Rabbeno G. — Sulla resistenza dei tubi a parete sottile premuti dall'esterno. (Estr. dalla « Rivista Marittima », 1909). Roma, 1909. 8°.

Rabbeno G. — Teoria sintetica dell'elica propulsatrice. (Estr. dalla « Rivista Marittima », 1910). Roma, 1910. 8°.

Rajna M. — Osservazioni meteorologiche dell'annata 1908. Memoria. Bologna, 1909. 4°.

Salmojraghi F. — Un'aggiunta alla composizione mineralogica del calcare di S. Marino e della Verna. (Estr. dagli « Atti della Soc. Ital. di Scienze Narali », vol. 48°). Pavia, 1910. 8°.

Savastano L. — Patologia arborea applicata. Lezioni. Napoli, 1910. 8°.

Silvestri F. — Materiali per una revisione dei Diplopoda Oniscomorpha. I. Specie del genere Sphaerotherium dell'Africa meridionale. (Estr. dal « Bollett. del Labor. di Zoologia generale e agraria », vol. IV). Portici, 1910. 8°.

Silvestri F. — Metamorfosi del Cybocephalus rufifrons Reitter e notizie sui suoi costumi. (Estr. dal « Bollett. del Labor. di Zoologia generale e agraria », vol. IV). Portici, 1910. 8°.

Société des Ingénieurs civils de France. Annuaire de 1910; 63e année. Paris, 1910. 8°.

E. M.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 aprile 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Segue in terza pagina.

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 17 aprile 1910.* **N. 8.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 8°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1910.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili.* Nota del Socio Vito Volterra.

§ 1. — Il problema fondamentale.

1. Ho chiamato *funzioni permutabili* [1] due funzioni finite e continue tali che

$$\text{(I)} \qquad \int_x^y \mathrm{F}(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\, \mathrm{F}(\xi, y)\, d\xi \,.$$

Supponendo ora

$$0 \leq x \leq y \leq a$$

e $\mathrm{F}(x, x) \gtreqless 0$, per x compreso fra 0 e a, proponiamoci il problema di cercare tutte le funzioni $\Phi(x, y)$ permutabili con $\mathrm{F}(x, y)$.

2. Eseguiamo un cambiamento di variabili ponendo

$$x = f(x_1) \quad , \quad y = f(y_1) \quad , \quad \xi = f(\xi_1) \,,$$

con $f'(\xi_1)$ sempre positivo, in modo che le dette equazioni possano invertirsi univocamente. Avremo

$$\text{(1)} \quad \int_{x_1}^{y_1} \mathrm{F}(x_1, \xi_1)\, \Phi(\xi_1, y_1) f'(\xi_1)\, d\xi_1 = \int_{x_1}^{y_1} \Phi(x_1, \xi_1)\, \mathrm{F}(\xi_1, y_1)\, f'(\xi_1)\, d\xi_1$$

(1) Vedi la Nota del 20 febbraio 1910: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Ivi ho distinto le permutabilità di 1ª e 2ª specie. In questa Nota mi occuperò della permutabilità di 1ª specie che ho anche chiamato semplicemente permutabilità.

quindi, ponendo

$$(2)\qquad \begin{aligned} \pm\sqrt{f'(x_1)\,f'(y_1)}\,\Phi(x_1\,,y_1) &= \Phi_1(x_1\,,y_1)\,,\\ \pm\sqrt{f'(x_1)\,f'(y_1)}\,\mathrm{F}(x_1\,,y_1) &= \mathrm{F}_1(x_1\,,y_1)\,,\end{aligned}$$

sarà

$$\int_{x_1}^{y_1}\mathrm{F}_1(x_1\,,\xi_1)\,\Phi_1(\xi_1\,,y_1)\,d\xi_1=\int_{x_1}^{y_1}\Phi_1(x_1\,,\xi_1)\,\mathrm{F}_1(\xi_1\,,y_1)\,d\xi_1\,.$$

Ora prendendo

$$f'(x_1)=\frac{\pm 1}{\mathrm{F}(x_1,x_1)}$$

potremo scegliere i segni in modo che $f'(x_1)$ resulti positivo e $\mathrm{F}_1(x_1\,,x_1)=1$.

Si potrà dunque, con una conveniente trasformazione di variabili e di funzioni, ridurre la ricerca al caso in cui $\mathrm{F}(x\,,x)=1$.

3. Premessa questa riduzione, si ponga, supponendo $\alpha(x)\gtrless 0$, per x compreso fra 0 e a,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F}(x\,,y)\frac{\alpha(x)}{\alpha(y)} &= \mathrm{F}'(x\,,y)\\ \Phi(x\,,y)\frac{\alpha(x)}{\alpha(y)} &= \Phi'(x\,,y)\end{aligned}\right.$$

È evidente che, se F e Φ sono permutabili, lo saranno pure $\mathrm{F}'(x\,,y)$ e $\Phi'(x\,,y)$. Ciò posto scriviamo

$$\frac{\partial\mathrm{F}(x\,,y)}{\partial x}=\mathrm{F}_1(x\,,y)\;,\;\frac{\partial\mathrm{F}(x\,,y)}{\partial y}=\mathrm{F}_2(x\,,y)$$

$$\frac{\partial\mathrm{F}'(x,y)}{\partial x}=\mathrm{F}'_1(x\,,y)\;,\;\frac{\partial\mathrm{F}'(x,y)}{\partial y}=\mathrm{F}'_2(x\,,y)\,.$$

Avremo facilmente che

$$\mathrm{F}'_1(x\,,x)=\mathrm{F}_1(x\,,x)+\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\,,$$

quindi, preso

$$\alpha(x)=e^{-\int\mathrm{F}_1(x,x)dx}\,,$$

resulterà

$$\mathrm{F}'_1(x\,,x)=0\,.$$

Ma

$$\mathrm{F}'(x\,,x)=1\,,$$

quindi sarà anche

$$\mathrm{F}'_2(x\,,x)=0\,.$$

Ne segue che, *con una nuova trasformazione, potremo ricondurci al caso in cui si cerchino le funzioni permutabili con* $F(x, y)$, *essendo*

$$F(x, x) = 1 \quad , \quad F_1(x, x) = 0 \quad , \quad F_2(x, x) = 0 . \tag{4}$$

4. Supposte soddisfatte le (4) poniamo

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F(\xi, y)\, d\xi = \Psi(x, y) \tag{I'}$$

avremo $\Psi(x, x) = 0$, e

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} = \Phi(x, y) + \int_x^y \Phi(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi \tag{5}$$

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} = -\Phi(x, y) + \int_x^y F_1(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi . \tag{6}$$

Scriviamo poi

$$F_2(x, y) - F_2^2(x, y) + F_2^3(x, y) - \cdots = f_2(x, y) ,$$
$$F_1(x, y) + F_1^2(x, y) + F_1^3(x, y) + \cdots = f_1(x, y) ,$$

ove le potenze denotano operazioni di composizione.

Si avrà

$$\Phi(x, y) = \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} - \int_x^y \frac{\partial \Psi(x, \xi)}{\partial \xi} f_2(\xi, y)\, d\xi \tag{5'}$$

$$\Phi(x, y) = -\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} - \int_x^y f_1(x, \xi) \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi}\, d\xi , \tag{6'}$$

quindi sottraendo

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \int_x^y \left[f_1(x, \xi) \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \Psi(x, \xi)}{\partial \xi} f_2(\xi, y) \right] d\xi = 0$$

e con integrazioni per parti, tenendo conto che

$$\Psi(x, x) = \Psi(y, y) = f_1(x, x) = f_2(y, y) = 0 ,$$

si avrà

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \int_x^y [\Psi(x, \xi)\, g_{12}(\xi, y) - \Psi(\xi, y)\, g_{21}(x, \xi)]\, d\xi = 0 \tag{A}$$

ove

$$g_{12}(x, y) = \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} \quad , \quad g_{21}(x, y) = \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} .$$

Ne segue che, *il problema di trovare le funzioni permutabili con* $F(x, y)$, *è ricondotto a risolvere l'equazione integro-differenziale* (A).

§ 2. — Soluzione dell'equazione integro-differenziale (A).

5. Posto

$$\int_x^y [\Psi(x, \xi)\, g_{12}(\xi, y) - \Psi(\xi, y)\, g_{21}(x, \xi)]\, d\xi = \lambda(x, y),$$

la (A) si scriverà

$$\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} + \lambda(x, y) = 0 .$$

Sia

$$u = \frac{y - x}{2} \quad , \quad v = \frac{y + x}{2} ;$$

considerando Ψ come funzione di u e v l'equazione precedente diverrà

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v} + \lambda(x, y) = 0$$

onde

$$\Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v \lambda(\zeta - u, \zeta + u)\, d\zeta ,$$

in cui θ è una funzione arbitraria che si annulla per $u = 0$.

Ne segue che

$$(\mathrm{A}') \qquad \Psi(x, y) = \theta(u) - \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [\Psi(\zeta - u, \xi)\, g_{12}(\xi, \zeta + u) - \Psi(\xi, \zeta + u)\, g_{21}(\zeta - u, \xi)]\, d\xi .$$

6. Dimostriamo ora il teorema: *Scelta la funzione θ la funzione Ψ è determinata,* ossia *se* $\theta = 0$ *anche* $\Psi = 0$.

Il procedimento che può tenersi per tale dimostrazione è analogo a quello che ho impiegato in casi simili di equazioni integrali ed integro-differenziali [1].

Infatti sia $\theta = 0$ e $|\Psi(x, y)| < \mathrm{M}$, mentre $|g_{12}| < \mathrm{N}$ e $|g_{21}| < \mathrm{N}$. Dalla (A′) resulterà

$$|\Psi(x, y)| < 2\mathrm{MN}(y - x)\, x ,$$

e per conseguenza

$$|\Psi(x, y)| < 2\mathrm{MN}(y - x)\, a$$

[1] Cfr. *Sulla inversione degli integrali definiti,* Atti Acc. di Torino, 1896, Nota I, § 2. *Sulle equazioni integro-differenziali,* Rend. Acc. dei Lincei, febbraio 1909, § 3.

da cui segue

$$|\Psi(x\,,y)| < 2\mathrm{MN}^2 a \int_u^v d\zeta \int_{\zeta-u}^{\zeta+u} [(\xi-\zeta+u)+(\zeta+u-\xi)]\, d\xi$$

$$< 4\mathrm{MN}^2 a^2 \frac{(y-x)^2}{1\,.\,2}\,.$$

Così proseguendo si dimostra che

$$|\Psi(x\,,y)| < 2^h \mathrm{MN}^h a^h \frac{(y-x)^h}{h\,!}\,,$$

qualunque sia il numero intero e positivo h, e quindi $\Psi(x\,,y)=0$.

7. Passiamo adesso alla effettiva risoluzione dell'equazione integrale (A).

Consideriamo la serie

$$\sum_1^\infty \Psi_n(\eta\,|\,x\,,y) \tag{7}$$

i cui termini sono ottenuti colla operazione ricorrente

$$\Psi_n(\eta\,|\,x\,,y) = \int_u^v d\zeta \int_\eta^{2u} [\Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta+u-\xi\,,\zeta+u)\, g_{21}(\zeta-u\,,\zeta+u-\xi) - \tag{8}$$

$$- \Psi_{n-1}(\eta\,|\,\zeta-u\,,\xi+\zeta-u)\, g_{12}(\xi+\zeta-u\,,\zeta+u)]\, d\xi\,.$$

$\Psi_1 = 1$.

Si dimostra facilmente che

$$\Psi_n(\eta\,|\,x\,,y) < \frac{[2\mathrm{N}a(y-x-\eta)]^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

e quindi la serie (7) è uniformemente convergente.

Si formi poi

$$\Psi(x\,,y) = \int_0^{2u} \psi(\eta) \sum_1^\infty \Psi_n(\eta\,|\,x\,,y)\, d\eta \tag{B}$$

essa sarà la soluzione della (A′), quando si prenda

$$\theta(u) = \int_0^{2u} \psi(\eta)\, d\eta\,.$$

Per mezzo della (5′) o della (6′) otterremo poi Φ.

Si verifica senza alcuna difficoltà che, sostituendo la espressione (B) nella (A′), questa resta identicamente soddisfatta. Inoltre, percorrendo in senso inverso il cammino fatto per ottenere dalla (1) la (A′), si dimostra pure facilmente che F e Φ sono permutabili.

§ 3. — Teoremi sulle funzioni permutabili.

8. Dalla (B) segue

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x,y)}{y-x} = \psi(0) = \text{cost}\,.$$

Ma dalla (I') si ha

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x,y)}{y-x} = \lim_{y=x} \frac{\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi}{y-x} = \Phi(x,x)\,,$$

quindi sarà

$$\Phi(x,x) = \text{cost}\,.$$

Questa proprietà vale per le funzioni $F(x,y)$ e $\Phi(x,y)$ che abbiamo ottenute per mezzo delle trasformazioni (2) e (3) in modo da ridurre la F a soddisfare alle condizioni (4). Ora, se vogliamo tornare alle funzioni primitive, dovremo dividere ambedue per la stessa funzione $\frac{\alpha(x)}{\alpha(y)}\sqrt{f'(x)\,f'(y)}$, quindi potremo enunciare il

Teorema I. — *Se $\Phi(x,y)$ è una funzione permutabile con $F(x,y)$ tale che $F(x,x) \gtrless 0$, avremo*

$$\frac{\Phi(x,x)}{F(x,x)} = \text{cost}\,.$$

9. Teorema II. — *Se le funzioni permutabili $F(x,y)$ e $\Psi(x,y)$, aventi le derivate determinate e finite, sono tali che*

$$F(x,x) \gtrless 0 \quad \Psi(x,x) = 0\,,$$

si potrà determinare la funzione $\Phi(x,y)$, permutabile con esse, in modo che

$$F\Phi(x,y) = \Psi(x,y) \text{ [1]}.$$

Infatti, posto

$$\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi = \Psi(x,y)\,,$$

[1] Vedi la notaztone adottata per la composizione di due funzioni permutabili: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 1.

derivando rispetto ad y [1], otterremo l'equazione di seconda specie

$$F(y,y)\,\Phi(x,y)+\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)=\Psi_2(x,y), \tag{9}$$

in cui

$$F_2(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\quad,\quad \Psi_2(x,y)=\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}.$$

Valendosi della trasformazione indicata nel § 1, art. 2, si potrà supporre per semplicità $F(y,y)=1$, e allora l'equazione integrale (9) si risolverà per mezzo della relazione (Vedi § 1, art. 4)

$$\Phi(x,y)=\Psi_2(x,y)-\int_x^y \Psi_2(x,\xi)\,f_2(\xi,y)\,d\xi, \tag{10}$$

mentre avremo [2]

$$f_2(x,y)-F_2(x,y)+\int_x^y F_2(x,\xi)\,f_2(\xi,y)\,d\xi=0. \tag{11}$$

Mostriamo che la $\Phi(x,y)$ data dalla (10) è permutabile con $F(x,y)$.

Moltiplicando ambo i membri della (9) per dy, integrando fra x e y e tenendo presente che $\Psi(x,x)=0$ si avrà che

$$\int_x^y \Phi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi=\Psi(x,y). \tag{12}$$

Formiamo ora

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Phi(\xi,y)\,d\xi$$

sostituendo a $\Phi(\xi,\eta)$ il valore dato dalla (10), e osserviamo che in virtù della permutabilità di F e Ψ si ha

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Psi(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \Psi(x,\xi)\,F(\xi,y)\,d\xi$$

e quindi, con una derivazione rispetto ad y,

$$\int_x^y F(x,\xi)\,\Psi_2(\xi,y)\,d\xi=\int_x^y \Psi(x,\xi)\,F_2(\xi,y)\,d\xi+\Psi(x,y), \tag{13}$$

giacchè per ipotesi $F(y,y)=1$, $\Psi(y,y)=0$.

[1] Cfr. per la risoluzione delle equazioni integrali di 1ª specie la Nota *Sulla inversione degli integrali definiti*. Rend. Acc. dei Lincei, 1896, § 4.

[2] Cfr. Nota precedente § 2. Annali di Mat., 1897, *Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti*, § 10: principio di reciprocità.

Si avrà in conseguenza

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \Psi(x, y) + \int_x^y \Psi(x, \xi)\, F_2(\xi, y)$$

$$- \int_x^y F(x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y \Psi_2(\xi, \eta)\, f_2(\eta, y)\, d\eta$$

e con facili trasformazioni di calcolo, impiegando le relazioni (13) e (11) si otterrà

$$\int_x^y F(x, \xi)\, \Phi(\xi, y)\, d\xi = \Psi(x, y),$$

da cui segue, a cagione della (12), la permutabilità delle funzioni F e Φ e quindi delle funzioni Ψ e Φ.

Osservazione. — Dalla relazione (10) si deduce facilmente che, se Ψ e F avranno le derivate determinate e finite di ordine n, Φ avrà le derivate di ordine $n-1$ pure determinate e finite.

10. Una funzione $\Psi(x, y)$ che, al pari della $F(x, y)$, è tale che $\Psi(x, x) \gtrless 0$, si dirà di *primo ordine*, mentre se sarà $\Psi(x, x) = 0$ si dirà di *ordine superiore al primo.* In virtù del teorema I avremo che una funzione permutabile con una funzione di 1° ordine, o è di 1° ordine, o è di ordine superiore al primo. Supponiamo che si presenti questo caso e supponiamo che esistano le derivate successive di Ψ e siano determinate e finite; allora si potrà porre, in virtù del teorema II,

$$FF_1(x, y) = \Psi(x, y),$$

in cui F_1 è permutabile con F. Se F_1 sarà di primo ordine Ψ si dirà di *secondo ordine*; se F_1 sarà di secondo ordine Ψ si dirà di *terzo ordine*, e così di seguito; se F_1 sarà di ordine $n-1$, Ψ si dirà di *ordine* n; e Ψ si dirà di *ordine superiore ad* n se F_1 sarà di ordine superiore ad $n-1$.

11. Ci limitiamo ad enunciare senza dimostrazione i teoremi seguenti:

Teorema III. — *Se le funzioni di primo ordine* $F_1, F_2, \ldots F_g$ *sono permutabili fra loro e colla funzione* Ψ *di ordine* n, *avremo*

$$\Psi(x, y) = F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2} \ldots F_g^{\alpha_g} \Phi(xy) \tag{14}$$

in cui $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_g$ *sono numeri interi positivi soggetti alla sola condizione*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_g = n - 1$$

e Φ *è di primo ordine e permutabile colle* $F_1, F_2, \ldots F_g$.

Reciprocamente, se Ψ *può mettersi sotto la forma precedente, essa è di ordine* n.

TEOREMA IV. — *Se la funzione $\Psi(x,y)$, permutabile colla funzione di primo ordine $F_1(x,y)$, è tale che il*

$$\lim_{y=x} \frac{\Psi(x,y)}{(y-x)^{n-1}}$$

è finito e diverso da zero, $\Psi(x,y)$ sarà di ordine n.

TEOREMA V. — *Se la funzione $\Psi(x,y)$, permutabile colla funzione di primo ordine $F_1(x,y)$, è di ordine n, sarà*

$$\frac{1}{[F_1(x,x)]^n} \lim \frac{\Psi(x,y)}{(y-x)^{n-1}} = \text{cost} \lesseqgtr 0 .$$

OSSERVAZIONE. — Supponendo che Ψ abbia la forma (14), posto

$$\frac{F_2(x,x)}{F_1(x,x)} = c_2 , \frac{F_3(x,x)}{F_1(x,x)} = c_3 , \dots \frac{F_g(x,x)}{F_1(x,x)} = c_g , \frac{\Phi(x,x)}{F_1(x,x)} = c ,$$

la costante che figura nel teorema precedente sarà

$$\frac{c_2^{\alpha_2} c_3^{\alpha_3} \dots c_g^{\alpha_g} c}{(n-1)!} .$$

12. Sia $\Psi(x,y)$ una funzione permutabile colla funzione di primo ordine $F(x,y)$ e supponiamo che ambedue queste funzioni abbiano le derivate successive determinate e finite.

Poniamo la costante $\dfrac{\Psi(x,x)}{F(x,x)} = c_1$ (vedi teorema I) e consideriamo

$$\Psi(x,y) - c_1 F(x,y) ;$$

questa funzione sarà permutabile con $F(x,y)$ e sarà di ordine superiore al primo, quindi (teorema II)

$$\Psi(x,y) = c_1 F(x,y) + \int_x^y F(x,\xi)\, \Phi_1(\xi,y)\, d\xi ,$$

in cui Φ_1 è permutabile colle funzioni precedenti.

Applicando alle Φ_1 la formula ora trovata per Ψ potremo scrivere

$$\Psi(x,y) = c_1 F(x,y) + c_2 F^2(x,y) + \int_x^y F^2(x,\xi)\, \Phi_2(\xi,y)\, d\xi ,$$

in cui c_2 è una quantità costante; così procedendo innanzi troveremo il

Teorema VI. — *Se la funzione* $\Psi(x, y)$ *è permutabile colla funzione di primo ordine* $F(x, y)$, *e queste funzioni hanno le derivate successive determinate e finite, sarà*

$$\Psi(x, y) = c_1 F(x, y) + c_2 F^2(x, y) + \cdots + c_n F^n(x, y) + \\ + \int_x^y F^n(x, \xi)\, \Phi_n(\xi, y)\, d\xi ,$$

in cui le potenze denotano operazioni di composiziene, e la funzione Φ_n *è permutabile colle funzioni date.*

Se col crescere indefinito di n l'ultimo termine tenderà a zero, $\Psi(x, y)$ sarà rappresentata dalla serie

$$\sum_1^\infty {}_n\, c_n F^n(x, y) .$$

13. La formula (B) dà le funzioni di secondo ordine e di ordine superiore al secondo permutabili con $F(x, y)$, quindi per ottenere tutte le funzioni permutabili con $F(x, y)$ basterà aggiungere alla espressione (B) $c_1 F(x, y)$ con c_1 costante arbitraria. Si può dunque fare a meno della risoluzione della (5) o della (6), come è indicato alla fine del § 2.

§ 4. — Funzioni permutabili coll'unità.

14. Riprendiamo le formule del § 1, supponendo $F(x, y) = F(y - x)$ e $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$.

Avremo

$$f_2(x, y) = - f_1(x, y) = f(y - x)$$
$$g_{12}(x, y) = g_{21}(x, y) = - f'(y - x) .$$

Applicando dunque la (8) del § 2, resulterà

$$\Psi_1 = 1 , \Psi_2 = 0 , \Psi_3 = 0 , \ldots \Psi_n = 0 , \ldots$$

e quindi

$$\Psi = \theta(y - x) \quad , \quad \Phi = \Phi(y - x) .$$

Le considerazioni svolte nel § 1 mostrano che Φ dovrà avere la stessa forma anche se non si verificherà la condizione $F'(0) = 0$. Si ritrova così il gruppo di tutte le funzioni permutabili fra loro e con una costante, ossia permutabili coll'unità (1).

(1) *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 2.

15. Considereremo in questo § le funzioni di questo gruppo soltanto. Posto $y - x = u$, le funzioni stesse si scriveranno come funzioni di u e la composizione di due di esse Φ e Ψ ci darà

$$\Phi\Psi(u) = \int_0^u \Phi(u-v)\,\Psi(v)\,dv = \int_0^u \Phi(v)\,\Psi(u-v)\,dv\,.$$

Posto $\Phi(0) = c$, $\Psi(0) = c'$, avremo

$$\frac{d}{du}(\Phi\Psi(u)) = c\Psi(u) + \Psi\Phi'(u) = c'\Phi(u) + \Phi\Psi'(u),$$

da cui si ricava

$$\frac{d}{du}(\Phi^n(u)) = c\Phi^{n-1}(u) + \Phi^{n-1}\Phi'(u) = (c+\Phi')\,\Phi^{n-1}, \tag{15}$$

$$\frac{d^m}{du^m}(\Phi^n(u)) = (c+\Phi')^m\,\Phi^{n-m} \quad \text{per } n > m, \tag{15'}$$

$$\frac{d^n}{du^n}(\Phi^n(u)) = (c+\Phi')^n - c^n\,. \tag{15''}$$

16. Queste formule servono per risolvere immediatamente il problema seguente:

Data la funzione $\mathrm{F}(u)$ *di ordine* n, *tale che*

$$\mathrm{F}(0) = 0\ ,\ \mathrm{F}'(0) = 0\,, \ldots\ \mathrm{F}^{(n-2)}(0) = 0\ ,\ \mathrm{F}^{(n-1)}(0) = 1\,,$$

risolvere l'equazione integrale

$$\Phi^n(u) = \mathrm{F}(u)\,. \tag{16}$$

Osserviamo che

$$\lim_{u=0} \frac{\mathrm{F}(u)}{u^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}$$

e pel teorema V

$$\lim_{u=0} \frac{\mathrm{F}(u)}{u^{n-1}} = \frac{c^n}{(n-1)!}\,,$$

avendo posto $\Phi(0) = c$. Ne segue che c è una radice n^{esima} dell' unità. Prendiamo $c = 1$; le soluzioni che corrispondono agli altri valori di c si otterranno, come vedremo, immediatamente.

Deriviamo ora l'equazione (16) n volte rispetto ad u. In virtù della (15″) otterremo l'equazione integrale

$$(1+\Phi')^n - 1 = f(u)\,,$$

ove con $f(u)$ si è denotata la derivata n^{esima} di $\mathrm{F}(u)$.

Per risolvere questa equazione integrale basterà applicare le regole generali che abbiamo date per la risoluzione delle equazioni integrali di grado n [1]. Scriviamo perciò l'equazione algebrica

$$(1 + z_2)^n - 1 = z_1 .$$

Avremo

$$z_2 = -1 + \sqrt[n]{1 + z_1} .$$

Prendendo il radicale in modo che per $z_1 = 0$ sia $z_2 = 0$, e sviluppando in serie, si avrà

$$z_2 = \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} z_1^h .$$

La funzione Φ' sarà quindi data dalla serie *convergente uniformemente*

$$\Phi'(u) = \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} f^h(u) ,$$

in cui le potenze denotano operazioni di composizione. Ne segue la soluzione generale

$$\Phi(u) = \varepsilon \left(1 + \int_0^u \sum_1^\infty {}_h \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{n} - h + 1\right)}{h!} f^h(v)\, dv\right) ,$$

ove ε rappresenta una radice n^{esima} qualunque dell'unità.

17. Se noi non poniamo la condizione che $\Phi(u)$ sia finita, l'equazione (16) può risolversi anche quando $F(u)$ sia di ordine inferiore ad n.

Per vederlo in un caso molto semplice consideriamo l'equazione integrale

$$\Phi^2(u) = F(u) \tag{17}$$

con $F(u)$ di primo ordine. Poniamo

$$F_1(u) = \int_0^u d\xi \int_0^{u-\xi} \frac{F(u - \xi - \eta)}{\xi^{\frac{1}{2}}\, \eta^{\frac{1}{2}}}\, d\eta .$$

$F_1(u)$ sarà di secondo grado. Risolviamo colla regola data nell'Art. precedente l'equazione integrale

$$\Phi_1^2(u) = F_1(u) ;$$

[1] Cfr. Nota prec. citata, § 4.

la soluzione della (17) sarà data dalla funzione

$$\Phi(u) = \frac{2}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^u \frac{\Phi_1(v)\,dv}{(u-v)^{\frac{1}{2}}},$$

la quale diviene infinita d'ordine $\frac{1}{2}$ per $u=0$.

Meccanica — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo rigido.* Nota V del Corrispondente E. Almansi.

1. In quest' ultima Nota esaminerò l'azione $A = \int_\sigma p\lambda d\sigma$, esercitata da una massa liquida sopra un corpo rigido S_0 in moto, nel caso particolare che il movimento del liquido sia continuo e irrotazionale in tutto lo spazio S che esso occupa, e che inoltre il potenziale di velocità sia monodromo: il che può non accadere (pur essendo continue le sue derivate prime) se lo spazio S non è semplicemente connesso [1].

Il potenziale sarà in tal caso la funzione regolare ψ introdotta nella Nota precedente (§ 1). Ed avremo, attribuendo agli altri simboli i soliti significati:

$$p = -\varrho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + U\right) + \text{cost};$$

quindi:

$$A = -\varrho\int_\sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + U\right)\lambda\, d\sigma.$$

Io ho trasformato l' integrale

$$B_0 = -\int_\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t}\lambda\, d\sigma$$

nell' ipotesi che, per qualunque posizione di S_0, sia $\lambda = X\alpha + Y\beta + Z\gamma$, ove X, Y, Z denotano tre funzioni regolari di x, y, z, che soddisfano la equazione

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0;$$

[1] Se però si suppone che nell' istante iniziale tutto il sistema sia in quiete, il potenziale di velocità risulta necessariamente monodromo; giacchè l'integrale di $udx + vdy + wdz$ esteso ad una linea chiusa *qualunque* (integrale che conserva, per un noto teorema, un valore costante), essendo nullo inizialmente, sarà sempre nullo.

ed ho stabilito la formula (IV, 3):

$$B_0 = -\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\lambda\, dx + \int_\sigma \theta \mathrm{N}\, d\sigma \,,$$

ove

$$\theta = \mathrm{X}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathrm{Y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathrm{Z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\,,$$

ed N rappresenta la componente della velocità secondo la normale esterna rispetto a σ.

Sarà pertanto:

$$\mathrm{A} = -\varrho\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\lambda\, d\sigma + \varrho\int_\sigma (\theta\mathrm{N} - \mathrm{U}\lambda)\, d\sigma;$$

o più semplicemente:

$$\mathrm{A} = \frac{d\Phi}{dt} + \mathrm{A}_1\,, \tag{1}$$

essendo

$$\Phi = -\varrho\int_\sigma \psi\lambda\, d\sigma\,,$$

$$\mathrm{A}_1 = \varrho\int_\sigma (\theta\mathrm{N} - \mathrm{U}\lambda)\, d\sigma; \tag{2}$$

la quale espressione di A_1 poteva anche ottenersi, come caso particolare, dalla formula generale (15) della Nota precedente.

2. Consideriamo, per una superficie chiusa τ, che limiti una parte qualunque T dello spazio S occupato, in un determinato istante, dalla massa liquida, l'integrale

$$\mathrm{I} = \int_\tau (\theta\mathrm{N} - \mathrm{U}\lambda)\, d\tau\,,$$

in cui s'intende che N e λ siano espressi in tutti i punti di τ (noi veniamo così ad estendere il significato di N e λ) dalle formule:

$$\mathrm{N} = u\alpha + v\beta + w\gamma \quad , \quad \lambda = \mathrm{X}\alpha + \mathrm{Y}\beta + \mathrm{Z}\gamma\,,$$

α, β, γ denotando i coseni della normale a τ rivolta verso l'interno.

Dico che questo integrale, nei casi che a noi interessa considerare (per ciò che riguarda l'espressione di λ, ossia la natura delle funzioni X, Y, Z) è nullo.

Si ha infatti, per le formule precedenti:

$$\mathrm{I} = \int_\tau \{(\theta u - \mathrm{UX})\,\alpha + (\theta v - \mathrm{UY})\,\beta + (\theta w - \mathrm{UZ})\gamma\}\, d\tau\,.$$

Possiamo trasformare I in un integrale esteso allo spazio T limitato da τ. Sotto il segno d' integrazione comparirà la funzione

$$F = \frac{\partial}{\partial x}(UX - \theta u) + \frac{\partial}{\partial y}(UY - \theta v) + \frac{\partial}{\partial z}(UZ - \theta w) .$$

Se teniamo presenti le equazioni

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 ,$$

avremo:

$$F = \left(X \frac{\partial U}{\partial x} + Y \frac{\partial U}{\partial y} + Z \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) . \tag{3}$$

Ora, per essere $u = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, ecc., e $\theta = X \frac{\partial \psi}{\partial x} + Y \frac{\partial \psi}{\partial y} + Z \frac{\partial \psi}{\partial z}$, si ha:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \\ &= X \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \\ &+ Y \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right) + \\ &+ Z \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + G , \end{aligned} \tag{4}$$

ove

$$G = \frac{\partial X}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial Y}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial Z}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} .$$

Ma essendo $U = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\}$, i coefficienti di X, Y, Z, nella formula (4), non sono altro che $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Quindi dal confronto di questa formula colla (3) avremo:

$$F = - G .$$

D'altronde, nei casi che noi consideriamo ($\lambda = -\alpha$, $\lambda = -\gamma y + \beta z$, ecc.; ossia: $X = -1$, $Y = 0$, $Z = 0$; $X = 0$, $Y = z$, $Z = -y$, ecc.) le sei quantità $\frac{\partial X}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}, \ldots$, che figurano in G, sono nulle. Sarà perciò $G = 0$, $F = 0$, e finalmente $I = 0$; c. v. d.

3. Applichiamo la formula dimostrata all'insieme delle due superficie σ e σ' che limitano l'intero spazio S occupato dal liquido. Per ipotesi σ' rappresenta una superficie fissa: ivi sarà pertanto $N = 0$. E si avrà:

$$\int_\sigma (\theta N - U\lambda)\, d\sigma = -\int_{\sigma'} U\lambda\, d\sigma';$$

onde la formula (2) potrà anche scriversi:

$$A_1 = \varrho \int_{\sigma'} U\lambda\, d\sigma'.$$

Abbiamo così un'altra espressione, più semplice, del termine A_1.

4. Supponiamo che la superficie σ' sia lontanissima, con ogni suo punto, dal corpo S_0. La presenza di quella superficie avrà allora un' influenza trascurabile sul movimento del liquido in prossimità di S_0. E poichè i valori di ψ, e delle sue derivate, che figurano nella formula (1), sono presi nei punti di σ, noi potremo sostituire a ψ la funzione, che denoteremo colla stessa lettera, regolare ed armonica in *tutto* lo spazio esterno rispetto a σ, che sopra σ verifica l'equazione $\frac{\partial \psi}{\partial n} = N$, e all'infinito si annulla. Questa funzione può considerarsi come il potenziale di una massa (*nulla*, per essere $\int_\sigma N\, d\sigma = 0$) situata in S_0.

Diciamo Σ una superficie chiusa, che contenga nel suo interno σ: per esempio una sfera di raggio r, col centro in un punto fisso. In virtù della formula $I = 0$, sarà (definite, in tutto lo spazio esterno rispetto a σ, le funzioni u, v, w, come le derivate prime di ψ):

$$\int_\sigma (\theta N - U\lambda)\, d\sigma = -\int_\Sigma (\theta N - U\lambda)\, d\Sigma;$$

e perciò:

$$A_1 = -\varrho \int_\Sigma (\theta N - U\lambda)\, d\Sigma.$$

Facciamo crescere r oltre ogni limite; ed osserviamo che nei diversi casi ($X = -1$, $Y = 0$, $Z = 0$; $X = 0$, $Y = z$, $Z = -y$; ecc.), le funzioni X, Y, Z, che compariscono in λ e θ, diventano, al più, infinite, come r. Si riconosce allora che A_1, col crescere di r, tende a zero. Onde dovrà essere $A_1 = 0$; e per la formula (1):

$$A = \frac{d\Phi}{dt}.$$

5. Applicherò la formula precedente ad alcuni casi particolari di movimento (¹).

Supponiamo che S_0 si sposti, con velocità costante a, parallelamente all'asse delle x, e insieme ruoti con velocità angolare, pure costante, ω, intorno allo stesso asse (moto elicoidale).

La componente normale della velocità, $\frac{\partial\psi}{\partial n}$, conserverà in ogni punto di σ un valore costante: lo stesso accadrà, per conseguenza, del potenziale ψ.

Se anche λ è tale da conservare in ogni punto di σ un valore costante, Φ non varierà col tempo, e la corrispondente azione A *sarà nulla.*

Ora, sopra σ si conserva costante il coseno α, come pure le quantità $\gamma y - \beta z$ (ossia il momento, rispetto all'asse delle x, del segmento di lunghezza 1 disteso sulla normale). Sarà nulla perciò la componente, secondo l'asse delle α, della forza F, risultante delle azioni elementari $p\,d\sigma$; e il loro momento rispetto al medesimo asse.

Se poi la velocità angolare ω è uguale a zero (moto traslatorio uniforme) si conserveranno costanti anche i coseni β e γ, quindi saranno pure nulle le altre due componenti di F; ossia: l'azione esercitata dal liquido si ridurrà ad una coppia tendente a far ruotare il corpo intorno ad un asse normale alla direzione del movimento.

6. Se il moto è traslatorio, ma la velocità a non è costante, denoteremo con $a\psi$, anzichè con ψ, il potenziale di velocità, e manterremo la formula $\Phi = -\varrho \int_\sigma \psi\lambda\, d\sigma$; onde sarà:

$$A = \frac{d(a\Phi)}{dt}.$$

La funzione ψ conserva, nei punti di σ, un valore costante.

In quei casi in cui anche λ si conserva costante ($\lambda = -\alpha\,, -\beta\,, -\gamma\,, -\gamma y + \beta z$), sarà $\Phi = \text{cost}$, quindi

$$A = \Phi \frac{da}{dt}\,;$$

ossia: l'azione A risulterà proporzionale all'*accelerazione* del corpo.

7. Ritorniamo alla formula (1). La superficie fissa σ' che limita, con σ, lo spazio occupato dal liquido, sia formata di una parte piana σ'_1, e di una parte σ'_2, lontanissima, con ogni suo punto, dal corpo in moto: il quale, dunque, si muove in prossimità di una parete piana.

(¹) I risultati a cui provengo sono già, in parte, noti: V. Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito*. Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIX, parte 2ª.

Chiamando σ_1 l'intero piano a cui appartiene σ'_1, noi potremo, commettendo un errore trascurabile, introdurre, nella formula (1), come funzione ψ, la funzione regolare e armonica in tutto lo spazio esterno rispetto a σ e σ_1, che sopra queste due superficie verifica rispettivamente le condizioni $\frac{\partial \psi}{\partial n} = N$, $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$, e all'infinito si annulla.

Consideriamo una sfera di raggio r, col centro in un punto del piano σ_1; che racchiuda il corpo S_0; e diciamo Σ la mezza sfera situata nello spazio S, Σ_1 l'area circolare che essa determina sul piano σ_1.

Per il teorema dimostrato nel § 2, noi potremo sostituire, nell'espressione (2) di A_1 all'integrale esteso a σ, la somma dei due integrali analoghi estesi a Σ e Σ_1, e cambiati di segno. Ma col crescere di r il primo integrale, come nel § 4, tende a zero [1]; il secondo ha per limite l'integrale esteso all'intero piano σ_1. D'altronde nei punti di σ_1 si ha $N = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$; onde sarà

$$A_1 = \varrho \int_{\sigma_1} U\lambda \, d\sigma_1 ,$$

$$A = \frac{d\Phi}{dt} + \varrho \int_{\sigma_1} U\lambda \, d\sigma_1 .$$

Il corpo S_0 si muova di moto traslatorio uniforme, parallelamente al piano σ_1. Il potenziale ψ conserverà in ogni punto di σ un valore costante.

Assumeremo come asse delle x una retta normale al piano σ_1: il suo verso positivo coincida con quello della normale n a σ_1 (penetrante in S).

Esaminiamo la forza F che agisce sul corpo. Per calcolare le sue componenti F_x, F_y, F_z, dovremo fare λ uguale a $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Ora sopra σ i coseni α, β, γ si conservano costanti: e saranno perciò costanti le corrispondenti Φ. Sul piano σ_1 si ha $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, quindi rispettivamente $\lambda = -1$, $\lambda = 0$, $\lambda = 0$. Avremo pertanto:

$$F_x = -\varrho \int_{\sigma_1} U \, d\sigma_1 , \tag{5}$$

$$F_y = F_z = 0 .$$

Se ne conclude (poichè il semi-quadrato U della velocità è una quantità sempre positiva o nulla [2]) che la forza agente sul corpo tende ad *avvicinarlo* al piano σ_1, a cui essa è normale.

[1] Riguardo al modo di comportarsi della funzione ψ all'infinito, si osserverà che, detta σ_0 la superficie simmetrica di σ rispetto al piano σ_1, la ψ potrà considerarsi come il potenziale di due masse (nulle) simmetricamente distribuite, rispetto a σ_1, negli spazii racchiusi da σ e σ_0.

[2] Da note proprietà delle funzioni armoniche segue che non può essere $\int_{\sigma_1} U \, d\sigma_1 = 0$, ossia $U = 0$ in tutti i punti di σ_1, se non quando l'intera massa liquida è in quiete.

8. Se il corpo ruota intorno ad un asse normale al piano σ_1, che assumeremo come asse delle x, si conserverà costante, in ogni punto di σ oltre al potenziale ψ, il coseno α, come pure il momento $\gamma y - \beta z$; onde la forza F_x sarà ancora espressa dalla formula (5), quindi diretta verso il piano σ_1. Essendo poi, su questo piano, $\gamma y - \beta z = 0$ $(\beta = \gamma = 0)$, il momento delle forze $p\,d\sigma$ rispetto all'asse di rotazione sarà nullo.

9. Notiamo, infine, che se si hanno due corpi uguali limitati dalle superficie σ, σ_0, i quali siano inizialmente, e si conservino, nel loro movimento, simmetrici rispetto ad un piano σ_1, e se la massa liquida occupa lo spazio esterno rispetto ai due corpi; l'azione esercitata sopra uno di essi sarà la stessa come se il piano σ_1 fosse una parete rigida. Se, per conseguenza i due corpi si muovono di moto traslatorio uniforme parallelamente al piano di simmetria, essi saranno attratti l'uno verso l'altro.

Lo stesso avverrà se essi ruotano, con velocità angolari uguali e costanti, intorno ad una retta normale a questo piano; a meno che non siano solidi di rotazione, aventi per asse quella retta: nel qual caso la massa liquida sta in quiete, e sopra i due corpi non viene esercitata alcuna azione.

Matematica. — *Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio E. D'Ovidio.

1. Ricordiamo il teorema di Osgood, relativo al problema più semplice di calcolo delle variazioni. Sia C una curva $y = \varphi(x)$ terminata a due punti A, B che rende minimo l'integrale $\int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx$, dove a, b sono le ascisse di A, B. Ammesse soddisfatte certe ipotesi relative alla funzione f di x, y, y', per la cui precisa enunciazione rinvieremo ai trattati del Bolza [1] e dell'Hadamard [2], vale un teorema, dovuto a Osgood, e che noi enuncieremo nella forma seguente:

Si può determinare un contorno R *di* C, *che soddisfa alla seguente condizione. Per ogni punto* P *di* R *non posto su* C, *esiste un numero positivo e non nullo* $\varepsilon > 0$, *tale che il valore del nostro integrale relativo a una qualsiasi curva* $y = y(x)$ *passante per* P *e terminata ai punti* A, B *supera il valore del nostro integrale relativo alla curva* C *di una quantità non minore di* ε.

Questo teorema non vale per i problemi di variazione relativi a integrali multipli: dal che segue una profonda differenza tra i problemi di variazione

(1) Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, pag. 280.
(2) *Leçons sur le calcul des variations*, p. 477 et suiv.

relativi agli integrali semplici e quelli relativi agli integrali multipli. Ciò non ostante l'esame di alcuni casi più semplici mi persuase che qualche teorema analogo si potesse dimostrare anche per gli integrali multipli; questa previsione trovò conferma nel teorema, a cui sono dedicate le pagine seguenti.

Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione di x, y, z, p, q finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto il campo che considereremo. Se Σ è un pezzo di superficie $z = z(x, y)$ terminato a un *dato* contorno K, noi indicheremo con J(Σ) l'integrale $\iint_\sigma f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$, dove si è posto $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, e σ è l'area racchiusa sul piano xy dalla proiezione di K su tale piano.

Sia S un pezzo di superficie $z = \varphi(x, y)$ terminato a K, per cui J(S) ha il minimo valore; più precisamente esista un intorno R di S tale che, se Σ è un pezzo di superficie $z = z(x, y)$ terminato a K e posto in R, si abbia $J(\Sigma) \geq J(S)$.

Supporremo naturalmente soddisfatta in R la condizione di Jacobi: supporremo cioè l'esistenza di un campo di superficie *estremali* per il nostro problema di minimo, tale che per ogni punto di R passi una e una sola superficie estremale del campo considerato. La S faccia parte di questo campo; vale a dire quella delle estremali del nostro campo, che passa per un punto di S, coincida con S. Sia $\psi(x, y, z) = \text{cost}$ l'equazione delle nostre ∞^1 estremali; e sia $\psi(x, y, z) = 0$ l'equazione di S. Sarà identicamente

$$\psi(x, y, \varphi(x, y)) = 0. \tag{1}$$

Siano $\pi, \varkappa$ le derivate di z rispetto a x ed y prese su una di queste superficie estremali. Sarà

$$\pi = -\frac{\psi'_x}{\psi'_z} \quad ; \quad \varkappa = -\frac{\psi'_y}{\psi'_z}, \tag{2}$$

quando si supponga in R

$$\psi'(z) \neq 0,$$

ipotesi *quasi* equivalente all'altra che per ogni punto di R passi una e una sola estremale $\psi = \text{cost}$ (su cui la z è funzione delle x, y).

Supporremo soddisfatte le condizioni di Legendre e Weierstrass in una forma un po' più restrittiva di quella necessaria, affinchè la S renda proprio minimo il nostro integrale. Più precisamente supporremo che (impicciolendo caso mai l'intorno R), per tutti i valori di x, y, z in R e per valori qualsiasi delle p, q, si abbia

$$f''_{pp} > 0 \quad , \quad f''_{qq} > 0,$$

mentre le espressioni

$$f''_{qq} - \frac{f''^2_{pq}}{f''_{pp}} \geq h \quad \text{e} \quad f''_{pp} - \frac{f''^2_{pq}}{f''_{qq}} \geq k$$

hanno limiti inferiori h, k positivi e differenti da zero. Anzi ci basta supporre che queste condizioni siano soddisfatte per una opportuna scelta delle variabili indipendenti x, y. Se però supponessimo in più che $f''_{pp} f''_{qq} - f''^2_{pq}$ ha un limite inferiore diverso da zero, le condizioni da noi ammesse sarebbero invarianti rispetto a ogni cambiamento di variabili. Ma questa ulteriore limitazione ci è superflua.

Nelle nostre ipotesi, se Σ è un'altra superficie $z = z(x, y)$ terminata a K e posta in R, la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ si può rendere piccola a piacere, anche imponendo a Σ la condizione di passare per un punto A di R, non posto su S. Tanto basta per affermare che il teorema di Osgood non vale per gli integrali che stiamo esaminando. Un fatto analogo si presenta anche se a Σ imponessimo di passare per un numero finito di punti di R, non appartenenti a S. Ma, se invece imponessimo a Σ la condizione di contenere tutto un pezzetto di superficie assegnato e posto in R, allora la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ non potrebbe generalmente più essere ridotta piccola a piacere. Ma il teorema di Osgood, generalizzato in questo modo, diverrebbe affatto banale e di nessun interesse. Però queste osservazioni ci conducono a cercare di generalizzare il teorema di Osgood, indagando se esista qualche classe di gruppi G di punti tali che, se Σ è costretto a contenere i punti di un tale gruppo G, allora la differenza $J(\Sigma) - J(S)$ non si possa più rendere piccola a piacere. Tali gruppi G dovranno, per così dire, essere intermedii tra i gruppi formati da un numero finito di punti, e i gruppi formati da un pezzetto si superficie. E, da questo punto di vista, l'idea prima che si presenta è quella di esaminare i gruppi G formati dai punti di un pezzetto di una curva. E noi dimostreremo appunto che il teorema di Osgood è generalizzabile in questo senso. Noi dimostreremo anzi un risultato più generale. Per ottenerlo osserviamo che, tanto un gruppo G_1 formato da un numero finito di punti, quanto un gruppo G formato coi punti di un pezzetto di curva, hanno per proiezione sul piano xy gruppi di punti a *misura superficiale* (area) nulla; però tra i gruppi G_1 e G vi è questa differenza essenziale: che, mentre la proiezione di G_1 ha, per così dire, *misura lineare* (lunghezza) nulla, il gruppo G *non è linearmente nullo*. Quest'ultima frase acquista un valore preciso con la seguente definizione:

Diremo che un gruppo G *di punti è linearmente nullo, se i piani* $x =$ cost, *o* $y =$ cost, *che contengono un punto di* G, *formano un gruppo di misura lineare nulla* (1).

(1) Questa definizione è simile, ma non del tutto identica, alla analoga definizione data dall'A. al § 2 (pag. 5) della Memoria: *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza* ecc. Rend. del Circolo Matematico di Palermo, 1907, tomo 23.

E noi dimostreremo (ammesse soddisfatte da f e da R le ipotesi sopra enunciate):

Se G *è un gruppo di punti non linearmente nullo, esiste una costante* ε *positiva diversa da zero, definita da* f, S *e dal gruppo* G, *tale che per ogni superficie* Σ, *definita da un'equazione* $z = z(x, y)$, *contenente i punti di* G [1], *e terminata al contorno* K *sia* $J(\Sigma) - J(S) \geq \varepsilon$.

Naturalmente supponiamo che, se $z = z(x, y)$ è l'equazione di Σ, $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ siano finite e continue in σ; basterebbe del resto supporre che $\int \frac{\partial z}{\partial x} dx$ e $\int \frac{\partial z}{\partial y} dy$ esistessero, e differissero da z rispettivamente per una funzione della sola y, o della sola x.

Osserviamo che, se il nostro teorema non fosse vero, si potrebbe trovare una successione di superficie Σ_n, definite rispettivamente da un'equazione $z = \varphi_n(x, y)$, terminate a K, e contenenti tutti i punti di G, in guisa che

$$\lim_{n=\infty} [J(\Sigma_n) - J(S)] = 0 \quad \text{ossia} \quad \lim_{n=\infty} J(\Sigma_n) = J(S).$$

Poichè il limite per $n = \infty$ di $J(\Sigma_n)$ è il valore minimo J(S) le superficie $\Sigma_n(z = \varphi_n)$ costituirebbero *una successione minimizzante.* E ciononostante in ogni punto (x, y) del piano xy, proiezione di un punto di G, il valore di $\varphi_n(x, y)$ non varierebbe con n, e sarebbe distinto da $\varphi(x, y)$. Se dunque $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \ldots$ è una *qualunque* successione subordinata alla successione delle φ_n, in tutti questi punti sarebbe $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n}(x, y) \neq \varphi(x, y)$. E questi punti formerebbero un aggregato *non linearmente nullo.*

Noi avremo dunque dimostrato il nostro teorema, se proveremo che nelle nostre ipotesi:

Se $z = \varphi_n(x, y)$ *è una successione minimizzante, si può scegliere una successione subordinata* $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \varphi_{i_3}, \ldots$ *tale che* $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n} = \varphi$ *in tutti i punti di* σ, *escluso al più un aggregato di punti linearmente nullo.*

La funzione E di Weierstrass è data dalla

$$E = f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \pi, \varkappa) - \\ - (p - \pi) \frac{\partial f(x, y, z, \pi, \varkappa)}{\partial \pi} - (q - \varkappa) \frac{\partial f(x, y, z, \pi, \varkappa)}{\partial \varkappa}$$

che, per la formola di Taylor, si può scrivere:

$$E = \tfrac{1}{2} [R(p - \pi)^2 + 2S(p - \pi)(q - \varkappa) + T(q - \varkappa)^2],$$

[1] Affinchè questo sia possibile, i punti di G devono avere le loro proiezioni sul piano xy, tutte interne a σ; e punti distinti di G devono avere proiezioni distinte. Questa ipotesi è fatta tacitamente in tutta la Nota.

dove R, S, T sono valori intermedii di f''_{pp}, f''_{pq}, f''_{qq}. Per le nostre ipotesi

$$R > 0 \,,\, T > 0 \,,\, R - \frac{S^2}{T} \geq k > 0 \,,\, T - \frac{S^2}{R} \geq h > 0 \,,$$

cosicchè

$$(R - k)\, T - S^2 \geq 0 \quad , \quad (T - h)\, R - S^2 \geq 0 \,.$$

Dalle $R > 0$, $T > 0$ e da queste ultime disuguaglianze si deduce che le forme

$$(R - k)\, \xi^2 + 2S\xi\eta + T\eta^2 \quad , \quad R\xi^2 + 2S\xi\eta + (T - h)\, \eta^2$$

nelle variabili ξ, η non hanno mai valori negativi, comunque si scelgano valori reali per le variabili ξ, η. Quindi:

$$2E = R(p - \pi)^2 + 2S(p - \pi)\,(q - \varkappa) + T(q - \varkappa)^2 \geq k(p - \pi)^2$$
$$2E \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \geq h(q - \varkappa)^2 \,;$$

donde, sommando e indicando con l la minima delle costanti $\frac{k}{4}$, $\frac{h}{4}$, si trae:

$$E \geq l \,\{(p - \pi)^2 + (q - \varkappa)^2\} \qquad (l = \text{cost} \,;\, l > 0).$$

Ora $J(\Sigma_n) - J(S)$ è per i noti teoremi di Hilbert e Weierstrass eguale all'integrale di E relativo alla superficie Σ_n, vale a dire all'integrale di E esteso a σ ove si ponga $z = \varphi_n$, $p = p_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$, $q = q_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial y}$. Quindi per l'ultima disuguaglianza si avrà:

$$(3) \qquad J(\Sigma_n) - J(S) \geq l \int\!\!\int_\sigma \{(p_n - \pi)^2 + (q_n - \varkappa)^2\}\, dx\, dy \,.$$

Posto

$$\psi Z_n = (x \,,\, y \,,\, \varphi_n) \;,\; P_n = \frac{\partial Z_n}{\partial x} \;,\; Q_n = \frac{\partial Z_n}{\partial y} \,,$$

sarà:

$$P_n = \frac{\partial Z_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\, p_n$$
$$(z = \varphi_n(x \,,\, y) \;;\; \psi = \psi(x \,,\, y \,,\, z))$$

donde per le (2)

$$P_n = \frac{\partial \psi}{\partial z}\left[p_n - \left(\frac{-\psi'_x}{\psi'_z}\right)\right] = \frac{\partial \psi}{\partial z}\,(p_n - \pi) \qquad (z = \varphi_n) \,.$$

E similmente

$$Q_n = \frac{\partial \psi}{\partial z}\,(q_n - \varkappa) \qquad\qquad (z = \varphi_n) \,.$$

Se con M indichiamo il massimo in R della funzione continua $\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|$, sarà dunque

$$|p_n - \pi| \geq \left|\frac{P_n}{M}\right| \qquad |q_n - \varkappa| \geq \left|\frac{Q_n}{M}\right| .$$

E dalla (3) si trarrà:

$$J(\Sigma_n) - J(S) \geq \frac{l}{M} \int\int_\sigma (P_n^2 + Q_n^2)\, d\sigma .$$

Poichè per le nostre ipotesi il primo membro di questa disuguaglianza ha per $n = \infty$ limite nullo, sarà *a fortiori*

$$\lim_{n=\infty} \int\int_\sigma (P_n^2 + Q_n^2)\, d\sigma = 0 .$$

Ora sul contorno K è $\varphi_n = \varphi$, poichè S e Σ_n passano tutte per K; sulla sua proiezione sul piano xy, ossia sul contorno di σ sarà dunque per (1)

$$Z_n = \psi(x, y, \varphi_n) = \psi(x, y, \varphi) = 0 \quad \text{(sul contorno di } \sigma).$$

Le funzioni Z_n costituiscono dunque una *successione minimizzante* per il problema (di minimo) di trovare tra le funzioni nulle sul contorno di σ quella funzione Z (finita e continua insieme alle derivate prime), per cui l'integrale $\int\int_\sigma (P^2 + Q^2)\, d\sigma \left(P = \frac{\partial Z}{\partial x}, Q = \frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ ha il minimo valore. Questa funzione Z è chiaramente la funzione $Z = 0$; e per un teorema dato nella mia Memoria citata si potrà trovare nella successione delle Z_n una successione subordinata $Z_{i_1}, Z_{i_2}, \ldots$ tale che $\lim_{n=\infty} Z_{i_n} = 0$, escluso al più *un aggregato di punti linearmente nullo*. Escluso al più un tale aggregato, sarà dunque $\lim_{n=\infty} \psi(x, y, \varphi_{i_n}) = 0 = \psi(x, y, \varphi)$. Poichè la funzione $\left|\frac{\partial \psi}{\partial z}\right|$ è continua, e differente da zero, essa ha un minimo non nullo; la precedente uguaglianza dimostra (per il teorema della media) che sarà $\lim_{n=\infty} \varphi_{i_n} = \varphi$ in tutto σ, escluso al più un aggregato linearmente nullo [1] c. d. d.

Questi risultati com'è ben chiaro, fanno anche accrescere la speranza che il cosiddetto principio di minimo di Dirichlet possa ricevere nuove applicazioni, e diventare un ancòra più efficace strumento di ricerca.

[1] Infatti la nostra formola si può scrivere $\psi'_z[\varphi_{i_n} - \varphi] = 0$, dove ψ'_z indica un certo valore di $\frac{\partial \psi}{\partial z}$.

Matematica. — *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* Nota del prof. M. PANNELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Il Cremona nella seconda delle sue classiche Note: *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* (¹), basandosi sulla considerazione del numero dei punti doppî delle curve del fascio, che sopra uno dei due piani dati corrisponde ad un fascio di rette dell'altro, ha dimostrato il seguente teorema:

« Se fra i punti di due piani ha luogo una corrispondenza birazionale « con soli punti fondamentali ordinarî, il numero di questi punti è lo stesso « per entrambi i piani ».

Ma di questa proprietà si può dare ancora un'altra dimostrazione.

Suppongasi di avere una rete qualunque di curve d'ordine n, dotata di σ punti-base ordinarî P_l, ciascuno multiplo secondo l. La sua Jacobiana è una curva dell'ordine $3(n-1)$, e possiede ogni punto P_l come punto multiplo ordinario secondo $3l-1$. Quindi il genere π di questa Jacobiana e quello p di una curva della rete, sono dati rispettivamente dalle formule:

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2\pi &= (3n-4)(3n-5) - \sum_l (3l-1)(3l-2) \\ 2p &= (n-1)(n-2) - \sum_l l(l-1) \end{aligned}$$

dalle quali segue subito:

« Il genere π della Jacobiana di una rete qualunque di curve di ge- « nere p, dotata di σ punti fondamentali ordinari, è somministrato dalla « espressione:

$$\pi = 9p - \sigma + 1 \text{ ».}$$

In particolare, se la rete data è omaloidica, si ha $p=0$, e quindi in virtù del teorema precedente, applicabile *in ogni caso*, quando come genere della Jacobiana s'intenda *sempre* il numero calcolato per mezzo della formula (1), si trova:

$$(2)\qquad \pi = 1 - \sigma .$$

D'altra parte la data rete omaloidica definisce una corrispondenza birazionale fra i punti del piano in cui essa giace e quelli di un altro piano,

(¹) Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, t. V, ser. 2ª.

e se si indica con σ' il numero dei punti fondamentali di quest'ultimo piano, la Jacobiana della rete si compone [1] di σ' curve razionali, due qualunque delle quali non s'intersecano fuori dei punti fondamentali. Quindi il genere π di questa Jacobiana può determinarsi ancora, applicando la formula con cui si calcola il genere di una curva composta, genere di cui la definizione è in accordo con quella dianzi data in ogni caso per la Jacobiana stessa. In tal modo si ottiene:

$$\pi = 1 - \sigma'.$$

Dal confronto di questa formula con la (2) segue il teorema del Cremona, sopra ricordato.

2. Se le considerazioni precedenti si ripetono per lo spazio ordinario, si giunge a stabilire una relazione notevole fra gli elementi fondamentali di due spazî, i cui punti siano legati fra loro da una corrispondenza birazionale.

La dimostrazione di questa relazione costituisce l'oggetto della presente Nota.

Suppongasi di avere un sistema lineare triplamente infinito di superficie S d'ordine n, di cui la base sia formata da σ punti P_l e da τ curve C_i. Ogni punto P_l sia multiplo (ordinario) secondo l per ciascuna superficie S, e il cono in esso tangente alla superficie medesima vari col variare di questa nel sistema dato. Inoltre ogni curva C_i, d'ordine m_i e di rango r_i, sia multipla (ordinaria) secondo i per ciascuna superficie S, e gli i piani tangenti in uno stesso punto di C_i alla superficie medesima varino tutti col variare di questa nel sistema dato. Infine ogni curva C_i si appoggi ad ogni altra curva $C_j (j \geqq i)$ in k_{ij} punti e passi per ogni punto P_l con j_{il} rami.

La Jacobiana del sistema dato è una superficie dell'ordine $4(n-1)$ e possiede ogni punto P_l come punto multiplo secondo $4l-2$ ed ogni curva C_i come curva multipla secondo $4i-1$.

Il genere aritmetico Π di questa superficie, quello P di una superficie S del sistema, l'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques relativo alla superficie medesima e il genere p della curva d'intersezione, fuori delle curve fondamentali, di due superficie S, sono rispettivamente date dalle formule:

$$\begin{aligned}6\Pi = {} & 64n^3 - 288n^2 + 428n - 210 - \sum_l (64l^3 - 144l^2 + 104l - 24) \\ & - \sum_i [(192i^2 - 144i + 24)\,n - (128i^3 + 144i^2 - 164i + 30)]\,m_i \\ & + \sum_i (64i^3 - 72i^2 + 26i - 3)\,r_i \\ & + \sum_{ij} [(192i^2 - 144i + 24)\,j - (64i^3 - 28i + 6)]\,k_{ij} \\ & + \sum_{il} [(192i^2 - 144i + 24)\,l - (128i^3 - 56i + 12)]\,j_{il}\end{aligned}$$

[1] Cremona, loc. cit, nn. 6 ed 11.

$$6\mathrm{P} = n^3 - 6n^2 + 11n - 6 - \sum_l (l^3 - 3l^2 + 2l)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - 3i)\,n - (2i^3 + 3i^2 - 5i)]\,m_i + \tfrac{1}{2}\sum_i (2i^3 - 3i^2 + i)\,r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - 3i)\,j - (i^3 - i)]\,k_{ij} + \sum_{il} [(3i^2 - 3i)\,l - (2i^3 - 2i)]\,j_{il}$$

$$\Omega = n^3 - 8n^2 + 16n + 1 - \sum_l (l^3 - 4l^2 + 4l)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - 4i + 1)\,n - (2i^3 + 4i^2 - 6i)]\,m_i + \sum_i (i^3 - 2i^2 + i)\,r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - 4i + 1)\,j - (i^3 - i)]\,k_{ij}$$
$$+ \sum_{il} [(3i^2 - 4i + 1)\,l - (2i^3 - 2i)]\,j_{il}$$

$$p = n^3 - 2n^2 + 1 - \sum_l (l^3 - l^2)$$
$$- \sum_i [(3i^2 - i)\,n - (2i^3 + i^2)]\,m_i + \tfrac{1}{2}\sum_i (2i^3 - i^2)\,r_i$$
$$+ \sum_{ij} [(3i^2 - i)\,j - i^3]\,k_{ij} + \sum_{il} [(3i^2 - i)\,l - 2i^3]\,j_{il}.$$

Dalle formule precedenti segue facilmente l'altra:

$$\Pi = 4\mathrm{P} + 4\Omega + 6p + 4\sigma + 5\mu - \tfrac{1}{2}\sum_i r_i - \sum_{ij} k_{ij} - 2\lambda - 41 \tag{3}$$

nella quale si è posto:

$$\mu = \sum_i m_i \qquad \lambda = \sum_{il} j_{il}.$$

Ora il genere ϱ_i di una curva C_i è dato dalla formula:

$$\varrho_i = \tfrac{1}{2}\,r_i - m_i + 1,$$

da cui, posto ancora:

$$\varrho = \sum_i \varrho_i + \sum_{ij} k_{ij} - \tau + 1 \tag{4}$$

segue:

$$\mu - \tfrac{1}{2}\sum_i r_i - \sum_{ij} k_{ij} = -\varrho + 1.$$

In virtù di questa eguaglianza dalla (3) si deduce:

« Il genere aritmetico Π della Jacobiana di un sistema lineare tripla-
« mente infinito di superficie S è dato dalla formula:

$$\Pi = 4\mathrm{P} + 4\Omega + 6\varrho + 4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda - 40$$

« dove P, Ω, p, σ, μ, ϱ e λ hanno i significati dianzi stabiliti ».

3. In particolare, suppongasi che il sistema dato sia omaloidico. In tal caso si ha intanto: $P = 0$ e $p = 0$. Inoltre il sistema stesso definisce una corrispondenza birazionale fra i punti dello spazio $\sum$ cui esso appartiene e quelli di un altro spazio $\sum'$. Quindi se si indica con μ' la somma degli ordini di tutte le curve fondamentali di $\sum'$, una superficie S corrispondendo ad un piano di $\sum'$, contiene μ' curve eccezionali, epperò l'invariante di Castelnuovo-Enriques ad essa relativo è dato dalla formula:

$$\Omega = 10 - \mu'. \tag{5}$$

Ciò nell'ipotesi, tacitamente ammessa anche nel numero precedente, in cui lo spazio $\sum$ non contenga punti fondamentali semplici per le superficie S, poichè per ognuno di questi punti l'invariante Ω aumenta di una unità.

In questa ipotesi dal teorema del num. prec. si deduce intanto:

$$\Pi = -4\mu' + 4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda. \tag{5'}$$

D'altra parte la Jacobiana del sistema dato si compone delle τ' superficie $R_{i'}$ e delle σ' superficie $T_{l'}$ di $\sum$ corrispondenti alle τ' curve fondamentali $C'_{i'}$ ed ai σ' punti fondamentali $P'_{l'}$ di $\sum'$, ogni superficie $T_{l'}$ dovendo essere contata *due* volte [1] se, come qui si suppone, il sistema omaloidico di $\sum'$ soddisfa alle medesime condizioni imposte al sistema di superficie S considerato nel n. 2. Quindi il genere aritmetico Π può essere determinato ancora applicando alla superficie $\sum_{i'} R_{i'} + \sum_{l'} 2T_{l'}$, la formula con cui si calcola il genere aritmetico di una superficie composta. In tal modo e riguardando momentaneamente la superficie composta $\sum R_{i'}$ come una superficie unica, R, si trova:

$$\begin{aligned}\Pi = g.a.\mathrm{R} &+ 2\sum_{l'} g(\mathrm{RT}_{l'}) + \sum_{l'} g(\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{l'}) + 4\sum_{l'k'} g(\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{k'}) \\ &+ \sum_{l'}(\mathrm{RT}_{l'}\mathrm{T}_{l'}) + \sum_{l'k'}(\mathrm{RT}_{l'}\mathrm{T}_{k'}) + \sum_{l'k'}(\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{k'}) - \binom{2\sigma'}{2},\end{aligned} \tag{6}$$

dove $g.a.\mathrm{R}$ indica il genere aritmetico della superficie R, i simboli $g(\mathrm{AB})$ ed (ABC) denotano rispettivamente il genere della curva e il numero dei punti d'intersezione, fuori degli elementi fondamentali, di due superficie A e B o di tre superficie A, B, C, e l'indice k', deve, come l', variare da 1 sino a σ', ma in ciascuno dei simboli $(\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{k'})$, $(\mathrm{RT}_{l'}\mathrm{T}_{k'})$, $(\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{l'}\mathrm{T}_{k'})$ non può assumere il medesimo valore di l'.

a) In virtù dello stesso teorema sul genere aritmetico di una superficie composta, testè applicato, si ha:

$$g.a.\mathrm{R} = g.a.\sum \mathrm{R}_{i'} = \sum g.a.\mathrm{R}_{i'} + \sum g(\mathrm{R}_{i'}\mathrm{R}_{j'}) + \sum(\mathrm{R}_{i'}\mathrm{R}_{j'}\mathrm{R}_{k'}) - \binom{\tau'-1}{2} \tag{7}$$

[1] Noether, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, § IV, Annali di Matematica, ser. II, t. V.

dove ciascuno degli indici i', j', h' deve variare da uno sino a τ'; ma quelli che si trovano nello stesso simbolo $(R_{i'} R_{j'})$ e $(R_{i'} R_{j'} R_{h'})$ debbono assumere valori differenti.

Una superficie $R_{i'}$ contiene un fascio costituito dalle curve (razionali) corrispondenti ai punti della curva $C'_{i'}$; quindi, dette $\varrho'_{i'}$ il genere di questa curva, il genere aritmetico della superficie $R_{i'}$ è $-\varrho'_{i'}$.

Se una curva $C'_{i'}$ si appoggia ad ogni altra curva $C'_{j'}$ $(j' \geq i')$ in $k'_{i'j'}$ punti, le due superficie $R_{i'}$ e $R_{j'}$ hanno in comune, fuori delle fondamentali, $k'_{i'j'}$ curve razionali, due qualunque delle quali non hanno punti comuni; quindi il genere della curva $(R_{i'} R_{j'})$ è $-k'_{i'j'}+1$, epperò si ha:

$$\sum g(R_{i'} R_{j'}) = -\sum k'_{i'j'} + \binom{\tau'}{2}. \tag{8}$$

Infine tre superficie $R_{i'}, R_{j'}, R_{h'}$ non hanno punti comuni, fuori degli elementi fondamentali; quindi è:

$$\sum (R_{i'} R_{j'} R_{h'}) = 0.$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini della formula (7); così posto:

$$\varrho' = \sum \varrho'_{i'} + \sum k'_{i'j'} - \tau' + 1$$

si trova:

$$g.a.R = -\varrho'.$$

b) Se ogni curva $C'_{i'}$ passa con $j'_{i'l'}$ rami per ogni punto $P'_{l'}$, e se si indica con λ' la somma $\sum\limits_{i'l'} j'_{i'l'}$, come la formula (8), così si ottiene la seguente:

$$\sum g(RT_{l'}) = -\lambda' + \sigma'.$$

c) Due superficie $T_{l'}$ e $T_{k'}$ non si tagliano fuori delle curve fondamentali; mentre una superficie $R_{i'}$ e una superficie $T_{l'}$ s'incontrano in $j'_{i'l'}$ curve razionali due qualunque delle quali non s'incontrano, fuori dei punti P_l, e il grado di intersezione con se stessa di ciascuna di esse, considerata sulla superficie $R_{i'}$, è zero. Si ha pertanto:

$$\sum (RT_{l'} T_{l'}) = 0 \ , \ \sum (RT_{l'} T_{k'}) = 0 \ , \ \sum (T_{l'} T_{l'} T_{k'}) = 0.$$

d) Infine è da porre [1]:

$$g(T_{l'} T_{l'}) = 3 \ , \ g(T_{l'} T_{k'}) = 1$$

[1] Il valore 3, che deve essere attribuito al simbolo $g(AB)$, quando le due superficie A e B coincidono entrambe con la superficie $T_{l'}$, risulta dal confronto della formula che dà il genere aritmetico di una superficie, che sia somma di altre superficie *tutte* distinte fra loro, con quella che somministra il genere aritmetico della superficie stessa,

donde segue:

$$\sum_{l'} g(T_{l'} T_{l'}) = 3\sigma' \; , \; \sum g(T_{l'} T_{k'}) = \binom{\sigma'}{2} .$$

In tal modo sono noti i valori di tutti i termini del secondo membro della (6); quindi sostituendo, si trova:

$$\Pi = -\varrho' - 2\lambda' + 4\sigma'.$$

Dal confronto di questa formula con la (5′) si deduce:

« Se fra i punti di due spazi $\sum$ e $\sum'$ ha luogo una corrispondenza bi-
« razionale, i cui elementi fondamentali soddisfino alle condizioni imposte ad
« essi nel n. 2, fra gli elementi stessi ha luogo la relazione seguente:

$$4\sigma + 4\mu - \varrho - 2\lambda = 4\sigma' + 4\mu' - \varrho' - 2\lambda'$$

« dove σ è il numero dei punti e μ l'ordine della curva composta da tutte
« le curve, che insieme con quei punti costituiscono gli elementi fondamen-
« tali di $\sum$, λ il numero totale dei rami di queste curve che passano per
« quei punti ed infine ϱ è definito dalla formula (4). I simboli σ', μ', λ', ϱ'
« hanno i medesimi significati rispetto agli elementi fondamentali di $\sum'$ ».

Nel dimostrare questo teorema si è supposto che lo spazio $\sum$ non contenesse punti fondamentali semplici. Si toglie facilmente siffatta restrizione osservando: 1°) Un punto semplice, come tale, non può avere alcuna influenza sul valore dell'invariante Ω, e quindi nella formula data nel n. 2 con la quale si calcola l'invariante stesso, la somma $\sum$ non deve essere estesa ai punti fondamentali semplici, epperò il numero s di questi punti non è compreso in quello σ dei punti fondamentali multipli che figura nella formula (3). 2°) L'invariante Ω aumenta di una unità per ogni punto della superficie, che si trasforma in una curva eccezionale, epperò in luogo della formula (5) si ha l'altra:

$$\Omega = 10 - \mu' + s .$$

4. Come il teorema del Cremona, ricordato in principio, si estende alle superficie [1], così il teorema testè dimostrato si può estendere alle varietà

---

nell'ipotesi in cui *due* delle sue componenti coincidano fra loro, come dimostrerò in un'altra Nota non potendolo far qui, per ristrettezza di spazio.

In modo analogo si determina il valore 1 da attribuirsi al simbolo g(AB), quando le due superficie A e B coincidono rispettivamente con le superficie $T_{l'}$ e $T_{k'}$, le quali non s'intersecano fuori degli elementi fondamentali.

[1] Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche*, n. 7, Atti dell'Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXXI (1896).

a tre dimensioni. Su questa estensione, che è implicitamente contenuta in una mia precedente Nota [1], e su qualche altra relazione che oltre a quella qui stabilita, probabilmente esiste fra gli elementi fondamentali di una trasformazione birazionale, spero di poter ritornare in seguito.

Matematica. — *Sopra una proprietà dei polinomi sferici.* Nota del prof. Carlo Alberto Dell'Agnola, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Fra i polinomi di grado n della forma

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \tag{1}$$

Tchebychef ha determinato quello per il quale il massimo dei valori assoluti nell'intervallo $(-1\,,\,+1)$ è minimo: posto $x = \cos\varphi$, esso è dato dall'espressione

$$T_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \cos(n\varphi) \quad [2]. \tag{2}$$

È noto però che nelle pratiche applicazioni interessa il più sovente aver riguardo ai valori medî; quindi, in particolare, quel che occorre di rendere il più possibile prossimo a zero non è la deviazione locale, ma bensì il cosiddetto *valore efficace* (radice quadrata della media dei quadrati), vale a dire l'espressione

$$v_n = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P_n^2\, dx}\,. \tag{3}$$

La questione, implicitamente contenuta in un'altra più generale pure studiata da Tchebychef [3], si può risolvere con mezzi elementari, perchè, come si vede subito, si tratta di un ordinario problema di minimo, risguardando come variabili indipendenti i coefficienti del polinomio P_n che si vuol determinare. Ma è anche più semplice ed elegante risolvere indirettamente la questione, riattaccandola a classiche proprietà dei polinomi sferici. A ciò è dedicata la presente Nota, nella quale si mettono a confronto le deviazioni

[1] *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali*, Redic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XV (1906).

[2] Tchebychef, *Oeuvres*, t. I. pag. 299, St. Petersbourg, 1907. Il Liebmann, seguendo un procedimento elementare, arriva ad una dimostrazione molto semplice della stessa proprietà; H. Liebmann, *Vereinfachte Behandlung einiger Minimalprobleme von Tchebychef*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, XVIII, 1909, Heft 9/10, pp. 433-437.

[3] Tchebychef, *Oeuvres*, t. II, pp. 377-402.

locali e i valori efficaci che spettano rispettivamente ai polinomi P_n e T_n, dando un criterio numerico per apprezzare, al variare del grado n, i vantaggi degli uni in confronto degli altri, a seconda del punto di vista adottato. Ho potuto così mettere in luce un'importante proprietà dei polinomi di Tchebychef, vale a dire che sebbene essi non facciano discendere il valore efficace proprio al minimo, non lo superano per più del 15 %, il valore relativo dell'eccesso convergendo assintoticamente verso $\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1$ (13 % circa), al crescere indefinito di n. Invece per i polinomi P_n la massima deviazione locale pur decrescendo rapidamente al crescere di n, supera di molto il minimo di Tchebychef, il relativo rapporto essendo dell'ordine di $\sqrt{n}$.

1. Indichiamo con X_n il polinomio sferico di grado n: esso è dato dalla formola

$$X_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \frac{d^n}{dx^n} \{ (x^2 - 1)^n \} . \tag{4}$$

I polinomi sferici godono, come è noto, delle seguenti proprietà:

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0 , \quad (m \gtrless n), \tag{5}$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} . \tag{6}$$

Oltre a ciò, se Q è un polinomio qualunque di grado inferiore ad n, abbiamo dalla (5), oppure mediante integrazione per parti,

$$\int_{-1}^{+1} Q X_n \, dx = 0 . \tag{7}$$

I polinomi

$$P_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \cdot X_n \tag{8}$$

godono essi pure, come è chiaro, della proprietà (5) e quindi anche della (7).

Dalla (4) risulta tosto che P_n è della forma (1) ed è facile riconoscere che fra i polinomi di grado n di questa forma, è desso precisamente quello che rende minima l'espressione (3).

Indichiamo con f_n un polinomio *qualunque* della forma (1): basterà evidentemente dimostrare che

$$\int_{-1}^{+1} (f_n^2 - P_n^2) \, dx$$

è positivo o nullo. A tal uopo si osservi che f_n si può sempre considerare come una combinazione lineare dei polinomi P_n; possiamo porre cioè

$$f_n = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1} + P_n,$$

o, più brevemente,

$$f_n = Q_{n-1} + P_n, \tag{9}$$

ove $Q_{n-1} = c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_{n-1} P_{n-1}$ è un polinomio di grado $n-1$ al più. Dalla (9) abbiamo

$$f_n^2 - P_n^2 = Q_{n-1}^2 + 2 Q_{n-1} P_n$$

e quindi

$$\int_{-1}^{+1} (f_n^2 - P_n^2)\, dx = \int_{-1}^{+1} Q_{n-1}^2\, dx + 2 \int_{-1}^{+1} Q_{n-1} P_n\, dx .$$

Il primo integrale del secondo membro, ove non sia nullo, è essenzialmente positivo: mentre, per le suaccennate proprietà dei polinomi P_n,

$$\int_{-1}^{+1} Q_{n-1} P_n\, dx = 0 .$$

Dalle (6) e (8) segue immediatamente

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2\, dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{\{(2n)!\}^2 \cdot (2n+1)}$$

e si ha quindi, pel minimo cercato, l'espressione:

$$v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)! \cdot \sqrt{2n+1}} . \tag{10}$$

2. Il valore efficace w_n, relativo all'intervallo $(-1\,,+1)$, che compete al polinomio T_n di Tchebychef, è dato, per definizione, dalla

$$w_n^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} T_n^2\, dx ,$$

ovvero, avuto riguardo alla (2) e posto $x = \cos\varphi$, dalla

$$w_n^2 = \frac{1}{2^{2n-2}} \cdot \int_0^{\pi} \cos^2(n\varphi) \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi .$$

Un calcolo molto semplice conduce alla formola

$$w_n^2 = \frac{2n^2 - 1}{2^{2n-2} \cdot (4n^2 - 1)} .$$

Determiniamo l'espressione del rapporto $r_n = \frac{w_n}{v_n}$. Dalla precedente e dalla (10) si ha

$$r_n = 2\sqrt{\frac{2n^2-1}{2n-1}} \cdot \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}, \tag{11}$$

e, in particolare,

$$r_1 = 1 \ , \ r_2 = \frac{\sqrt{21}}{4} \ , \ r_3 = \frac{\sqrt{85}}{8}, \tag{12}$$

dalle quali risulta che

$$r_1 < r_2 < r_3 .$$

Si riconosce poi facilmente che $r_{n+1} < r_n$ per $n \geq 3$, e quindi che r_n decresce sempre al crescere indefinito di n a partire da r_3.

È noto d'altronde [1] che

$$\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi n} \cdot e^{\frac{4\vartheta - \vartheta'}{24n}}, \tag{13}$$

ove ϑ e ϑ' sono numeri positivi minori dell'unità: per cui la (11) si può mettere sotto la forma:

$$r_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2n^2-1}{2n^2-n}} \cdot e^{\frac{\vartheta' - 4\vartheta}{24n}} .$$

Questa ci dice che $\lim_{n=\infty} r_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ e quindi che

$$\lim_{n=\infty} \cdot \frac{w_n - v_n}{v_n} = \lim_{n=\infty} (r_n - 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1 .$$

Se dunque nel calcolo del valore efficace si sostituisce a P_n il polinomio di Tchebychef, l'errore relativo, $r_n - 1$, diminuisce sempre, a misura che n aumenta, a partire da $n = 3$, tendendo al limite $\frac{2}{\sqrt{\pi}} - 1$. Da ciò e dalle (12) si può concludere che detto errore non può mai superare $\frac{\sqrt{85}}{8} - 1$, (15 % circa).

3. Indichiamo con d_n la deviazione locale di P_n e con t_n quella di T_n, nell'intervallo $(-1 \ , +1)$. Dalle (2) e (8), tenendo presente che il massimo di X_n nell'intervallo $(-1 \ , +1)$ è l'unità, si ha:

$$t_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ , \ d_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}, \tag{14}$$

[1] E. Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 480.

entrambe infinitesime al crescere indefinito di n. Notiamo subito che $d_1 = t_1$, e che per $n > 1$, $d_n > t_n$.

Per confrontare le due deviazioni consideriamo il loro rapporto $\varrho_n = \frac{d_n}{t_n}$. Dalla (14) abbiamo

$$\varrho_n = \frac{1}{2} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} .$$

Da questa e dalla (13) si vede che il valore assintotico di ϱ_n è

$$\varrho_n = \sqrt{\frac{\pi n}{4}} \cdot e^{\frac{4\vartheta - \vartheta'}{24n}} ,$$

e quindi che il rapporto ϱ_n cresce indefinitamente con n ed è dell'ordine di $\sqrt{n}$.

Fisica terrestre. — *Le anomalie costiere di gravità e la teoria elastica dell'isostasi.* Nota di Luigi De Marchi, presentata dal Socio Levi-Civita.

È noto che la distribuzione della gravità ridotta al mare, mentre manifesta una generale compensazione fra le attrazioni delle masse superficiali e quelle delle masse profonde ad esse sottostanti, rivela tuttavia, fra altre irregolarità, una anomalia costante lungo le coste dei mari profondi (¹). Procedendo dall'interno del continente verso la costa la gravità cresce, raggiunge un massimo non lungi dalla costa, diminuisce rapidamente fino a un minimo, situato in mare non molto lontano dalla terra, per risalire poi lentamente verso l'alto mare fino a raggiungere al largo sull'oceano il suo valore normale.

Recentemente il prof. Helmert prese a fondamento questo fatto per un calcolo approssimato della *profondità di compensazione* (²), cioè della profondità di una superficie sferica che sarebbe premuta uniformemente dal peso della costa sovraincombente, secondo la teoria di Pratt, e trovò un valore che corrisponde assai esattamente a quello che Tittmann ed Hayford avevano dedotto, per via affatto diversa, dalle deviazioni del filo a piombo

(¹) Un'esposizione chiara dei problemi che ad essi si collegano è data dall'ingegnere O. Zanotti Bianco, *La gravità alla superficie del mare e l'ipotesi di Pratt secondo alcuni lavori recenti*, fasc. I-II, gennaio-febbraio 1910, della Rivista geografica italiana.

(²) Helmert F. R., *Die Tiefe der Ausgleichfläche bei der Prattschen Hypothese für das Gleichgewicht der Erdkruste und der Verlauf der Schwerestörung vom Innern der Kontinente und Ozeane nach den Küsten*, Sitzungsberichte Akad. Berlin, 25 nov. 1909.

negli Stati Uniti del Nord. Questo notevole risultato è giustamente considerato come un nuovo argomento in favore della teoria isostatica.

D'altro lato l'ipotesi colla quale Pratt giustifica l'isostasi, ammettendo che tutti i movimenti che determinarono le irregolarità della superficie terrestre si sarebbero compiuti secondo la verticale, senza spostamenti laterali, è in aperta contradizione coi dati della Geologia che, specialmente nella teoria ora dominante delle *nappes de recouvrement*, constaterebbe l'esistenza di immensi scorrimenti orizzontali.

Avendo recentemente (¹) tentato di spiegare le dislocazioni tectoniche con spostamenti elastici e avendo in tale occasione dimostrato che tali spostamenti possono dar ragione dell'isostasi (²), mi parve interessante ricercare se anche le anomalie costiere possano riannodarsi alla stessa teoria. È un tentativo puramente teorico, che non ammette valutazioni quantitative, ma che pur non mi sembra privo di interesse, in quanto dimostra la *possibilità* di conciliare i fatti scoperti dai geodeti con quelli scoperti dai geologi. Credo opportuno ripetere qui che a risultati non essenzialmente diversi si arriverebbe nell'ipotesi di lentissimi moti vischiosi, che sembrano meglio rispondenti alla costituzione reale del nostro globo.

Considero ancora il caso di un suolo elastico piano, che viene deformato per il trasporto di masse materiali da una zona ad un'altra, che supporremo rettilinee e parallele. Assumiamo il piano come piano xy, essendo l'asse delle z verticale e diretto verso il basso, cioè nell'interno della massa, e l'asse delle y nella direzione delle due zone.

Sia Θ la dilatazione elastica determinata dalla deformazione in un punto qualunque della massa, di coordinate $\xi\,\eta\,\zeta$. Indicando con ϱ la densità, la variazione di massa in quel punto è $-\varrho\Theta$, e il potenziale che essa induce in un punto fisso O, di coordinate $x\,y\,z$ è $-\frac{\varrho\Theta}{r}$, ove r è la distanza dei due punti. Considerando la massa come omogenea, il potenziale totale indotto nel punto O da tutte le variazioni di densità che si verificano nella massa è

$$V = -\varrho \int \frac{\Theta dS}{r}$$

e la componente verticale dell'anomalia gravimetrica sarà (f costante di attrazione)

$$\Delta_1 g = f\frac{\partial V}{\partial z} = f\varrho \int \Theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dS\,. \tag{1}$$

(¹) De Marchi, *Teoria elastica delle dislocazioni terrestri*, in Rend. Accad. Lincei, Roma, 1907, vol. XVI, serie 5ª, pp. 384 e seg.

(²) Id., *La teoria elastica dell'isostasi terrestre*, id., pp. 970 e seg.

Indicando con u, v, w le componenti dello spostamento elastico, si può scrivere, secondo le formole generali dell'elasticità [1], pel caso dell'assenza di forze di massa

$$(2)\qquad 4\pi B w = W + \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

ove B è la seconda costante di isotropia, e

$$(3)\qquad \Phi = (A - B)\int \frac{\Theta dS}{r} + B\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{ds}{r},$$

$$(4)\qquad W = \int \frac{N ds}{r} + B\int\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{d\xi} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)\frac{d\zeta}{dn}ds + B\int w\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds;$$

essendo A l'altra costante di isotropia, N la componente secondo l'asse delle z della forza superficiale deformante, ed essendo il primo integrale della (3) esteso a tutto il volume e tutti gli altri a tutta la superficie del corpo, la cui normale positiva n si intende diretta verso l'interno della massa.

Dalla prima delle (3) e dalla (1) si ricava

$$(A - B)\frac{1}{\varrho f}\Delta_1 g = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - B\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}ds,$$

e per la (2),

$$(A - B)\frac{1}{\varrho f}\Delta_1 g = W - 4\pi B w - B\int\left(u\frac{d\xi}{dn} + v\frac{d\eta}{dn} + w\frac{d\zeta}{dn}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}ds.$$

Nel caso nostro è u funzione della sola ξ, $v = 0$ e inoltre

$$\frac{d\xi}{dn} = 0 \quad \frac{d\zeta}{dn} = 1 \quad \frac{\partial}{\partial\zeta} = \frac{d}{dn}$$

e quindi

$$(5)\qquad (A - B)\frac{1}{\varrho f}\Delta_1 g = \int\frac{N ds}{r} - 4\pi B w + B\int u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds + B\int w\frac{d\frac{1}{r}}{dn}ds.$$

Le formole (2-4) sono valide per tutti i punti $x\,y\,z$ interni alla massa; volendo quindi il valore di Δg in un punto vicino quanto si vuole alla superficie dovremo far tendere a zero la z dai valori positivi. Osserviamo che l'ultimo termine della (5) è un potenziale di doppio strato che per

[1] Cesàro E. *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Torino, 1894, pag. 105.

$z=0$ è identicamente nullo, mentre al passaggio dai valori positivi della z ai valori superficiali presenta un salto di $-2\pi w$. Per valori positivi, ma piccoli quanto si vuole, di z esso ha quindi il valore $2\pi w$. Indicando, come nella seconda delle Memorie citate, il primo integrale con ψ, ricordiamo [1] che

$$w = \frac{A}{4\pi B(A-B)}\psi - \frac{z}{4\pi B}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

e quindi per z piccola quanto si vuole

$$\psi = \frac{4\pi B(A-B)}{A} w. \tag{6}$$

Sostituendo questi valori nella (5) abbiamo finalmente

$$(A-B)\frac{1}{\varrho f}\Delta g = 2\pi\frac{B}{A}(A-2B)\,w + B\int u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}ds. \tag{7}$$

Nell'ultimo integrale u è funzione della sola ξ; ponendo quindi $ds = d\xi\, d\eta$ esso sarà

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta.$$

Ma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta = (x-\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{r^3}.$$

Ponendo

$$z^2 + (x-\xi)^2 = q^2$$

si può scrivere

$$\frac{1}{r^3} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{q^2 r}\right)$$

epperò, essendo r sempre positivo,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\eta = \left[\frac{1}{q^2}\frac{\eta-y}{|\eta-y|}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{q^2}{(\eta-y)^2}}}\right]_{\eta=-\infty}^{\eta=\infty}(x-\xi) = \frac{2}{q^2}(x-\xi).$$

L'ultimo termine della (7) equivale quindi a

$$\lim_{z=0}\left[2B\int_{-\infty}^{\infty} u\frac{x-\xi}{q^2}d\xi\right].$$

[1] *Teoria elastica* ecc., formola (3).

Dalla prima delle mie due Memorie citate (¹) appare che nel caso che le forze superficiali deformatrici siano limitate a due strisce parallele di larghezza piccolissima, lo spostamento orizzontale u è diverso da zero, e costante, nella zona compresa fra le due striscie, mentre è nulla al di là di queste. Quest' ultima condizione è, per il principio della sovrapposizione dei piccoli movimenti, verificata anche nel caso di una distribuzione continua di forze deformatrici N entro una zona limitata, colla sola condizione che esse siano tutte posirive da un lato e tutte negative dall'altro lato dell'asse delle y, assumendo come tale la retta ove $N = 0$. Questo caso risponde alle condizioni di una zona costiera, alleggerita in terra dalla degradazione e aggravata in mare dall'accumulazione (²).

Anche in tal caso si ha in superficie uno spostamento orizzontale dalla zona alleggerita alla zona premuta, mentre oltre i limiti di esse la u è nulla. L' integrale precedente deve quindi limitarsi ai valori della ξ compresi entro queste due zone, e la u in questo intervallo è variabile, ma ha sempre lo stesso segno. Prendendo come direzione positiva delle ξ quella che va dalla zona alleggerita verso la premuta (dal continente verso il mare) la u entro la zona risulta sempre positiva. Indicando allora con u_m un valore medio di u opportunamente scelto e notando che

$$\frac{x - \xi}{q^2} = \frac{\partial \log \frac{1}{q}}{\partial \xi}$$

l' integrale precedente si potrà scrivere, per il teorema della media

$$u_m \lim_{x=0} \int_{-a}^{+b} \frac{\partial \log \frac{1}{q}}{\partial \xi} d\xi,$$

ove $-a$ è il limite esterno della zona alleggerita e $+b$ quello della zona compressa.

Siano $q_1\, q_2$ le distanze del punto O, che supponiamo sulla superficie, rispettivamente dal limite $-a$ (in terra) e $+b$ (in mare). La (7) allora diventa

$$\Delta_1 g = 2\pi\varrho f \frac{B}{A}\frac{A - 2B}{A - B} w + \frac{2B}{A - B} \varrho f u_m \log \frac{q_1}{q_2}, \tag{8}$$

la quale ci esprime l'anomalia di gravità indotta in ogni punto della superficie dalle variazioni di densità che si verificano nella massa. Essa è valida

(¹) *Teoria* ecc., pag. 293.

(²) De Marchi, *Applicazioni geologiche della teoria elastica* ecc. Rendiconti Accad. Lincei, 7 aprile 1907, pag. 499.

per tutti i punti entro e fuori la zona di sollecitazione, esclusi due segmenti infinitesimi che ne abbracciano gli estremi.

In essa non è tenuto conto dell'anomalia proveniente dalle variazioni del campo occupato dalle masse. Queste variazioni dànno luogo ad una crosta superficiale di spessore variabile w, sopra e sotto il piano iniziale, e che determina un campo di attrazione positiva dove w è negativa, e viceversa. Inoltre, dove w è positiva, dobbiamo aggiungere il campo determinato dallo strato d'acqua di spessore variabile h.

Indicando con c la parte di superficie dove $w < 0$ (continente), con σ quella dove $w > 0$ (oceano), il potenziale di queste variazioni è

$$V = \varrho \int_c \frac{w_2 dc}{r} - \varrho \int_\sigma \frac{w_1 d\sigma}{r} + \int_\sigma \frac{h d\sigma}{r} = V_1 - V_2 + V_3,$$

ponendo 1 la densità dell'acqua. La profondità del mare h è la somma dello spostamento positivo w_1 nel punto considerato e dello spostamento negativo w_2 rispondente alla linea di costa. L'anomalia completa è

$$\Delta g = \Delta_1 g + f \frac{\partial V}{\partial z} = W + U$$

ove

$$W = 2\pi\varrho f \frac{B}{A} \frac{A - 2B}{A - B} w + f \frac{\partial V}{\partial z}$$

dipende solo dagli spostamenti verticali su tutta la superficie, mentre U, che è l'ultimo termine della (8), dipende solo dagli spostamenti orizzontali nella zona sollecitata. Se il punto O é molto interno nel continente i termini dipendenti da V_2 e V_3 sono trascurabili e il termine dipendente da V_1 assume il valore (essendo g l'accelerazione di gravità, R il raggio terrestre, ϱ_0 la densità media della terra)

$$\frac{3}{2} g \frac{w}{R} \frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{3}{2}\left(f \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_0 \frac{1}{R^2}\right) \frac{w_2}{R} \frac{\varrho}{\varrho_0} = 2\pi f w_2 \varrho ,$$

ove w_2, valore assoluto di w, è il sollevamento continentale. Ivi sarà quindi

$$W_c = 2\pi f \varrho \left\{ 1 - \frac{B}{A} \frac{A - 2B}{A - B} \right\} w_2 .$$

Per valori normali delle costanti di elasticità questo valore è positivo.

Ponendo infatti il coefficiente di Poisson $\mu = \frac{1}{3}$ è $A = 4B$ e

$$W_c = \tfrac{5}{3} \pi f \varrho w_2 ,$$

che esprime l'anomalia continentale per le regioni abbastanza lontane dalla zona di sollecitazione, perchè si possa ammettere $U = 0$.

Analogamente in alto mare è trascurabile il termine dipendente da V_1 e quelli dipendenti da $V_2 V_3$ diventano

$$-2\pi f \varrho w_1 + 2\pi f h$$

e

$$W_\sigma = 2\pi f \varrho \left\{ \frac{B}{A} \frac{A-2B}{A-B} - 1 \right\} w_1 + 2\pi f h ,$$

dove il primo termine è negativo. Assumendo come gravità normale la gravità nell' interno del continente al livello del mare, e ponendo che anche in alto mare sia $U = 0$ l'anomalia in alto mare è

$$\Delta_m g = W_\sigma - W_c = 2\pi f \left\{ \frac{B}{A} \frac{A-2B}{A-B} \varrho - (\varrho - 1) \right\} h .$$

Per $\varrho = 2{,}8$ e $\mu = \frac{1}{3}$ essa è negativa ed eguale a $-2{,}6\pi f h$. In unità assolute (cm., gr., sec.) è $f = 6{,}67.10^{-8}$: per $h = 4000$ m. è quindi $\Delta g = -0{,}2$: siamo quindi nell'ordine di grandezza delle anomalie realmente osservate.

Nel passaggio dal continente all'oceano attraverso la zona costiera, subaerea e subacquea, la Δg deve diminuire regolarmente, se la h cresce in modo continuo. Ma a questa variazione dovuta esclusivamente ai moti verticali si aggiunge quella dovuta agli spostamenti orizzontali, rappresentata dall' ultimo termine della (8). Questo termine è nullo sull'asse mediano della zona di sollecitazione, ove $q_1 = q_2$, e si mantiene piccolo in un intorno abbastanza ampio attorno a quest'asse neutro; ma, quando ci avviciniamo ai due limiti della zona di perturbazione, può assumere valori assai rilevanti, tendendo teoricamente all' infinito nei limiti stessi.

L'anomalia che esso determina è negativa sul continente ($q_1 < q_2$) positiva in mare ($q_1 > g_2$) e a sufficiente prossimità dei confini essa prevarrà sull'anomalia indotta dagli spostamenti verticali, determinando un minimo in una zona parallela a quella di massimo sollevamento, un massimo in una zona parallela a quella di massimo sprofondamento. Il primo fatto può dar ragione delle zone di anomalia negativa che seguono le catene montuose; il secondo può forse dar ragione delle eccezionali anomalie positive delle isole d'alto oceano.

Il meccanismo generatore di queste anomalie dovute agli scorrimenti orizzontali è di facile comprensione. Sul limite continentale della zona di sollecitazione si inizia lo scorrimento verso il mare, senza afflusso compensatore dalla terra, e quindi vi è dilatazione; sul limite oceanico si arresta tale scorrimento, e quindi vi è condensazione. Già Helmert attribuì a scorrimenti orizzontali le anomalie che non si accordano coll' ipotesi di Pratt.

Queste due forti anomalie, negativa in terra e positiva in mare, sovrapponendosi alla regolare diminuzione che si stabilirebbe dalla terra al mare, per semplice effetto degli spostamenti verticali, e delle variazioni del campo che ne conseguono, vengono inoltre a determinare un massimo secondario sulla terra in vicinanza del mare, e un minimo secondario in mare presso la terra. Potrebbe così giustificarsi anche l'anomalia costiera, che mi diede impulso a questa ricerca.

Fisica. — *Sulla origine di alcune gravi anomalie recentemente osservate nello studio del fenomeno Zeeman.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Uno dei più importanti risultati ottenuti di recente nello studio del fenomeno di Zeeman, riguarda la disuguaglianza notevole fra la distanza delle componenti esterne del *triplet* osservato nel senso normale alle linee di forza e quella tra le componenti del *doublet* visibile nel senso del campo. Questa disuguaglianza, osservata dal Tenani (1) e poi ritrovata indipendentemente dal Nagaoka (2), è inconciliabile con la interpretazione cinematica del fenomeno Zeeman (3) e con la teoria elementare di Lorentz; ma non è nemmeno d'accordo con la teoria di Voigt, che la prevede solo in misura estremamente più piccola e accompagnata da una dissimetria del *triplet*; mentre secondo il Tenani esisterebbe la disuguaglianza sopra indicata, ma non la dissimetria del *triplet* che ne dovrebbe esser la causa.

Di fronte a un simile risultato si sarebbe indotti a ritenere quasi *a priori* che possa averlo determinato qualche causa disturbatrice. Una di queste si presenta spontanea alla mente, e venne già esaminata dal Tenani per consiglio del Cotton. Sembra cioè ben naturale il pensare che ricorrendo, come egli ha fatto, a masse polari di cui una provvista di un foro per l'osservazione longitudinale, le luci osservate provengano da parti della sorgente luminosa situate in regioni del campo ove questo abbia intensità sensibilmente diverse. Contro questa spiegazione si possono contrapporre due considerazioni:

1. Pare anzitutto poco probabile che nel breve spazio occupato dalla scintilla o dalla parte capillare del tubo Geissler il campo presenti varia-

(1) Rend. Lincei, 18, pag. 677, 1909; 19, pag. 198, 1910.

(2) Nature, agosto 1909, pag. 188.

(3) Tutte le altre anomalie e dissimmetrie di posizione e d'intensità finora constatate (v. anche Dufour, Journ. de Phys., aprile 1910) rispettano ancora la corrispondenza tra il fenomeno Zeeman longitudinale e quello trasversale, qual'è espressa dalla legge di Cornu, che cioè i due fenomeni sarebbero le apparenze diverse secondo le quali le *medesime* vibrazioni circolari o rettilinee, orientate in modo fisso nello spazio, sono viste nelle diverse direzioni.

zioni d'intensità che dovrebbero essere rispettivamente del 10 e del 2 per cento per spiegare i risultati del Tenani.

2. A conferma di ciò, le componenti del *doublet* e del *triplet* (la disposizione ottica è tale che a ciascun punto della sorgente corrisponde un punto e uno solo della immagine spettrale) sono a una distanza costante nella intera loro lunghezza.

Per elucidare questi due punti ho eseguito alcune esperienze, che mi sembra permettano di concludere nel senso di attribuire alla non uniformità del campo le anomalie osservate.

Sulla effettiva distribuzione puntiforme dei valori del campo tra le masse polari di un elettromagnete noi sappiamo quasi nulla, poichè tutti i metodi noti consentono solo la determinazione di un valore medio in una superficie di non piccolissima estensione. Un metodo molto ingegnoso, dovuto allo stesso Zeeman, e fondato sull'aspetto fusiforme dell'area abbracciata dalle componenti esterne del *triplet*, non è di impiego facile, e si presta solo per variazioni molto grandi in una piccola regione del campo.

Un modo assai più comodo è invece il seguente, che oltre l'impiego già fattone per la questione che ci occupa, mi ha permesso lo studio generale del campo in tutto l'interferro dell'elettromagnete, con risultati che saranno esposti in una prossima Comunicazione.

Una vaschetta di vetro, di dimensioni e forma convenienti, è disposta tra i poli dell'elettromagnete e contiene del vecchio ferro Bravais, dotato, come è noto, di una energica doppia rifrazione magnetica negativa, qualora si abbia cura di utilizzare le porzioni superficiali della bottiglia dopo lungo riposo. Con uno spessore di liquido di pochi millimetri, e un campo di 20 mila unità, si possono ottenere parecchie decine di lunghezze d'onda come differenza di cammino tra le vibrazioni parallele e le normali al campo.

La vaschetta è disposta tra nicol incrociati a 45° dalla direzione del campo; con un fascio di luce solare se ne illumina una porzione circolare di un paio di millimetri di diametro [1].

Eccitando il campo la luce ricompare, con una tinta simile a quella che dà il liquido per trasparenza, ma che in realtà è priva delle luci di alcune lunghezze d'onda, quelle per cui la birifrangenza è un multiplo intero della lunghezza d'onda medesima.

Osservando con uno spettroscopio, se il campo fosse uniforme, si avrebbe quindi una larga porzione di spettro (parte di questo è assorbita dal liquido sotto un certo spessore) solcata dalle frange di Fizeau e Foucault. Invece colle masse polari ordinarie lo spettro apparisce continuo. Ciò è dovuto al

[1] Conviene, per quanto non sia necessario, proiettare sulla vaschetta con una lente a lungo fuoco, l'immagine reale e impiccolita di un diaframma circolare; ciò solo quando occorra aumentare la quantità di luce solare utile.

fatto che nei diversi posti della vaschetta traversati dal fascio luminoso, la birifrangenza è diversa, perchè vi è diversa l'intensità del campo. Ma se con una lente si proietta una immagine reale della vaschetta sulla fenditura dello spettroscopio, le frangie appariscono tosto ben nette; esse non son più rettilinee e non seguono le linee di Fraunhofer. La loro forma e la posizione sullo spettro cambiano notevolmente esplorando con la fenditura (come nei metodi spettroeliografici) il disco luminoso che è immagine della porzione illuminata della vaschetta. E poichè la birifrangenza è proporzionale al quadrato dell'intensità del campo, e inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda, la forma di ciascuna frangia riferita a una linea di Fraunhofer disegna (in uno spettro normale e a meno di una parte costante) la grafica

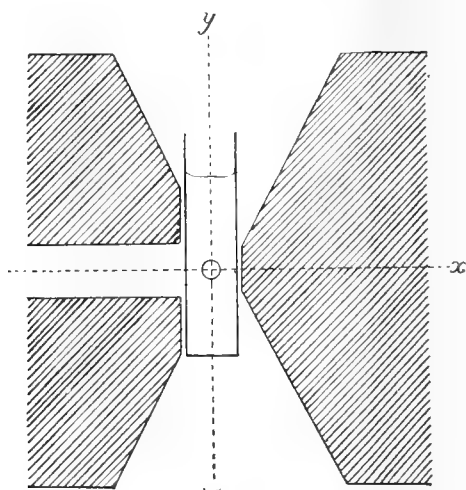
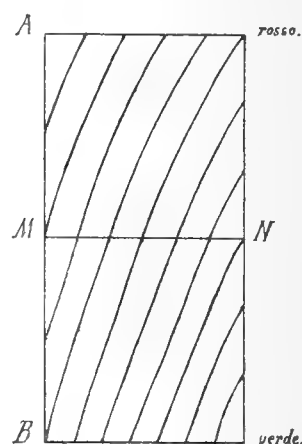



Fig. 1 Fig 2

che darebbe l'intensità del campo pei varî punti della regione illuminata della vaschetta, corrispondenti ai diversi punti della fenditura.

Servendosi di uno spettroscopio a visione diretta, girevole intorno al suo asse, si può esplorare l'andamento del campo lungo i varî punti di un diametro qualunque del disco immagine e in particolare dei diametri verticale e orizzontale. In queste condizioni l'esame della distribuzione del campo diviene particolarmente semplice e istruttivo. Così ricorrendo alle due masse polari della forma normale di Weiss, l'una piena e l'altra forata, come nelle esperienze del Tenani (fig. 1), e disponendo la fenditura parallelamente al diametro verticale y del cerchietto luminoso, le frange presentano un aspetto leggerissimamente curvo; esse si fanno sempre più diritte esplorando le corde parallele a y più lontane dal polo massiccio A.

Ciò dimostra che il campo ha sensibilmente la stessa intensità, lungo l'asse y, specialmente ad una certa distanza dal polo. Le variazioni non superano il 2 per cento. Ma disponendo la fenditura orizzontalmente, in modo da esplorare il diametro x del cerchietto, lo spettro appare solcato da frange aventi l'aspetto notevole della figura 2. Esse sono leggermente curve e for-

temente inclinate rispetto alla direzione orizzontale della fenditura. Cosicchè ogni linea di Fraunhofer, come MN, viene tagliata da diverse frange in parecchi punti. Per esempio, in una esperienza in cui le facce polari erano circa a sette millimetri di distanza, e la larghezza MN dello spettro corrispondeva a una porzione centrale di soli due millimetri della vaschetta, nel punto M la birifrangenza corrispondeva a 10 lunghezze d'onda, ed essa diveniva di 16 lunghezze d'onda in N: cioè la linea MN era tagliata sette volte dalle frange. Ciò prova che *basta spostarsi appena di due millimetri nel senso dell'asse x perchè il campo* (proporzionale alla radice quadrata della birifrangenza) *varii gradatamente da 1 a 1,27, subisca cioè un'alterazione del 27 per cento.* Il campo è più intenso, com'è naturale, all'estremo del diametro x più prossimo al polo A [1].

Variazioni incomparabilmente più tenui (ma sempre rivelabili per la squisitezza del metodo) si osservano, come abbiamo detto, nel senso normale al campo, cioè lungo l'asse y.

Or la scintilla o il tubo Geissler si dispongono ordinariamente in direzione normale al campo. Questo spiega perchè il Tenani abbia trovato una distanza quasi costante tra le componenti del *triplet* o del *doublet* nell'intera lunghezza. Ma si riconosce egualmente che le porzioni utilizzate della sorgente, per quanto molto limitata, potevano ben trovarsi nella visione longitudinale e nella trasversale in regioni diverse del campo, che varia del 27 per cento nel senso orizzontale per uno spostamento di soli 2 mm.; specialmente se si tien conto, nel caso della scintilla, del soffiamento che questa subisce, e se si osserva che l'anomalia ottenuta coi tubi Geissler è di entità alquanto minore (circa il 10 % con scintilla tra poli di magnesio, il 5 % con scintilla tra poli di cadmio, il 2 % col tubo Geissler largo mm. 1,8 e pieno di vapori di mercurio).

Ripetendo l'esperienza in condizioni analoghe ma con le masse polari Weiss non forate e limitate da facce piane di circa 5 mm. di diametro cambia moltissimo la forma delle frange; la variazione del campo entro una regione centrale di 2 mm. di diametro si riduce, tanto verticalmente che orizzontalmente a circa l'uno e mezzo per cento; e può diventare del 7 % (nel senso orizzontale) usando tutte e due le masse forate e scostandosi pochissimo dalla regione centrale. La maggior variazione misurata nelle circostanze della fig. 1 usate dal Tenani, si deve attribuire perciò alla dissimetria delle masse polari.

[1] La birifrangenza osservata nei varî punti della vaschetta, poichè questa ha uno spessore di circa mezzo centimetro, dà in verità un effetto integrale lungo il raggio luminoso che la traversa; ma poichè l'andamento delle linee di forza ha un asse di simmetria nell'asse x, e le variazioni del campo son piccole nel senso di y, saranno pure piccole nel senso del raggio luminoso. Non occorreva perciò, in questo caso, dare uno spessore piccolissimo alla vaschetta.

Debbo però riconoscere che una così rilevante variazione del campo in regioni tanto vicine, fu anche per me alquanto inaspettata; e che perciò io non intendo far colpa al sig. Tenani di averla ritenuta improbabile dopo aver accertato che essa era piccola in senso verticale.

Concludendo, il fenomeno paradossale annunciato dal Tenani e dal Nagaoka va tenuto sotto riserva; la sua esistenza sarà dimostrata solo quando esso si ritrovi in un campo veramente uniforme, riconosciuto tale con un procedimento sensibile e sicuro, come quello da me adottato (1).

Fisica. — *Birifrangenza accidentale del ferro dializzato e sua applicazione allo studio dell'efflusso di un liquido in seno allo stesso liquido.* Nota di L. Tieri, presentata dal Socio Pietro Blaserna.

1. Nel corso di una mia ricerca sulla rapidità con cui si manifesta il fenomeno Majorana (2), ho avuto occasione di notare che alcuni campioni di vecchio ferro dializzato, presentano una enorme birifrangenza accidentale. Effettivamente questo comportamento del ferro allo stato colloidale fu notato da G. Quincke sin dal 1902 (3); non mi sembra però privo di interesse far conoscere alcuni miei studî fondati su questo fenomeno.

Fra le numerose soluzioni di ferro colloidale da me possedute e vecchie dai 10 ai 28 anni, quella che presenta la massima birifrangenza accidentale, fu preparata circa 10 anni fa dalla farmacia Candioli di Roma. Il liquido ha l'aspetto sciropposo ed è abbastanza trasparente per poter essere studiato anche sotto lo spessore di 1 cm. La birifrangenza accidentale di esso è sorprendente: posto in una vaschetta di pochi millimetri di spessore, basta il lievissimo tremolìo prodotto camminando nella stanza da lavoro, perchè acquisti una apprezzabile birifrangenza.

(1) Illuminando tra nicol incrociati l'intera vaschetta avente la forma dell'interferro, anche dove questo si allarga, e ricorrendo a luce monocromatica di sufficiente intensità si può fare a meno dello spettroscopio e osservare la vaschetta direttamente con un cannocchiale.

Si accerta allora che l'immagine è solcata da molte frange nere, le quali disegnano in tutta l'estensione del campo le *linee isodinamiche* d'intensità proporzionale alla radice quadrata del rispettivo numero d'ordine. L'esperienza è di bellissimo effetto, potendosi avere nel campo di visione fino a 15 e più frange molto fitte e nettissime e permette di confermare ed estendere i risultati ottenuti con altro metodo. Communicherò prossimamente le fotografie eseguite, che permettono di riconoscere a prima vista il modo di ripartizione del campo con forme diverse di masse polari.

(2) Rend. Acc. dei Lincei, serie V, vol. XIX, 1° sem. 1910, pag. 377.

(3) Ann. der Physik, t. 9, 1902, pag. 969.

Ho determinato i valori di questa in funzione delle velocità con cui scorre il liquido in una vaschetta di vetro a sezione rettangolare di mm² 2×10 disposta verticalmente e sufficientemente lunga perchè nella parte centrale di essa il liquido non fosse soggetto a perturbazioni.

Un fascio di luce proveniente da una lampada ad arco, attraversava successivamente un nicol con la sezione principale a 45° rispetto all'asse della vaschetta, la parte centrale di questa secondo lo spessore minore, un

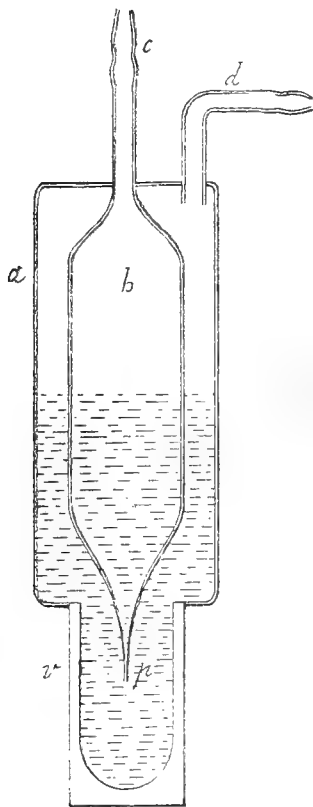



Fig. 1

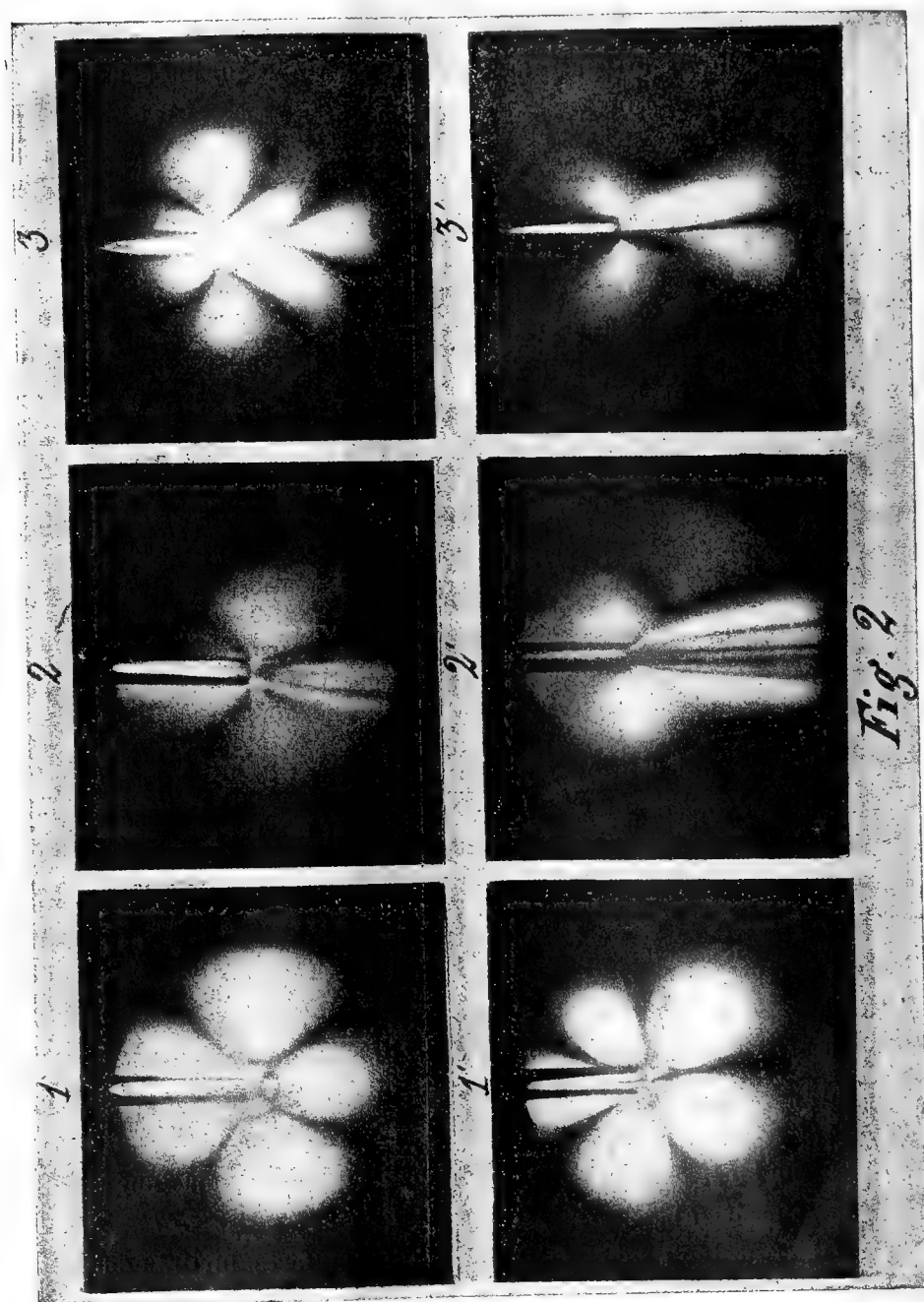
compensatore di Babinet, il secondo nicol incrociato col primo. Per mezzo di una lente venivano proiettate le frange su uno schermo. Mi limiterò a dire che, facendo scorrere il liquido nella vaschetta con la velocità di appena 40 cm. al secondo, le frange si spostavano all'incirca di una lunghezza d'onda (birifrangenza positiva).

2. Era naturale il pensare che liquidi a sì forte birifrangenza accidentale dovessero prestarsi allo studio dell'efflusso e dell'afflusso del liquido attraverso a un tubo capillare immerso in seno allo stesso liquido.

Ponendo una vaschetta di vetro contenente ferro dializzato fra nicol incrociati a 45°, e producendo nell'interno della massa liquida in essa contenuto l'efflusso o l'afflusso dello stesso liquido mediante una pipetta, si osservano dei bellissimi fenomeni di birifrangenza. Le figure variano col variare della

pressione che obbliga il liquido a passare attraverso all'orifizio della pipetta: non mutano però mantenendo costante la pressione.

Per riprodurre fotograficamente alcune di queste figure, mi servii dello apparecchio riprodotto nella fig. 1. Un recipiente di vetro *a* era in comuni-

cazione con una vaschetta rettangolare di vetro larga cm. 3 e dello spessore di cm. 0,5. Nell'interno del recipiente *a* vi era un secondo recipiente *b* che terminava nel centro della vaschetta con un tubicino *p* di un millimetro di diametro. Il ferro dializzato riempiva a metà i due recipienti *a* e *b*, le capacità dei quali furono determinate in modo che una pressione costante

di 70 mm. esercitata nel recipiente esterno attraverso il tubo d, o nel recipiente interno attraverso il tubo c, prolungasse l'afflusso o l'efflusso del liquido attraverso il tubicino p per 80″ circa.

L'apparecchio descritto veniva disposto verticalmente fra due nicol. Un fascio di luce attraversava successivamente il primo nicol, la vaschetta nel senso dello spessore ed in modo che l'estremo del tubicino p cadesse sensibilmente nel centro del fascio luminoso, ed il secondo nicol. Disposti inizialmente i nicol paralleli, una macchina fotografica veniva collocata in modo da avere sulla lastra l'immagine netta del tubicino p.

Nella figura 2 sono riprodotte le fotografie ottenute nelle seguenti condizioni:

NICOL INCROCIATI: A) *Le sezioni principali a 45° rispetto alla direzione dell'efflusso.* — Si ebbero le fotografie 1, 2 e 3; di cui la 1 si riferisce all'entrata del liquido in b attraverso il tubicino p sotto la pressione di 70 mm.; le altre due all'uscita del liquido dal tubicino p; la 2 sotto la pressione di 70 mm., la 3 sotto la pressione di 5 mm.

B) *Una delle sezioni principali parallela alla direzione dell'efflusso.* — Si ottennero le fotografie 1′, 2′ e 3′; la 1′ per l'entrata del liquido in b attraverso il tubicino p, sotto la pressione di 70 mm., la 2′ e la 3′ per l'efflusso rispettivamente sotto le pressioni di 70 mm. e 5 mm.

Mi propongo di proseguire queste ricerche basate sulla enorme birifrangenza accidentale di alcuni campioni di ferro dializzato, nella speranza di dedurne conseguenze utili agli studî teorici di idrodinamica.

Chimica. — *Sulla picrotossina* (¹). Nota di F. ANGELICO, presentata dal Corrispondente ANGELO ANGELI.

In una Nota precedente (²) studiando l'azione dell'acido iodidrico e del fosforo rosso sull'acido α picrotinico $C_{15}H_{18}O_8$, da me descritto tre anni or sono, ho fatto rilevare che esso perde quattro atomi di ossigeno dando origine ad un altro acido della formula $C_{15}H_{18}O_4$, identico a quello ottenuto, molti anni addietro, da Oglialoro e Forte (³) sottoponendo allo stesso trattamento la picrotina.

Quest'acido chiamato dai suddetti autori picrotinico, non è l'unico prodotto che si forma dalla picrotina nella reazione, giacchè come dissi nella Nota precedente, si ottengono diverse sostanze la cui separazione è difficile,

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica della R. Università di Palermo.

(²) Gazzetta chimica, v. 40, anno 1910, parte 1ª.

(³) Gazzetta chimica, v. 21, anno 1891, p. 214, parte 2ª.

ma tra queste, oltre all'acido suddetto ho potuto isolare ed analizzare sotto forma di ossima un chetone della formula $C_{14}H_{16}O_3$. A prima vista sembra strano che in un processo di riduzione così energico possa generarsi un chetone, però siccome l'acido iodidrico oltre che come riducente può agire da idrolizzante, io credo che la formazione del chetone, riposi precisamente su un processo idrolitico.

Del resto se esatta questa interpretazione, per trattamento della picrotina con mezzi acidi doveva arrivarsi a prodotti di analoga trasformazione, fatto che ho potuto constatare sperimentalmente.

La picrotina, infatti, in tubo chiuso a 170° con acido cloridrico D 1,19 diluito con l'egual volume di acqua, fornisce un composto anch'esso di natura chetonica della formula $C_{14}H_{15}ClO_3$ differendo solamente dal precedente per avere un atomo di idrogeno sostituito dall'alogeno.

Questa reazione mi ha permesso inoltre di stabilire un fatto di notevole importanza, cioè a dire che la picrotossinina ($C_{15}H_{16}O_6$) e la picrotina ($C_{15}H_{18}O_7$), che differiscono fra di loro per una molecola di acqua e che assieme formano la picrotossina del commercio [1] *posseggono lo stesso nucleo fondamentale* giacchè sottoposte, separatamente, allo stesso trattamento forniscono l'identico prodotto.

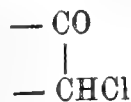
La trasformazione tanto della picrotossinina, quanto della picrotina può spiegarsi ammettendo da un lato che l'acido cloridrico reagendo con un ossidrile elimini acqua ed introduca l'alogeno.

$$R-OH+HCl=H_2O+R-Cl$$

e che nel tempo stesso si elimini una molecola di anidride carbonica.

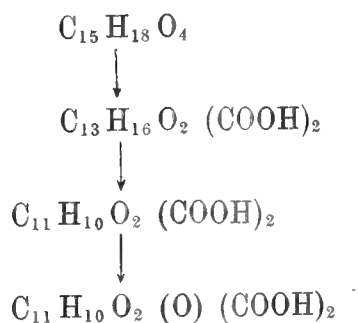
Nella picrotina viene eliminata anche una molecola di acqua precisamente quella che essa contiene in più verso la picrotossinina.

Il prodotto cristallizzato da ligroina si ha in cristalli aghiformi lievemente colorati in giallognolo, colore che perde ricristallizzando da alcool. Fonde a 114°-115°, ed è insolubile negli alcali, anche a caldo, ciò esclude la presenza di ossidrili acidi, non dà acidi idrossamici con acido di Piloty (reazione di Angeli) però con fenilidrazina dà un osazone non alogenato che fonde a 196°, ciò dimostra l'esistenza di un ossigeno chetonico e dell'aggruppamento:

$$\begin{array}{l} -CO \\ \;\;| \\ -CHCl \end{array}$$

[1] Berlin Berichte - R. I. Meyer e P. Bruger (V, 31, 1898, pag. 2974) fecero dei tentativi o riscaldando da solo la picrotina o con cloruro di zinco o con acido cloridrico fumante allo scopo di eliminare acqua dalla picrotina per arrivare alla picrotossinina. Non ottennero altro che resine; molto probabilmente nell'azione dell'acido cloridrico dovettero avere fra le mani il chetone su descritto.

Rimangono a determinare nella loro funzione due atomi di ossigeno ed è caratteristico il fatto che tanto nelle sostanze di partenza, quanto in tutti i prodotti da me finora ottenuti, costantemente si riscontrano due atomi di ossigeno sulla cui natura fino a questo momento non è stato possibile portare luce.

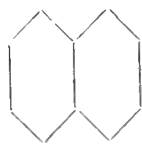
Essi rimangono stabili sia di fronte ai processi di ossidazione, come pure verso i mezzi di riduzione, così nell'acido picrotinico $C_{15}H_{18}O_4$, come a suo tempo feci rilevare, due ossigeni si trovano sotto forma di carbossile, gli altri due sono rimasti oscuri, e sottoponendo quest'acido a successiva ossidazione con permanganato potassico, a caldo, ho ottenuto tre acidi

$$C_{15}H_{18}O_4$$
$$\downarrow$$
$$C_{13}H_{16}O_2\ (COOH)_2$$
$$\downarrow$$
$$C_{11}H_{10}O_2\ (COOH)_2$$
$$\downarrow$$
$$C_{11}H_{10}O_2\ (O)\ (COOH)_2$$

nei quali si riscontrarono costantemente quei due atomi di ossigeno.

Questi due ultimi acidi a 13 atomi di carbonio sono stabilissimi, e si possono considerare come i prodotti ultimi di ossidazione che si arrivano ad ottenere col permanganato.

Or se noi per un momento facciamo astrazione di tutto l'ossigeno e rimpiazziamo i due carbossili con due atomi di idrogeno avremo un complesso di carbonio e di idrogeno rappresentato dalla formula

$$(C_{11}H_{12})$$

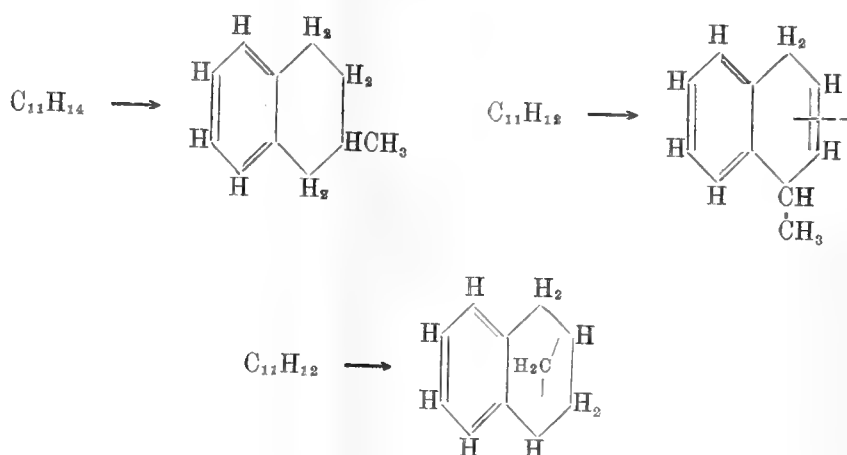
Data la quantità di idrogeno rispetto al carbonio non è il caso di parlare di catene aperte, specialmente tenendo conto della stabilità degli acidi ai mezzi ossidanti, è necessario supporre l'esistenza di composti ciclici, ed in questo caso la scelta è limitata ad un nucleo a 10 atomi di carbonio.

rimanendo a collocare l'undicesimo. Sempre tenendo conto della stabilità di questi ultimi acidi, distribuendo gli atomi di idrogeno ai vertici di questi due esagoni, siamo condotti ad un nucleo della tetraidronaftalina, però abbiamo ancora un atomo di carbonio il quale potrà esistere solamente formando un ponte nel nucleo idrogenato, giacchè se si trovasse sotto forma di

metile, allora non sarebbe più sufficiente la quantità di idrogeno per un nucleo così stabile; se poi ci limitiamo all'idrogeno, che abbiamo a nostra disposizione, ci troveremo di fronte ad un derivato della diidronaftalina e ciò in aperto contrasto colla stabilità di questi acidi al mezzo di ossidazione impiegato.

I seguenti schemi chiariscono le superiori osservazioni

$C_{11}H_{14} \longrightarrow$ (H, H, H, H; H_2, H_2, HCH_3, H_2)

$C_{11}H_{12} \longrightarrow$ (H, H, H, H; H_2, H, H, CH, CH_3)

$C_{11}H_{12} \longrightarrow$ (H, H, H, H; H_2, H, H_2C, H_2, H)

naturalmente rimane sempre a stabilire se questo metilene contribuisce alla formazione di un trimetilene o di un tetrametilene ovvero di un pentametilene.

E qui mi sembra opportuno far rilevare come l'azione dell'acido cloridrico, precedentemente studiata, riesce anche interessante, perchè esso provoca la rottura di questi ponti rendendo il prodotto più accessibile ai processi di demolizione.

L'esistenza di un nucleo aromatico viene confermata da altri fatti che ho avuto occasione di porre in rilievo durante queste ricerche sulla picrotossina.

La picrotina ed in ispecie la picrotossinina, con alcali, mostrano una grande tendenza ad imbrunire, specialmente se vi si fa gorgogliare dell'ossigeno ovvero si scalda, ciò va in accordo con la presenza di un polifenolo, confermata inoltre dal forte potere riducente di fronte al Fehling, ed al nitrato d'argento ammoniacale.

Inoltre per trattamento con alcali di un acido bromurato [1] della picrotossinina, dopo aver acidificato, si estrae con etere una piccola quantità di prodotto che mostra nettamente il comportamento di un ortodiossicomposto aromatico, cioè colorazione verde smeraldo con percloruro di ferro che passa al violetto per aggiunta di soluzione di carbonato od acetato sodico.

[1] Gazz. Chimica, v. 39, parte I, p. 299.

Ma c'è ancora un altro fatto; Meyer e Bruger (1) dalla picrotina per riscaldamento con acido nitrico ottengono un nitroderivato (anidronitropicrotina) $C_{15}H_{15}O_6.NO_2$.

Tutti questi fatti non lasciano dubbio alcuno sull'esistenza di un nucleo aromatico ed io a maggiore conferma ho sottoposto l'acido picrotinico $C_{15}H_{18}O_4$ all'azione di un miscuglio freddo di acido nitrico fumante ed acido solforico, in tal modo si arriva con la massima facilità, ad un nitroacido della formula $C_{13}H_{15}NO_5$ il quale è dotato di una grande stabilità di fronte agli ossidanti; e tale resistenza la dimostra anche verso i riducenti, tanto che, con polvere di zinco ed acido acetico o con acido solforico e zinco granuloso, in presenza di alcool, rimane in gran parte inalterato.

Migliori risultati sembra però che si ottengano impiegando solfuro ammonico, giacchè si perviene ad una sostanza che a differenza del nitroacido, che fonde a 166°, fonde a 173°, è discretamente solubile in acqua ed al contrario del nitroacido si mostra sensibile all'ossidazione.

Parte sperimentale.

Azione dell'acido cloridrico diluito sulla picrotossinina e sulla picrotina.

L'azione dell'acido cloridrico su queste sostanze fu studiata nelle più svariate condizioni, e fra i numerosi saggi quello che meglio si presta alla trasformazione di esse è il seguente:

Grammi due di sostanza si pongono in tubo da chiudere con 8 cc. di acido cloridrico D 1,19 diluito con l'egual volume di acqua e poscia si riscalda in istufa per cinque ore alla temperatura di 170°-180°. Quando i tubi sono completamente raffreddatti all'apertura di essi si nota un po' di pressione, ed il gas che si sprigiona non colora la fiamma, il liquido acido è quasi incolore, ed al fondo del tubo sta attaccato il prodotto della reazione di aspetto pecioso.

Separato il liquido e messo a riposo dopo qualche giorno lascia separare un po' di prodotto sotto forma di aghetti bianchi, il residuo vien ripreso a caldo con alcool metilico in cui è sufficientemente solubile, e la soluzione fortemente bruna, che si ottiene, vien bollita prolungatamente con carbone animale. Per filtrazione si ha sempre un liquido colorato, che per raffreddamento lascia separare un po' di prodotto resinoso, decantando poscia il liquido freddo, da questo lentamente si separa il prodotto cristallizzato, e colorato in giallo rossastro. L'ulteriore purificazione si esegue o cristallizzando da ligroina, in cui è pochissimo solubile, specialmente a freddo o dall'alcool,

(1) Berichte, 31, 1898, p. 2974.

nel primo caso si ha in aghetti, nel secondo in scagliette. Fonde a 114°-115° ed all'analisi fornì numeri concordanti con la formula $C_{14}H_{15}ClO_3$.

1) gr. 0,2230 di sostanza diedero gr. 0,5183 di CO_2 e gr. 0,1182 di H_2O.
2) gr. 0,2962 » » gr. 0,1540 di AgCl.
3) gr. 0,2458 » » gr. 0,5692 di CO_2 e gr. 0,1340 di H_2O.
4) gr. 0,3318 » » gr. 0,1744 di AgCl.

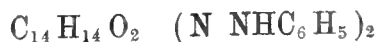
Trovato			Calcolato		
C 63,38	H 5,88	Cl 12,80	C 63,02	H 5,63	Cl 13,32
C 63,15	H 6,07	Cl 12,95			

Le due prime analisi si riferiscono al prodotto ottenuto dalla picrotina le due ultime a quello proveniente dalla picrotossinina.

Assieme a questo prodotto si forma un'altra sostanza solubile in alcali, ma la quantità è così piccola che io l'ho trascurata. Operando nella stessa maniera sulla picrotossina, cioè sul miscuglio delle due sostanze si arriva all'identico corpo.

Azione della fenilidrazina sul prodotto precedente.

Grammo uno di sostanza venne sciolta a caldo in alcool ed alla soluzione fredda vi si aggiunsero grammi due di fenilidrazina sciolta in acido acetico al 50 %. Appena i due liquidi furono in contatto, la massa assunse colorazione giallo d'oro. Dopo circa un'ora, scaldai per pochi minuti su b. m. bollente, raffreddai e versai in acqua, si separò in tal modo un prodotto intensamente colorato in giallo di aspetto voluminoso in principio, ma che presto assunse forma cristallina. Raccolto su filtro e lavato bene con acqua, si pose a seccare su H_2SO_4. Il prodotto cristallizzato dall'alcool, in cui è poco solubile, si ottiene in piccoli cristalli intensameute colorati in giallo che fondono a 196° ed all'analisi fornirono numeri concordanti con la formula

$$C_{14}H_{14}O_2\ (N\ NHC_6H_5)_2$$

gr. 0,1622 di sostanza diedero 0,4335 di CO_2 e 0,0954 di H_2O
gr. 0,1514 » » cc. di azoto 16,6 alla temperatura di 14° ed alla pressione di 765 mm.

Trovato	Calcolato
C 72,88	73,23
H 6,53	6,10
N 13,13	13,14

Azione dell'acido nitrico e solforico sull'acido picrotinico

$C_{15}H_{18}O_4$.

In un miscuglio freddo di cc. 5 di acido nitrico D 1,48 e di cc. 5 di acido solforico concentrato a piccole porzioni di circa un quarto di grammo, si aggiungono grammi due di acido picrotinico. Non appena il prodotto viene in contatto col miscuglio degli acidi, in buona parte passa in soluzione, colorando il liquido in giallo e con sviluppo gassoso. Quando l'acido si è aggiunto completamente (circa 15 minuti) si agita per poco allo scopo di portare in soluzione le ultime tracce di prodotto rimaste aderenti alle pareti della bevuta, e poscia con getto sottile si versa in acqua ghiacciata; in tal modo si separa subito un prodotto molle, colorato in giallo, che presto indurisce. Si raccoglie su filtro dopo averlo triturato bene in mortaio e si lava ripetutamente con acqua fino a che le acque di lavaggio non colorano più le cartine al metilarancio.

Il nuovo composto si scioglie facilmente negli alcali e nei carbonati, con colorazione lievissimamente gialla e da queste soluzioni riprecipita per aggiunta di acido solforico o cloridrico.

Pochissimo solubile in acqua calda, si scioglie abbastanza in benzolo ed in alcool e da questo solvente si ha in grossi e corti aghi lievemente colorati in giallo e che fondono a 166°. All'analisi fornì i numeri che conducono alla formula $C_{13}H_{15}NO_5$.

gr. 0,3265 di sostanza diedero 0,6985 di CO_2 e gr. 0,1586 di H_2O
gr. 0,1953 " " 0,4187 " " 0,1014 "
gr. 0,1979 " " 0,4227 " " 0,1042 "
gr. 0,1810 " " cc. 8,2 di azoto alla temperatura di 13° ed

alla pressione di 756 mm.

	Trovato (1)				Calcolato
C	58,34	58,34	58,30		58,86
H	5,35	5,75	5,85		5,66
N	—	—	—	5,60	5,30

Concentrando fortemente le acque madri si ottiene ancora un po' di acido, ma in soluzione rimane un altro prodotto insolubile in alcali che si separa lentamente dopo alcuni giorni. Una piccola porzione seccata su piastra porosa dà un prodotto quasi bianco che fonde verso 110°. La mancanza di

(1) Per quanto io abbia purificato il prodotto ho costantemente ottenuto una percentuale in meno nel carbonio, un pochino più elevata dei limiti di errore analitico (0,6 %). Probabilmente ciò è dovuto o alla presenza di un prodotto maggiormente nitrato ovvero un po' più ossidato.

sufficiente quantità di prodotto non mi ha permesso per il momento di analizzarla.

Il nitroacido su descritto è dotato di una grande stabilità di fronte ai mezzi di ossidazione, così rimane quasi del tutto inalterato, sia sottoponendolo all'azione del permanganato potassico in mezzo alcalino, sia di fronte all'acido cromico in soluzione solforica. Pari resistenza dimostra anche di fronte ai riducenti, così rimane quasi inalterato, per azione della polvere di zinco con acido acetico ovvero dello zinco granuloso con acido solforico diluito in mezzo acquoso alcoolico. Sostituendo l'acido cloridrico al solforico, ed insistendo a ricadere per molte ore, molto probabilmente avviene la riduzione, ma il prodotto che si ottiene mal si presta alla purificazione.

Sembra però che migliori risultati si ottengano impiegando solfuro ammonico. A tale scopo l'acido vien disciolto in ammoniaca e poscia saturato con idrogeno solforato.

Il liquido colorato fortemente in giallo, si riscalda con refrigerante a ricadere, così dopo pochi minuti s'intorbida per separazione di zolfo, e nel tempo stesso si scolora.

Separando per filtrazione lo zolfo ed evaporando il filtrato, rimane indietro un prodotto che fonde verso 170°. È molto solubile in alcool, pochissimo in benzolo, e da questo solvente si separa quasi bianco, fonde a 173°, rammollendo alcuni gradi prima, ma la sua solubilità in acqua ed il suo punto di fusione più elevato rispetto al prodotto di partenza (166°), dimostrano l'avvenuta trasformazione che del resto è maggiormente confermata dal fatto che il nuovo prodotto mostrasi abbastanza sensibile ai mezzi ossidanti.

La mancanza di tempo non mi ha permesso per ora di condurre a termine queste esperienze.

Chimica — *Sul comportamento di talune ureidi e sostanze puriniche rispetto a soluzioni di benzoato sodico* [1]. Nota di Giovanni Pellini e Mario Amadori, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota pubblicata in questi Rendiconti [2] noi abbiamo dimostrato che la caffeina in soluzione acquosa forma col benzoato sodico un complesso che è causa dell'aumento reciproco di solubilità di queste due sostanze. La caffeina non è l'unico derivato della purina che venga usato in farmacia, ma trovano impiego altri prodotti sotto forma di sali di queste sostanze, o pro-

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova.
[2] Questi Rendiconti, fasc. 6°, pag. 333, 1° sem. 1910.

dotti risultanti dall'unione della base purinica con sali alcalini o infine prodotti di unione dei sali alcalini con i sali sodici di questi derivati della purina: fra questi ultimi sono degni di nota la « diuretina » ossia il salicilato di sodio e teobromina sodica, « l'uroferina » ossia il salicitato di litio e teobromina litica, il « benzoato d'uroferina » ossia il benzoato di litio con teobromina litica. Così pure vengono usate alcune ureidi fra cui il « veronale » o acido dietilbarbiturico.

Era perciò interessante di ricercare se altre sostanze aventi costituzione simile o contenenti aggruppamenti uguali a quelli della caffeina, si comportassero in modo analogo verso le soluzioni di benzoato sodico.

Questo studio ha lo scopo di portare un contributo alla conoscenza della vera natura chimica di tutti quei prodotti farmaceutici che risultano dalla unione di alcune delle sostanze sopra nominate coi sali alcalini ed inoltre di vedere in quanto la tendenza a formare tali complessi dipenda dalla costituzione.

Noi abbiamo anzitutto esaminato sostanze contenenti l'aggruppamento $CO\left\langle\begin{matrix}NH-\\NH-\end{matrix}\right.$ e abbiamo cominciato colla sostanza madre, l'urea. Abbiamo inoltre voluto studiare l'uretano. Poi siamo passati a studiare alcune monoureidi come l'allossana e il veronale o acido dietilbarbiturico: come rappresentanti delle diureidi abbiamo scelto l'allantoina e l'acido urico. Infine fra le basi xantiniche abbiamo impiegato due omologhi inferiori della caffeina e cioè la teobromina e la teofillina.

$$\begin{array}{c}NH_2\\ |\\ CO\\ |\\ NH_2\\ \text{Urea}\end{array}\qquad \begin{array}{c}NH_2\\ |\\ CO\\ |\\ OC_2H_5\\ \text{Uretano}\end{array}\qquad \begin{array}{ccc}NH & - & CO\\ | & & |\\ CO & & C<\begin{matrix}C_2H_5\\C_2H_5\end{matrix}\\ | & & |\\ NH & - & CO\\ & \text{Veronale} & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc}NH & - & CO\\ | & & |\\ CO & & CO\\ | & & |\\ NH & - & CO\\ & \text{Allossana} & \end{array}\qquad \begin{array}{ccccc}NH & - & CH & - & NH\\ | & & | & & |\\ CO & & | & & CO\\ | & & | & & |\\ NH & - & CO & & NH_2\\ & & \text{Allantoina} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl}NH & - & CO\\ | & & |\\ CO & & C-NH\diagdown\\ | & & \| \qquad\quad CO\\ NH & - & C-NH\diagup\\ & \text{Ac. urico} & \end{array}\qquad \begin{array}{ccl}NH & - & CO\\ | & & |\\ CO & & C-NCH_3\\ | & & \| \qquad \diagdown CH\\ CH_3N & - & C-N\diagup\!\!\diagup\\ & \text{Teobromina} & \end{array}\qquad \begin{array}{ccl}CH_3N & - & CO\\ | & & |\\ CO & & C-NH\\ | & & \| \qquad \diagdown CH\\ CH_3N & - & C-N\diagup\!\!\diagup\\ & \text{Teofillina} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccl}CH_3N & - & CO\\ | & & |\\ CO & & C-NCH_3\\ | & & \| \qquad \diagdown CH\\ CH_3N & - & C-N\diagup\!\!\diagup\\ & \text{Caffeina} & \end{array}$$

Urea in acqua ($CH_4ON_2 = 60$)

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 60$	Peso molecolare (K = 18,5)
1,500	0,475	0,462	58,4
3,006	0,94	0,926	59,1

Urea in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,234:

Concentrazione dell'urea in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 60$
C	Δ	Δ'
0,749	0,23	0,230
1,944	0,59	0,599
3,654	1,115	1,126

Concentrazione del benzoato in acqua 3,025:

C	Δ	Δ'
1,248	0,385	0,384
2,446	0,755	0,754

Concentrazione del benzoato in acqua 5,180:

C	Δ	Δ'
1,327	0,405	0,409
3,272	0,995	1,008
4,802	1,465	1,480

Uretano in acqua ($C_3H_7O_2N = 89$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 89$	Peso molecolare (K = 18,5)
1,072	0,23	0,223	86,1
2,524	0,53	0,524	88,1

Uretano in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,235:

Concentrazione dell'uretano in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 89$
C	Δ	Δ'
1,433	0,295	0,297
2,293	0,47	0,476
3,343	0,68	0,694

Concentrazione del benzoato in acqua 3,207:

C	Δ	Δ'
0,723	0,15	0,150
1,445	0,30	0,300
3,256	0,665	0,676

Concentrazione del benzoato in acqua 5,078:

C	Δ	Δ'
2,096	0,43	0,435
4,896	0,995	1,017

Veronale in acqua ($C_8H_{12}O_3N_2 = 184$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 184$
0,322	0,035	0,032
0,380	0,035	0,038

Veronale in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 3,042:

Concentrazione del veronale in 100 gr. d'acqua	Abbassamanto termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 184$
C	Δ	Δ'
0,305	0,02	0,030
0,570 il veronale non è sciolto	0,035	—

Concentrazione del benzoato in acqua 3,056:

C	Δ	Δ'
0,281	0,025	0,028
0,534	0,04	0,053
0,720 il veronale non è sciolto	0,04	—

Concentrazione del benzoato in acqua 5,358:

C	Δ	Δ'
0,303	0,020	0,030
0,515	0,035	0,051
0,774 il veronale non è sciolto	0,035	—

Concentrazione del benzoato in acqua 8,184:

C	Δ	Δ'
0,239	0,02	0,024
0,554 il veronale non è sciolto	0,03	—

Allossana in acqua ($C_4H_2O_4N_2 = 142$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 142$	Peso molecolare (K = 18,5)
0,453	0,06	0,059	139,6
1,215	0,17	0,158	132,2
2,230	0,30	0,290	137,5
2,754	0,37	0,358	137,6

Allossana in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 3,196:

Concentrazione dell'allossana in 100 gr. d'acqua	Abbassamonto termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 142$
C	Δ	Δ'
0,723	0,09	0,094
1,514	0,18	0,197
2,886	0,325	0,375

Concentrazione del benzoato in acqua 4,847:

C	Δ	Δ'
0,912	0,105	0,118
2,645	0,27	0,344
3,506	0,35	0,456

Allantoina in acqua ($C_4H_6O_3N_4 = 158$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m =$
0,248	0,03	0,029
0,263	0,035	0,030

Allantoina in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,088:

Concentrazione dell'allantoina in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 158$
C	Δ	Δ'
0,248	0,025	0,029
0,468 l'allantoina non è sciolta	0,04	—

Concentrazione del benzoato in acqua 2,703:

C	Δ	Δ'
0,265	0,02	0,031
0,516 l'allantoina non è sciolta	0,03	—

Concentrazione del benzoato in acqua 5,336:

C	Δ	Δ'
0,356	0,02	0,041
0,603 l'allantoina non è sciolta	0,03	—

Concentrazione del benzoato in acqua 8,319:

C	Δ	Δ'
0,271	0	0,031
0,571	0	0,066
0,837 l'allantoina non è sciolta	0,01	—

Teofillina in acqua ($C_7H_8O_2N_4 = 180$).

Concentrazione	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 180$
0,212	0,02	0,021
0,306	0,025	0,031

Teofillina in soluzione acquosa di benzoato sodico.

Concentrazione del benzoato in acqua 1,027:

Concentrazione della teofillina in 100 gr. d'acqua	Abbassamento termometrico	Abbassamento termometrico calcolato per $m = 180$
C	Δ	Δ'
0,423	0,015	0,043
0,660 la teofillina non è sciolta	0,02	—

Concentrazione del benzoato in acqua 1,725:

C	Δ	Δ'
0,293	0,01	0,030
0,521	0,02	0,058
0,717 la teofillina non è sciolta	0,02	—

Concentrazione del benzoato in acqua 2,728:

C	Δ	Δ'
0,497	0,00	0,051
0,876	0,01	0,090
1,216 la teofillina non è sciolta	0,01	—

Concentrazione del benzoato in acqua 3,220:

C	Δ	Δ'
0,405	0,00	0,041
0,900	0,005	0,092
1,325 la teofilliua non è sciolta	0,005	—

Concentrazione del benzoato in acqua 5,419:

C	Δ	Δ'
0,441	— 0,02	0,045
0,829	— 0,04	0,085
1,199	— 0,04	0,123
1,634 la teofillina non è sciolta	— 0,04	—

Dai dati sperimentali si rileva che l'urea e l'uretano si comportano in modo normale in acqua e non formano complessi col benzoato sodico, perchè gli abbassamenti del punto del congelamento calcolati coincidono con gli abbassamenti trovati.

Il veronale si scioglie molto poco in acqua e gli abbassamenti trovati corrispondono ai calcolati. In soluzione di benzoato sodico anche a forte concentrazione non si verifica nè un aumento apprezzabile di solubilità, nè una variazione dei punti di congelamento tali da giustificare l'ammissione di un complesso.

L'allossana in acqua si comporta in modo normale. I pesi molecolari trovati sono un po' inferiori ai calcolati in accordo con la sua non lieve energia acida. In soluzione di benzoato sodico forma sicuramente un complesso e ciò si rileva in modo particolarmente sicuro per la concentrazione di benzoato al 4,847 %.

L'allantoina si scioglie molto poco in acqua e gli abbassamenti trovati coincidono coi calcolati. In soluzione di benzoato sodico la solubilità aumenta leggermente, e la formazione conseguente di un complesso si rileva dalle esperienze in benzoato al 8,319 %, perchè il punto di congelamento del benzoato non viene abbassato, mentre che gli abbassamenti che si dovrebbero verificare sono già sufficientemente rilevanti da escludere un errore sperimentale.

L'acido urico è noto per la sua piccolissima solubilità in acqua, e dalle poche esperienze eseguite non appare che la sua solubilità aumenti in modo sensibile in presenza di benzoato sodico.

La teobromina è pure pochissimo solubile in acqua, ed aumenta la solubilità in presenza di benzoato sodico, in modo però da non potersi prestare a determinazioni crioscopiche conclusive.

La teofillina ha una solubilità in acqua, a freddo, intermedia fra quella della teobromina e quella della caffeina. La sua solubilità aumenta in presenza di benzoato sodico ed essa forma sicuramente un complesso. Il comportamento è a questo riguardo analogo a quello della caffeina e precisamente la differenza fra i punti di congelamento calcolati e trovati aumenta con l'aumentare della concentrazione di benzoato sodico fino a dar luogo, alla concentrazione di 5,419 % di benzoato, ad un innalzamento del punto di congelamento.

È opportuno di rilevare a questo punto che come causa della piccolezza degli abbassamenti o addirittura degli innalzamenti, potrebbe pensarsi ad una retrocessione della dissociazione del benzoato sodico per opera della sostanza aggiunta. Però è evidente che tale effetto, per quanto non possa essere escluso, non può ritenersi sufficiente a generare differenze così notevoli che nella caffeina raggiungono perfino il valore di 0°,50 e 0°,56 [1]. Il fatto poi che dopo raggiunta una certa concentrazione non si hanno più variazioni nella temperatura, dimostra in modo decisivo che il comportamento osservato non può dipendere in modo apprezzabile dalla retrocessione ora accennata. È infatti fuori di ogni possibilità che elettroliti così deboli possano far retrocedere in tal guisa la dissociazione di un sale.

Se si confrontano le costanti di dissociazione, come acidi, delle sostanze esaminate con la loro tendenza a formare complessi non si trova una relazione netta.

	k 25° [2]	Aumento di solubilità in benzoato sodico	Formazione di complessi
Urea	—	—	no
Uretano	—	—	no
Ac. dietilbarbiturico	$7,3 \times 10^{-8}$	incerto	incerto
Allossana	$4,1 \times 10^{-5}$	—	sì
Allantoina	$1,1 \times 10^{-9}$	sì	sì
Ac. urico	$1,5 \times 10^{-6}$	—	—
Teobromina . . .	$1,1 \times 10^{-10}$	sì	incerto
Teofillina	$1,69 \times 10^{-9}$	sì	sì
Caffeina	$< 1 \times 10^{-14}$	sì	sì

Si vede però che la caffeina che possiede la costante di dissociazione più piccola è quella che possiede la maggiore capacità alla formazione di un complesso, e che la natura acida non è la causa che favorisca o contrari la formazione di un complesso, perchè l'allossana lo forma e l'acido urico sembra non formarlo pur avendo la prima sostanza una costante maggiore di quella dell'acido urico.

Appare invece probabile che esista, per la formazione di un complesso, una relazione con la costituzione chimica delle sostanze esaminate, e sopra tutto vi influisca la solubilità propria delle sostanze nell'acqua come si vede assai bene nel caso dell'acido urico e della teobromina.

Tuttavia a proposito del veronale, acido urico e teobromina, non è possibile dalle ricerche crioscopiche concludere in modo negativo per la formazione di un complesso in soluzione, per la scarsa sensibilità del metodo: la risposta decisiva spetta certamente alle determinazioni delle isoterme di solubilità.

[1] Questi Rendiconti, fasc. 6°, pag. 333, I sem. 1910.

[2] H. Lundén, Sammlung chem.,- chem.-tech. Vorträge. Band XIV, pag. 1 (1909).

Chimica. — *Sulle proprietà dell'iodio come solvente crioscopico* (1). Rettifica di F. OLIVARI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In seguito ad una breve pubblicazione di Beckmann « Ueber ebullioskopische und kryoskopische Bestimmung von Molekulargewichten in Jod » (2) io presentavo all'Accademia dei Lincei, nella seduta del 7 novembre 1909, una Nota preliminare sullo stesso argomento (3), comunicando alcune determinazioni crioscopiche che in parte formavano l'oggetto della tesi di laurea del candidato (ora dottore) Angelo Delbono, tesi intrapresa sin dal principio dell'anno scorso ed eseguita sotto la mia guida.

A quella Comunicazione, dirò così, embrionale, volevo far seguire una Memoria più dettagliata. Mentre a questo scopo sviluppavo le poche misure ivi riferite, ho constatato con mia sorpresa che alcuni dei dati sperimentali ottenuti dal predetto candidato non corrispondevano al vero, e questo in modo di cui il candidato stesso non mi ha saputo dar ragione.

Perciò ho rifatto rapidamente le esperienze e mi affretto a pubblicare le seguenti rettifiche:

1°) Per stabilire la costante crioscopica dell'iodio si erano adoperate come sostanze normali AsI_3, HgI_2, SnI_4 e PbI_2, ottenendo in media $K = 213$: mentre confermo questo risultato avverto che delle misure relative all'ioduro di piombo non si deve tener conto perchè questo sale si è dimostrato, al contrario, insolubile in iodio.

2°) Riguardo al comportamento crioscopico delle sostanze organiche in iodio, ho constatato che i pesi molecolari sono, in soluzione diluitissima, normali anche per i composti ossigenati, al contrario di quanto facevano supporre le precedenti esperienze. Ho invece confermato ch'essi vanno in generale rapidamente aumentando colla concentrazione e che l'aumento è tanto più rapido quanto più si procede dagli idrocarburi agli acidi.

[Non è fuor di luogo rilevare a questo proposito che nella tabella riportata a pag. 385 (l. c.) i numeri 1 e 2 indicanti i valori del rapporto $i = \frac{\text{PM trov.}}{\text{PM calc.}}$ per un errore dello stereotipo sfuggito nella revisione delle bozze, furono collocati una graduazione (un decimo) più in basso].

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Generale della R. Università di Parma, diretto dal prof. Plancher.

(2) Z. anorg. Chem. *63*, pag. 63 (1909).

(3) Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. pag. 384.

3°) Delle determinazioni relative agli ioduri alcalini ed alcalino-terrosi ho ripetuto quelle che si riferiscono all'ioduro di potassio: estendendo il campo delle concentrazioni più di quanto non si facesse precedentemente è risultato che, a forte diluizione, il peso molecolare è assai prossimo al normale, aumenta colla concentrazione (in accordo colle prime misure) e poi decresce. Queste esperienze non sono ancora definitive.

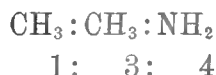
Per il peso molecolare dell'ioduro di càlcio e stronzio, a causa della straordinaria igroscopicità di queste sostanze, le determinazioni non mi danno valori ben certi: sto ripetendo le misure con una disposizione che mi permette di operare in ambiente e con sostanze perfettamente secchi.

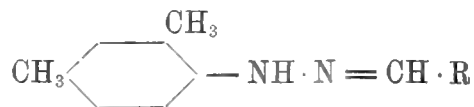
In altro luogo esporrò dettagliatamente il materiale di cui è parola nella Nota suddetta e nella presente rettifica.

Chimica. — *Relazioni fra la costituzione e la fototropia* [1]. Nota di M. Padoa e F. Graziani, presentata dal Socio G. Ciamician.

Nelle due Note precedenti [2] abbiamo esposto i risultati delle nostre esperienze, dirette ad ottenere, nella classe degli idrazoni, delle nuove sostanze fototrope. E tali esperienze, mentre ci conducevano effettivamente al riconoscimento della fototropia in parecchi corpi, mettevano in luce alcune relazioni fra la struttura delle idrazine impiegate e la possibilità di ottenere da esse degli idrazoni dotati della proprietà che ci interessa.

Per estendere e per confermare possibilmente le regole già da noi trovate, ci siamo proposti di prendere in esame le xililidrazine, che possono esistere in 6 diverse forme isomere. Oggetto di questa Nota è di rendere conto dei risultati ottenuti con due delle xililidrazine: di queste, una è quella che deriva dalla xilidina più comune, avente i due metili e il gruppo NH_2 così disposti:

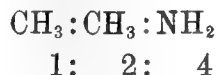
$$\begin{matrix} CH_3 : CH_3 : NH_2 \\ 1 : \ 3 : \ 4 \end{matrix}$$

Tale idrazina contiene dunque un metile in posizione *orto* rispetto all'NH_2 e per obbedire alla regola già trovata per configurazioni consimili (*o*-tolilidrazoni, α-naftilidrazoni) doveva dare idrazoni non fototropi. L'esperienza ha infatti dimostrato che gli idrazoni del tipo

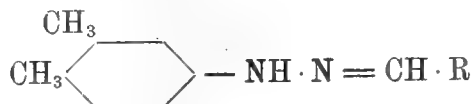
$$CH_3\langle C_6H_3(CH_3) \rangle - NH \cdot N = CH \cdot R$$

non sono mai fototropi.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

[2] Questi Rendiconti, 1909, II, 269, 558.

L'altra xililidrazina è quella proveniente dalla xilidina avente i gruppi sostituenti disposti nel seguente modo:

$$\begin{matrix} CH_3 : CH_3 : NH_2 \\ 1 : \; 2 : \; 4 \end{matrix}$$

Per essa si dovevano prevedere dei derivati fototropi, per l'analogia con la m-tolilidrazina e la β-naftilidrazina; l'esperienza ha confermato anche questa previsione, e quasi tutti gli idrazoni del tipo

$$(CH_3)_2 \, C_6H_3 - NH \cdot N = CH \cdot R$$

sono fototropi.

Abbiamo poi completato la serie dei β-naftilidrazoni (noi prendiamo finora in considerazione 8 aldeidi), alcuni dei quali non avevamo ancora esaminato, e dei quali abbiamo accertato quasi sempre la fototropia.

Parte sperimentale.

I. — 1. 3. 4 xililidrazoni.

La 1. 3. 4 xililidrazina fu ottenuta per la prima volta da Klauber [1], ma noi abbiamo trovato più conveniente seguire il metodo indicato da Plancher e Caravaggi [2] per la preparazione della 1. 4. 5 xililidrazina. Abbiamo cioè eseguita la diazotazione della xilidina corrispondente, poi abbiamo ridotto il diazocomposto prima con solfito sodico poi con zinco e acido acetico; l'aggiunta successiva di acido cloridrico concentrato fece precipitare il cloridrato della base. Questo composto, conforme ai dati di Klauber, si scompone a 183°.

1. *1. 3. 4 xililidrazone della benzaldeide*

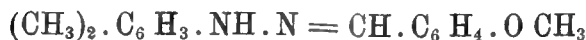
$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_5$$

Si prepara sciogliendo in acqua calda il cloridrato dell'idrazina e scuotendo con benzaldeide. Cristallizza dall'alcool in scagliette giallognole, lucenti. È alterabile all'aria. P. F. 86°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	12,50	12,60

(1) Monatshefte *11*, 283, *12*, 211.
(2) Questi Rendiconti, 1905, I, 158.

2. *1. 3. 4 xililidrazone dell'anisaldeide*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . O CH_3$

Si prepara come l'altro; dall'alcool si ha in aghi lunghi, sottilissimi, giallognoli; P. F. 97°. Si altera all'aria. *Non è fototropo*. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	11,02	11,05

3. *1. 3. 4 xililidrazone dell'aldeide cinnamica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH - CH = CH . C_6H_5$

Dal cloridrato di xililidrazina e aldeide cinnamica, in presenza di acetato sodico. Dall'alcool, in cristalli giallo-citrini; P. F. 115°. *Non è fototropo*. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	11,19	11,19

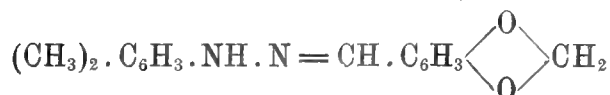
4. *1. 3. 4 xililidrazone del cuminolo*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH (CH_3)_2$

Si ottiene come i due primi. Dall'alcool un po' acquoso in aghetti bianchi. P. F. 76°. *Non è fototropo*. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	10,52	10,53

5. *1. 3. 4 xililidrazone del piperonale*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_3 \langle {}^{O}_{O} \rangle CH_2$

Dal cloridrato dell'idrazina sospeso in acqua e soluzione alcoolica di piperonale; dall'alcool in cristallini leggermente rosei. P. F. 90°. *Non è fototropo*. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	10,44	10,43

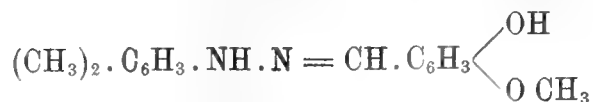
6. *1. 3. 4 xililidrazone dell'aldeide p-toluica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 CH_3$

Si ottiene come i primi due; dall'alcool in cristalli minuti color giallo-canarino. P. F. 99°. *Non è fototropo*. Analisi:

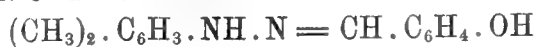
	Calcolato	Trovato
N °/₀	11,77	11,81

7. *1. 3. 4 xililidrazone della vanillina*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_3 \left\langle \begin{matrix} OH \\ O\ CH_3 \end{matrix} \right.$$

Si prepara come quello del piperonale; dall'alcool in aghi lunghi, sottilissimi, giallognoli. P. F. 99°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	10,37	10,53

8. *1. 3. 4 xililidrazone dell'aldeide salicilica*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . OH$$

Si prepara come i primi due; cristallizza dall'alcool in minutissimi aghi gialli P. F. 86°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	11,67	11,75

II. — 1. 2. 4 xililidrazoni.

La 1. 2. 4 xililidrazina, per quanto ne sappiamo, non fu preparata finora. Abbiamo ottenuto il cloridrato, partendo da 10 gr. della xilidina corrispondente, e operando come si è detto per l'altra idrazina. Il rendimento fu buono, talchè ottenemmo circa 10 gr. di cloridrato, cristallizzato (dall'acqua) in scagliette bianche, lucenti, leggere. Fonde con scomposizione a 197°. Analisi:

	Calcolato	Trovato
C °/₀	55,63	55,46
H »	7,59	8,06
N »	16,24	16,26

Abbiamo anche ottenuta la base libera, che cristallizza dall'etere in aghi bianco-giallognoli: P. F. 57°.

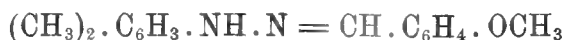
9. *1. 2. 4 xililidrazone della benzaldeide*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_5$$

Dal cloridrato della base in soluzione acquosa, con benzaldeide e acetato sodico: dall'alcool si ha in polvere cristallina lievemente giallognola; P. F. 126°. *È fototropo:* in 2 minuti al sole diventa rosa; si scolora a 120°. Al buio si scolora in 2 o 3 giorni. Analisi:

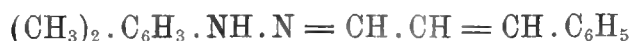
	Calcolato	Trovato
N °/₀	12,50	12,58

10. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide anisica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . OCH_3$

Si ottiene come l'altro; dall'alcool in aghi bianchi. P. F. 116°. *È fototropo:* in due minuti, al sole, si colora in rosso-viola. Si scolora a 95-100°. Al buio retrocede in 2 o 3 giorni. Analisi:

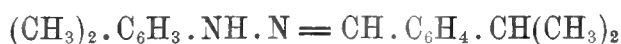
	Calcolato	Trovato
N %	11,02	11,10

11. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide cinnamica*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . CH = CH . C_6H_5$

Si ottiene come i precedenti; aghetti gialli dall'alcool; P. F. 153°. *Non è fototropo.* Analisi:

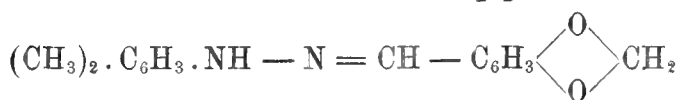
	Calcolato	Trovato
N %	11,20	11,30

12. *1. 2. 4 xililidrazone del cuminolo*

$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH(CH_3)_2$

Dall'alcool in lunghi aghi sottilissimi, leggermente giallognoli; P. F. 143°. *È fototropo*: in 3 o 4 minuti al sole assume leggera colorazione rosa, che retrocede al buio in circa 2 giorni. Si scolora per riscaldamento a 110°. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,53	10,66

13. *1. 2. 4 xililidrazone del piperonale*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH - N = CH - C_6H_3 \langle {}^{O}_{O} \rangle CH_2$$

Dall'alcool in polvere cristallina bianca; P. F. 118°. *È fototropo*: in 2 o 3 minuti si colora in rosso al sole. Retrocede al buio con una rapidità notevolissima, tanto che dopo 10 minuti ritorna al colore primitivo: perciò non si può determinare la temperatura di scoloramento per riscaldamento. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,45	10,49

14. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide p. toluica*

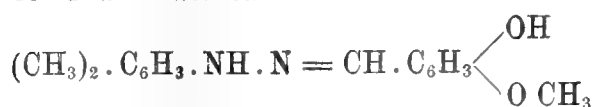
$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH_3$

Dall'alcool in polvere cristallina gialla-canarino; P. F. 135°. Al sole in 3 o 4 minuti assume una colorazione con tendenza al rosa, ma così de-

bole che non si può determinare la temperatura di scoloramento per riscaldamento; al buio retrocede in circa 2 giorni. Analisi:

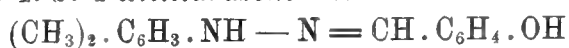
	Calcolato	Trovato
N °/₀	11,77	11,77

15. *1. 2. 4 xililidrazone della vanillina*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH . N = CH . C_6H_3 \langle {}^{OH}_{O\,CH_3}$$

Si cristallizza da miscele di alcool ed acqua. Polvere cristallina bianca; P. F. 118°. *Non è fototropo.* Analisi:

	Calcolato	Trovato
N °/₀	10,37	10,42

16. *1. 2. 4 xililidrazone dell'aldeide salicilica*

$$(CH_3)_2 . C_6H_3 . NH - N = CH . C_6H_4 . OH$$

Dall'alcool in minutissimi aghi giallognoli; P. F. 157°. *Assai leggermente fototropo*, con tendenza ad una colorazione rosa. Al buio retrocede in circa due giorni. Analisi:

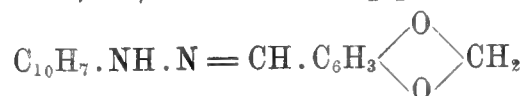
	Calcolato	Trovato
N °/₀	11,67	11,76

Degli ultimi 8 xilidrazoni, 6 sono dunque fototropi.

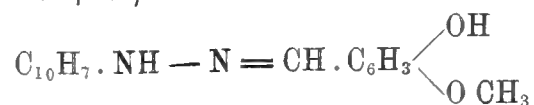
III. — β-naftilidrazoni.

Preparammo del cloridrato di β-naftilidrazina col metodo indicato da H. Meyer [1].

17. *β-naftilidrazone del piperonale*

$$C_{10}H_7 . NH . N = CH . C_6H_3 \langle {}^{O}_{O} \rangle CH_2$$

Dal cloridrato della base con acetato sodico e soluzione alcoolica di piperonale. Cristallizza dall'acido acetico glaciale in aghetti carnicini fondenti a 186°. [2]. *È fototropo*, ciò che non ci risulta fosse noto; al sole, in 2 o 3 minuti, il colore rosso aumenta d'intensità; retrocede al buio in 30 ore circa.

18. *β-naftilidrazone della vanillina*

$$C_{10}H_7 . NH - N = CH . C_6H_3 \langle {}^{OH}_{O\,CH_3}$$

Si prepara come il precedente; si ha in polvere cristallina bianca dall'acido acetico glaciale P. F. 185° (Rothenfusser, l. c., 187°). *È fototropo:*

(1) H. Meyer, Analyse und Konstitutionsermittelung organ. Verbind., 1909 pag. 633.
(2) S. Rothenfusser, Centralblatt, 1907, II, 1513.

in 3 o 4 minuti diventa rosso al sole. Ciò era stato osservato anche dall'A. citato, che però non lo conobbe per un caso di fototropia. Retrocede al buio in un giorno o due.

19. *β-naftilidrazone dell'aldeide p-toluica* $C_{10}H_7 . NH . N = CH . C_6H_4 . CH_3$

Dal cloridrato della base, sospeso in acqua, con acetato sodico e l'aldeide. Cristallizza dall'acido acetico glaciale in scagliette appena gialle. P. F. 188°. *È fototropo*: si colora in 2 o 3 minuti, al sole, fortemente in rosso. Retrocede al buio in 2 o 3 giorni. Per riscaldamento si scolora a 100° circa. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,77	10,79

20. *β-naftilidrazone dell'aldeide salicilica* $C_{10}H_7 . NH . N = CH . C_6H_4 . OH$

Si ottiene come il precedente; cristallizza dall'acido acetico glaciale in aghetti di colore giallo-sporco; P. F. 187°. *Non è fototropo*. Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,69	10,76

Con questi abbiamo preparato una serie di 8 β-naftilidrazoni, dei quali 7 sono fototropi.

Stiamo proseguendo le esperienze per esaminare il comportamento delle altre xililidrazine.

Geologia. — *L'eruzione etnea del 1910, dal 23 al 31 marzo* (¹). Nota del dott. Francesco Stella Starrabba, presentata dal Corrispondente G. De Lorenzo.

L'Etna, il cui periodo medio di riposo in questi ultimi secoli della sua attività è stato valutato di circa sei anni, dal 1892 al tempo presente non dava alcuno sfogo al magma lavico accumulatosi nelle sue ime viscere. Nel 1899, è vero, si erano avuti alcuni fenomeni di attività nel cono terminale, consistenti nella emissione di materiali detritici causata da poche esplosioni, e nel 1908 un tentativo di eruzione nella Valle del Bove, abortita soltanto dopo pochi giorni, ma questi fenomeni altro non dimostravano che la presenza di magma che tendeva a travasare senza riuscirvi completamente.

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geografia Fisica dell'Università di Napoli.

A questo lungo periodo di repressione, durato circa 18 anni, segue l'attuale eruzione che sin dalle prime ore ha mostrato la sua imponenza. Primo carattere di questa eruzione è la scarsezza di fenomeni premonitorî che quasi costantemente hanno preceduto le eruzioni passate. Durante il 1909 parecchie volte erano state osservate di notte le *fiamme* al cono terminale e durante il giorno qualche improvvisa fumata, che assumeva la forma di un minuscolo pino, carica di cenere. Di queste fumate ne potei notare alcune durante il settembre dello scorso 1909. Qualche terremoto di origine vulcanica era stato avvertito specialmente sulle falde orientali del vulcano. A quanto ho potuto udire, il giorno 22 marzo scorso, nelle alte regioni dell'Etna furono notate, dalle poche persone ivi abitanti, delle forti scosse di terremoto e la mattina del 23 furono viste le *fiamme* o riflessi al cono terminale. Qualche scossa leggera era stata avvertita a Nicolosi da non molte persone quattro giorni prima del principio dell'eruzione. Nella notte dal 22 al 23 furono registrate dall'Osservatorio geodinamico di Catania 23 scosse tutte strumentali.

La mattina del 23 alle ore 8 circa si vide alla base della Montagnola sollevarsi una piccola nube che in breve divenne un enorme pino, e quindi si vide la nube come propagarsi lentamente verso il basso per una lunghezza di qualche chilometro. L'Etna era entrato in periodo eruttivo. Dai paesi etnei e da Catania si cominciarono subito a udire i rombi ed i boati, ma la vista dell'Etna fu presto impedita da fitte nubi, mentre qua e là cadeva la pioggia mista a cenere più o meno abbondante.

Il teatro eruttivo è a sud-ovest della Montagnola e consta d'una fenditura leggermente tortuosa, con direzione predominante nord-nord-est sud-sud-ovest, lunga circa 1500 metri, sulla quale stanno allineate circa 10, o secondo altri, 15 bocche di portata minore col crescere dell'altezza. Mentre la parte inferiore della fenditura sta a 2000 m. sul livello del mare, la superiore si spinge a m. 2400. Le tre bocche inferiori, effusive ed esplosive nello stesso tempo, sono le più attive e, mentre forniscono la lava alla corrente, hanno in sei giorni determinato la formazione d'un cono a pareti ripidissime composto di sole scorie e di notevole altezza. Questo cono e gli altri minori allineati lungo la fenditura, sono stati battezzati, in seguito alla proposta del prof. P. Vinassa, col nome di Monti Riccò, ad onore dell'illustre e popolarissimo direttore dell'Osservatorio astronomico di Catania. Il cono principale s'è formato alla base del Monte Castellazzi ed ha colle sue abbondantissime deiezioni scoriacee obliterato in gran parte la prominenza prima esistente. Le esplosioni di queste bocche avvengono un po' inclinate verso occidente, e sebbene il vento predominante sia stato quello di nord-ovest, pure verso questo punto l'altezza del labbro del cratere si mostra maggiore. Delle bocche esplosive superiori nulla può dirsi con sicurezza, essendo quasi costantemente ravvolte da fitte nubi di vapore con alquanta

cenere ed essendo situate in un punto poco accessibile, ora specialmente che la strada che conduceva al cratere centrale è stata in quei dintorni del tutto distrutta. I terremoti che devono avere accompagnato la formazione di tale frattura sono stati violentissimi, ed oltre alle numerose fenditure che mostrano le pareti della casa cantoniera (Osservatorio meteorico alpino) distante appena 400 metri dal cratere inferiore, lo attestano le fenditure avvenute nel suolo, che io ho potuto accertare presso le bocche del 1892 un pò ad est delle bocche attuali, la cui direzione è nord-sud e rese bene evidenti da sprofondamenti e spaccature nello strato di neve gelata che copre uniformemente quel suolo così instabile. Le esplosioni, durante il breve tempo che mi è stato dato osservarle si susseguono a varî periodi e con varia intensità; non corrispondono in forza colla emissione di materia lavica ma piuttosto coll'emissione di vapori e detriti. Mentre nelle ultime due eruzioni venivano avvertiti costantemente i boati persino da Catania, in quest'ultima, di carattere prevalentemente effusivo, non sono stati avvertiti o debolmente, che i primi due giorni.

La sabbia, emessa soltanto durante i primi due giorni, è stata in quantità assai scarsa, anche vicino al teatro d'eruzione, mentre è stata più abbondante una cenere finissima grigio-bruna. Il cono terminale in tutto questo periodo ha conservato la massima calma. La mattina del quarto giorno (26 marzo) ho potuto osservare dal lato orientale dell'Etna l'emissione continua e tranquilla d'una fitta colonna di vapori e così pure durante il quinto. Il 28 di mattina mostrava dei piccoli sbuffi di vapore seguentisi ad intervalli di 2 minuti. Nei giorni seguenti, nei pochi intervalli durante i quali era possibile osservarlo, non dava segno di attività straordinaria.

Il carattere speciale di questa eruzione è la fluidità straordinaria della lava e, conseguenza di quella e della ripida pendenza, l'enorme velocità della corrente lavica. Formatasi la fenditura il mattino del 23 marzo verso le 8 e 30, la sera verso le 22 la lava invadeva già il piano di San Leo, dopo aver percorso una distanza approssimativa di 6-7 chilometri, con una velocità di circa m. 700 all'ora. Da alcuni mi è stato assicurato che, durante le prime tre ore, tale velocità salì persino ad un chilometro all'ora. Conseguenza della fluidità straordinaria e della forte pendenza è la strettezza della corrente presso alle origini e l'aver seguìto i letti dei torrenti formando parecchie cascate per buon tratto del suo corso. Giungendo alle falde settentrionali del Monte San Leo vi si è spinta risalendo in su come l'onda d'un torrente, per una diecina di metri. Due cascate terribilmente belle ha formato ad oriente del Monte Faggi: la superiore di circa 30 m., l'inferiore di oltre 40 m. e la velocità che quivi ha preso è cosa veramente sorprendente. Alla base di tali dislivelli essa diminuisce poi sino a poco meno d'un metro al secondo e si nota allora nella massa un debole ondeggiamento simile a quello delle acque d'un fiume e causato da oscillazioni dovute all'elasticità della massa.

Veri e proprî fenomeni d'erosione furono notati dal prof. P. Vinassa in varî punti della corrente. In alcuni punti, specialmente là dove è piccola la pendenza, si osserva il fenomeno curioso della lava che scorre in senso inverso della corrente principale. Questo ho potuto osservare sulle falde meridionali di Monte Rinazzi, dove un piccolo braccio si è staccato dalla corrente principale correndo verso tramontana ed insinuandosi tra le falde di questo antico cratere ed i fianchi, alquanto distanti, della corrente lavica del 1892. In un piccolo cratere situato sulle pendici occidentali del Monte Rinazzi si è insinuato un piccolo braccio della corrente riempiendo l'antica cavità senza restar legato alla corrente principale che per un braccio assai ristretto. È appunto a sud di questo monte, dove fino a pochi giorni fà si stendevano vigneti e frutteti rigogliosi sopra un piano ridente, che il torrente di lava ha incominciato ad espandersi trasformando il paesaggio in un campo di morte e di rovina.

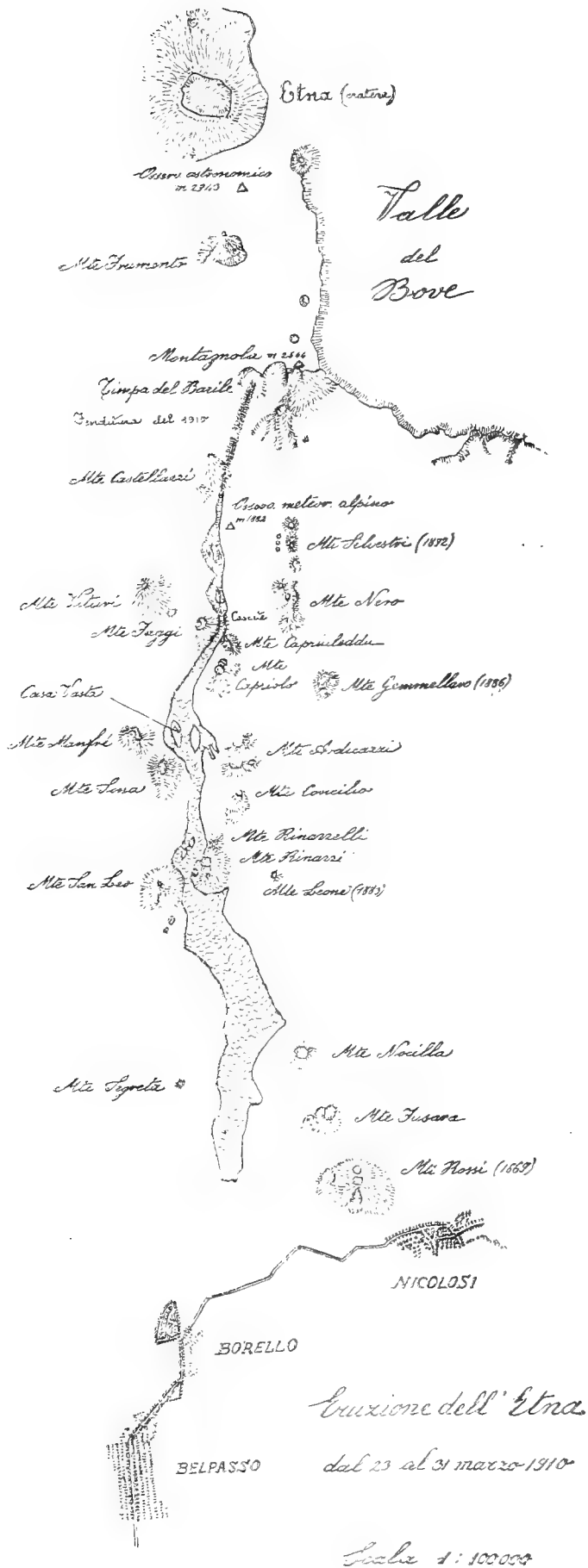
Guardando adesso il piano dalla vetta di San Leo, non vedesi che una squallida estensione di lava fumante che qua e là va crollando, sollevando delle colonne turbinose di vapori, mentre un'atmosfera satura di gas cloridrici rende impossibile la respirazione. La corrente raggiunge quivi la massima larghezza (circa 700-800 metri) e prosegue poi per altri quattro chilometri sino alla regione fertilissima giacente ad ovest dei Monti Rossi a circa 750 m. d'altezza sul mare. Questo è il percorso compiuto in otto giorni appena e che in lunghezza supera d'un terzo quello delle eruzioni del 1886 e 1892. La velocità che ha il fronte della corrente ho potuto calcolare che varia ordinariamente intorno ai 15 metri l'ora.

Il 29 marzo, essendomi recato all'Osservatorio meteorico alpino, vicinissimo alle bocche d'emissione, calcolai la velocità di quel tratto di corrente intorno ai cinque metri al secondo; avveniva proprio allora un aumento nello sgorgo della lava. La sera del 31 la velocità del fronte è aumentata anch'essa variando dai 35 ai 50 metri l'ora, ed è evidente che tale aumento di velocità debba corrispondere alla spinta impressa circa 48 ore prima da uno sgorgo più abbondante.

La corrente della quale ho potuto tracciare con sufficiente esattezza il corso sulla carta topografica dello Stato Maggiore italiano alla scala dell' 1 : 50,000, ha percorso sino ad oggi 31 marzo intorno ai 10 chilometri. Si conserva indivisa per tutta la sua lunghezza eccetto tre piccoli bracci ad ovest di Monte Ardicazzi che si sono presto arrestati ed alcuni altri che si staccano appena dalla corrente a San Leo, ad ovest di Monte Nocilla e di Monte Fusara.

La corrente ha seguìto, dopo il passaggio della gola di San Leo, i fianchi orientali delle colate, variamente sovrapponentisi, del 1892 e del 1886, sorpassandole ad ovest di Monte Nocilla e di Monte Fusara, e coprendole in parecchi punti per varî tratti. In contatto colle lave del 1892 viene pure

Eruzione dell' Etna dal 23 al 31 marzo 1910

Scala 1 : 100000

ad oriente di Monte Faggi, presso le due maravigliose cascate di cui sopra s'è parlato. Mentre l'altezza della corrente è di pochi metri nel corso superiore, nel piano di San Leo supera certamente in alcuni punti i 40 metri e nella parte inferiore della colata oscilla fra i 6 ed i 15 metri.

La natura petrografica della lava è simile a quella delle ultime due eruzioni del 1886 e 1892, salvo la povertà in interclusi pirossenici, specialmente nelle varietà compatte di essa e l'abbondanza di feldspati labradoritici. L'olivina è abbondante e in piccoli grani, ed a prima vista questa lava sembra di un impasto essenzialmente feldspatico. È grigio-nera, alquanto porosa, pesantissima.

Mi ha sorpreso la grande abbondanza degli interclusi quarzosi bianchi, del tutto simili a quelli descritti per la prima volta da O. Silvetri in varie Memorie per le lave dell'eruzione del 1883 e ad altri delle posteriori eruzioni del 1886 e 1892 che, insieme con altri interclusi di differente natura sono tuttora oggetto d'un mio studio.

La temperatura delle lave è stata misurata dal mio amico Barone De Fiore e riconosciuta oscillante fra i 1200 ed i 1300 gradi, poichè giunse a rammollire una verga di ferro di 9 mm. di diametro della sezione, ed a fondere una verga di rame a sezione di 3 mm.

Degni di nota sono i piccoli turbini osservati lungo la corrente in varî punti, alle volte abbastanza violenti e causati dagli squilibrî, provenienti dalla differenza di temperatura degli strati d'aria lungo la corrente e gli altri più freddi e lontani; questi movimenti sono favoriti talvolta dalla configurazione del suolo, come presso i Monti San Leo e Rinazzi.

Notevole è la quantità di vapori emessi dalle lave dove maggiormente sono accumulate e le sublimazioni di cloruro d'ammonio in molti punti rivestono i fianchi di belle incrostazioni. Camminando a fianco della corrente, specialmente sottovento, la respirazione viene resa difficile dall'abbondanza di vapori cloridrici; presso i crateri si avverte talora un odore penetrante di anidride solforosa. È stato osservato spesso il fenomeno delle fiamme presso alle bocche, ed il colore di queste è stato predominantemente azzurrognolo. Il colore della lava, la notte, è d'un rosso chiaro ed immediatamente presso al cratere si avvicina talora al bianco.

L'emissione di vapori, al contrario dell'eruzione dell'aprile dello scorso anno 1908, è stata in generale poco abbondante e le sabbie, come sopra si disse, scarsissime. Durante i primi giorni da Catania e dai paesi del versante meridionale dell' Etna fu osservata durante il giorno la luce rossa, ed a Catania solo la prima notte piovve, in quantità assai scarsa, una sabbia finissima, nera.

Fisiologia vegetale — *Ricerche sull'assimilazione dell'azoto atmosferico libero nei vegetali* (¹). Nota preliminare dei dott. EVA MAMELI e GINO POLLACCI, presentata dal Socio GIOVANNI BRIOSI.

Già fin dal 1771 il Priestley affermava che alcune piante possono assorbire azoto dall'aria, e più tardi l'Ingenhousz estendeva quest'affermazione a tutte le piante. Ma i loro risultati vennero contrastati successivamente dal De Saussure, dal Woodhouse, dal Senebier e più specialmente dal Boussingault.

È nota la celebre polemica che si svolse tra quest'ultimo ed il Ville durante la seconda metà del secolo XIX, l'uno negando, l'altro affermando che le piante assimilano l'azoto atmosferico non combinato, pur basandosi entrambi su un gran numero di esperienze. La soluzione della disputa venne sottoposta al giudizio di una Commissione, la quale, dopo aver ripetuto col Ville e nelle identiche condizioni, le esperienze da lui fatte, venne alla seguente conclusione che crediamo opportuno riportare:

« L'expérience, faite au Muséum d'Histoire Naturelle par M. Ville, « est conforme aux conclusions qu'il avait tirées de ses travaux anté- « rieurs ».

È strano che questa conclusione, che dà piena ragione al Ville, sia poi stata dimenticata, o male interpretata dalla massima parte degli autori (²), forse causa la grande autorità del Boussingault il quale ebbe gran numero di partigiani.

Il problema principale dell'assimilazione *diretta* dell'azoto atmosferico per parte delle Fanerogame, venne in seguito trascurata, specialmente a causa del grande interesse destato dagli importantissimi lavori del Berthelot, del Hellriegel, del Frank, del Willfarth, dello Schloesing, del Laurent, del Winogradsky, ecc. che scopersero e studiarono l'assimilazione dell'azoto atmosferico dovuta ai micromiceti, sia isolati che in simbiosi con piante superiori, attirando essi per lungo tempo sui loro geniali lavori l'attenzione degli studiosi. Nè le Memorie che comparvero negli ultimi anni sull'assimilazione dell'azoto libero atmosferico per opera delle piante superiori, portarono nuova luce su questo importante problema. Dimodochè si può dire che tutt'ora manchino esperienze rigorose (³), e risultati che valgano a decidere in modo

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto botanico della R. Università di Pavia.

(²) Pfeffer, Physiol. veget., I, pag. 401. Paris, 1904.

(³) Come tali non possiamo ritenere quelle recenti del Jamieson, che sono condotte sia istologicamente, che chimicamente, con metodo così poco rigoroso, che non dànno assolutamente seria garanzia sulle affermazioni in esse contenute, come dimostreremo nella Memoria completa.

sicuro tale questione, che, rimasta insoluta dopo la polemica Boussingault-Ville, viene a torto, dalla massima parte degli studiosi, considerata come risolta in favore dell'opinione del Boussingault [1].

Allo scopo di portare nuovo contributo alla risoluzione di questo importantissimo argomento, noi istituimmo delle ricerche, i cui risultati, per quanto non possano venire ancora generalizzati a molte famiglie di piante, pure crediamo bene di rendere ora noti, anche per prender data.

Il metodo seguito nelle nostre ricerche fu il seguente: le piante sottoposte ad osservazione si fecero sviluppare in matracci o sotto campane ermeticamente chiuse e accuratamente sterilizzate, entro le quali passava dell'aria completamente esente da composti azotati e da microrganismi. I primi venivano trattenuti facendo passare l'aria ambiente, prima attraverso lunghi tubi contenenti pomice imbevuta di acido solforico concentrato, e di potassa, poi attraverso boccie di lavaggio ad acido solforico e ad acqua; i secondi per mezzo di filtri di cotone sterilizzato. Prima di farla entrare nelle campane, l'aria veniva arricchita di una determinata quantità (4 °/₀) di anidride carbonica pura. Le culture vennero fatte, parte in mezzo liquido, parte in sabbia di quarzo purissima. I liquidi nutritizî, sterilizzati, erano esenti da nitriti, nitrati, sostanze ammoniacali e sostanze organiche azotate ed avevano la seguente composizione:

	Per le crittogame e le piante acquatiche	Per le fanerogame
KH_2PO_4	gr. 0,2	gr. 0,4
$CaSO_4$	" 0,2	" 0,4
$MgSO_4$	" 0,2	" 0,4
$Fe_2(PO_4)_2$	" 0,02	" 0,04
H_2O	" 1000	" 1000

Nelle nostre esperienze cercammo di studiare l'assimilazione dell'azoto in piante appartenenti a gruppi, classi ed ordini diversi, seminando per le crittogame spore e talli piccolissimi, e per le fanerogame, sia terrestri che acquatiche, semi, anch'essi sterilizzati e di dimensioni molto piccole, o, per alcune specie, piccoli propaguli.

Data la tenue quantità di azoto contenuta in questo materiale, è lecito dedurre che la notevole quantità di esso, contenuta nelle piante ben sviluppate che noi ottenemmo, debba provenire dall'azoto libero dell'atmosfera, non avendone esse a disposizione da alcun'altra sorgente; l'analisi chimica infatti ha confermato ciò.

La descrizione completa del metodo, i numerosi risultati ottenuti e le relative analisi saranno pubblicate allorchè le esperienze tuttora in corso saranno ultimate.

[1] Tanto più che nelle esperienze del Boussingault a noi pare non siano state del tutto evitate le cause d'errore, come avremo occasione di dimostrare.

Per ora rendiamo noti i risultati seguenti:

1). Sottili sezioni, fatte al microtomo, di talli di licheni (*Physcia parietina*, *Cladonia furcata*, *Lecidea* sp.) messe sopra quarzo e gesso, inumiditi con la soluzione nutritizia suddetta, diedero dopo qualche mese, col metodo di cultura sopra descritto, dei piccoli talli normali. Risultato eguale si è ottenuto sinteticamente usando, invece delle piccole sezioni, spore di licheni e di *Protococcus*.

2). Piccoli protalli di felci posti nelle stesse condizioni di cultura, hanno vegetato e prodotto piantine agamiche ben sviluppate. Queste culture non progredirono però per molto tempo, per cause diverse. Sono in corso altre esperienze in proposito.

3). Ottimi risultati ottenemmo anche con culture di *Salvinia auriculata* e di *Azolla caroliniana*. Messe in liquido nutritizio, secondo il metodo sopra descritto, delle piantine con poche foglie, queste vegetarono e si moltiplicarono dando — come nelle condizioni normali — numerose altre piantine a foglie ben sviluppate, che si rendevano indipendenti l'una dall'altra. Era quindi evidente la non piccola quantità di azoto libero che esse avevano assimilato dall'atmosfera. Così da quattro piantine che avevano complessivamente 10 foglie, dopo otto mesi di cultura, se ne sono ottenute 92; in altra cultura durata 45 giorni, da 200 foglie se ne ebbero 479 e analoghi risultati abbiamo ottenuto costantemente da numerose altre culture.

4). Fra le piante superiori, quelle che ci hanno dato finora migliori risultati sono state le *Lemne* (*major* e *minor*), dalle quali ottenemmo costantemente, partendo da poche foglioline, la formazione di numerose piante prodottesi per gemmazione. Esempio: 200 foglie di *Lemna major*, pesanti gr. 0,6185, diedero dopo 41 giorni di cultura 454 foglie, pesanti gr. 1,8425, realizzando quindi un aumento in peso fresco di gr. 1,2240, ossia del 197,89 %.

5). Piante di diverse specie (*Anthurium*, *Salvinia*, *Lemna*, *Tradescantia*, *Salvia*, *Begonia*, *Canna*, ecc.) tenute per molti giorni sotto campana in aria confinata, ne assorbirono una parte (come veniva facilmente dimostrato da appositi manometri — con termometro per la correzione — applicati alle campane) e l'analisi dell'aria rimasta dimostrò che nel maggior numero dei casi era avvenuta (in tali condizioni) una diminuzione nella percentuale dell'azoto gasoso. L'azoto libero è stato dunque assorbito dalle piante mantenute per un certo tempo in aria confinata.

È bene notare che nei liquidi di cultura, esaminati dopo un lungo periodo di vegetazione, non si trovarono i bacteri nitrificati, nè alcuna traccia di azoto combinato.

Le nostre esperienze ci dimostrarono altresì che non tutte le piante sono egualmente capaci di tale assimilazione. Questo fatto verrebbe a giustificare in parte le controversie che sin qui hanno dominato su quest'argo-

mento, e forse è da attribuirsi ad esso la convinzione, generalmente accettata, della non assimilazione dell'azoto libero atmosferico per parte dei vegetali superiori, convinzione che ha ritardato la risoluzione di un problema tanto importante per la Fisiologia vegetale e per la Biologia in genere, per quanto il metodo dimostrativo da seguirsi fosse assai semplice.

Riportiamo in questa Nota preventiva alcuni dati ottenuti dalle analisi fatte, riservandoci di riferire per esteso i risultati complessivi.

Il metodo seguito per la ricerca quantitativa dell'azoto contenuto nelle piante fu quello di Kjeldahl modificato dall'Jodlbauer, che è il più indicato per l'analisi dell'azoto nelle piante, poichè dà modo di calcolare l'azoto totale in esse contenuto, compreso quello dei nitrati.

Risultati:

I. *Azolla caroliniana*. Durata della cultura: un mese. Aumento dell'N in peso dopo la cultura 75,67 %.

II. *Lemna major*. Durata della cultura: quaranta giorni. Aumento dell'N in peso dopo la cultura 89,47 %.

III. *Lemna minor*. Durata della cultura: quaranta giorni. Aumento dell'N in peso dopo la cultura 133,33 %.

Per l'analisi dei gas usammo per l'ossigeno tanto il metodo Lindemann quanto quello con l'acido pirogallico, e per l'anidride carbonica la potassa caustica.

I gas combustibili eventualmente presenti venivano bruciati in pipetta eudiometrica. L'azoto era calcolato per differenza. Gli apparecchi usati furono quelli di Hempel e di Gino Pollacci.

Risultati:

I. *Salvinia auriculata*. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 2,77 %.

II. *Anthurium* sp. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 12,98 %.

III. *Tradescantia* sp. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 6,11 %.

IV. *Salvia* sp. Durata della cultura: due mesi. Diminuzione in volume dell'N nell'aria confinata 3,71 %.

Questi ultimi risultati non hanno valore come dati analitici quantitativi perchè la percentuale dell'azoto diminuita, dipende dalla quantità d'aria contenuta entro la campana e soprattutto dallo sviluppo e dal numero degli organi vegetativi della pianta, fattori dei quali non tenemmo conto, ma dimostrano in modo certo che la pianta ha assorbito dell'azoto libero.

Patologia vegetale. — *Ricerche istologiche su diversi vitigni in rapporto al grado di resistenza alla fillossera.* Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

In precedenti lavori ho espresso la convinzione che le cause della resistenza antifillosserica di alcune viti, risiedano, oltre e più che nella composizione chimica dei succhi, nelle proprietà specifiche di irritabilità e di reazione dei tessuti alle conseguenze della puntura dell'insetto.

Un medesimo tessuto, il parenchima corticale della radice, è irritabile infatti in un grado molto diverso nei varî vitigni. Mentre il sapore dei succhi, che determina soprattutto il grado di ricettività, più facilmente può venire a variare per le mutabili condizioni dell'ambiente, in modo che viti non accètte alla fillossera possono diventarlo, e viceversa, le proprietà di irritabilità, per quanto in ultima analisi si esplichino esse pure con fenomeni di natura chimica, sono più intimamente collegate ai caratteri specifici strutturali delle varie viti, costituendo fattori intrinseci di resistenza, meno facilmente modificabili dal mondo esterno.

Le proprietà chimiche di molte sostanze elaborate dalle radici possono determinare effettivamente una resistenza dovuta a un minimo grado di ricettività, ma una semplice variazione nelle condizioni di clima e di terreno, può far scomparire un simile carattere. La decantata resistenza di vitigni nostrali in speciali condizioni di *habitat*, quando essa non dipenda da alcune circostanze ormai note, è spesso riferibile a una simile causa. Se, oltre a questo, altri fattori non intervengono, una tale resistenza è solo temporanea, perchè determinata da condizioni esterne che possono subire le maggiori modificazioni. Al contrario, le proprietà specifiche di irritabilità e di reazione del citoplasma all'azione parassitaria della fillossera, quando si esplichino in una misura sufficiente, possono conservare una resistenza anche elevata in quelle viti nelle quali il grado di ricettività per l'insetto siasi notevolmente aumentato per variazioni avvenute nella composizione chimica dei succhi.

Nella generalità dei casi però un minimo grado di ricettività va unito sempre a una debole irritabilità dei tessuti, che non reagiscono con abbondanti proliferazioni cellulari.

Ci si potrebbe quindi domandare se l'esistenza di questi due ordini di fattori della resistenza, come fenomeni distinti fra loro, non sia che apparente, se cioè la supposta maggiore o minore irritabilità non possa dipendere da una variazione di virulenza dell'attacco (durata e profondità relativa del succhiamento, quantità e qualità delle secrezioni versate nei tessuti) in seguito allo stimolo più o meno attivo che sostanze di vario valore nutritivo possono

esercitare sulla fillossera. E d'altra parte, potremmo anche domandarci se. astrazion fatta dal sapore dei succhi, una minima irritabilità dei tessuti potesse costituire una causa determinante di per se stessa un grado minimo di ricettività ([1]).

I numerosi fatti che intorno a tali questioni ho potuto osservare da alcuni anni, mi permettono di mantenere una distinzione netta fra questi due ordini di fattori, per quanto riconosca che in certi casi le loro singole azioni si sovrappongono per modo che ben difficilmente se ne può valutare il giusto valore come parziali determinanti del risultato complessivo.

È evidente che una stretta correlazione esiste fra le qualità chimiche dei succhi e le proprietà di irritabilità del citoplasma. È solo la maggiore variabilità delle prime, sotto l'influenza di agenti esterni, che rende possibile una giusta interpretazione dell'azione singola di questi fattori nel determinare il grado di resistenza.

Nella presente Nota desidero riferire sommariamente di estese ricerche che ho eseguite intorno a una questione che riguarda appunto una parte di quanto ora ho accennato, e cioè se e quale correlazione esista fra la struttura normale della radice e l'entità dell'alterazione prodotta dalla fillossera. Io mi sono proposto, portando un accurato esame sulle principali specie pure, varietà ed ibridi della vite, di stabilire se una tale correlazione, già ammessa da alcuni studiosi e da altri negata, sussista effettivamente. Queste mie ricerche sono state eseguite dal 1908 ad oggi sopra materiale raccolto nei R. R. vivai di viti americane di Palermo, Spadafora (Messina), Noto, Vittoria, Lecce, Arizzano (Lago Maggiore), della R. Scuola di agricoltura di Conegliano, della Scuola nazionale d'agricoltura di Montpellier, e in altre molte località della Sicilia e del continente. Ai direttori dei vivai suddetti, al prof. L. Ravaz rivolgo i più sentiti ringraziamenti per il cortese aiuto prodigatomi mettendo a mia disposizione l'interessante e ricco materiale delle loro collezioni ampelografiche.

Eterorizia. — Una distinzione delle radici secondo diversi tipi di struttura e di funzione è stata studiata ([2]) sino ad ora nelle dicotiledoni erbacee, anche perenni; per le piante legnose esistono scarse ricerche ([3]), assolutamente

([1]) Per la fillossera gallicola, più che per la radicicola, la formazione di una iperplasia dei tessuti rappresenta senza dubbio una condizione necessaria per il normale svolgersi del suo sviluppo.

([2]) Rimpach A., *Beiträge zur Physiologie der Wurzeln* (Berichte der deutsch. bot. Ges. 1899, pag. 18); Tschirch A., Ueber die Heterorhizie bei Dykotylen Flora, vol. 94, 1905, pag. 68; Neuber E., *Beiträge zur vorgleichenden Anatomie der Wurzeln vorwiegend offizineller Pflanzen, mit besonderer Berücksichtigung der Heterorhizie der Dicotylen* (Inaugural Diss. Breslau, 1904).

([3]) Von Halten H., *Beiträge z. vergl. Anat. d. Wurzeln., nebst Bemerk. über Wurzethyllen, Heterorhizie, Lentizellen* (Diss.). Göttingen, 1908.

fanno difetto i dati sopra i diversi tipi di radici a struttura secondaria. Nella vite è frequente il caso di osservare due sorta di radici erbacee: un primo tipo caratterizzato da un piccolo diametro, da uno sviluppo assai precoce degli elementi legnosi, da un rapido accrescimento in lunghezza, da un mediocre sviluppo del parenchima corticale. Questo tipo fonde in sè le caratteristiche della radice di fissazione e di nutrizione. Un secondo tipo presenta uno sviluppo notevole del parenchima corticale, a cui deve il grosso diametro, gli elementi legnosi si differenziano più tardi e in minor numero, l'accrescimento in lunghezza è lento. Si tratta di una radice a materiali di riserva.

Questa distinzione può farsi anche per le radici a struttura secondaria. Nel primo tipo è assai sviluppato il corpo legnoso e le fibre liberiane; il midollo è spesso cambiato in un grosso cordone di libriforme, lignificato, o molto ridotto. Il parenchima corticale e i raggi midollari sono poco sviluppati. Il secondo tipo è caratterizzato da un massimo sviluppo dei tessuti parenchimatici, da una notevole riduzione del libro duro, spesso da pochi fasci legnosi separati tra loro da larghissimi raggi midollari. A parità di età, il diametro di queste radici è assai maggiore di quelle del primo tipo, ma il differenziamento dei singoli tessuti è in uno stadio molto più arretrato in questi organi di riserva. Anche la caduta della prima peridermide vi è ritardata.

Confrontando fra di loro una radice legnosa di una *Riparia* o di una *Rupestris* con una di *Vinifera* le differenze anatomiche che ne resultano corrispondono, in un modo alquanto esagerato, a quelle esistenti tra una radice di fissazione e una di riserva di uno stesso vitigno.

È per questo che in molti ibridi europei-americani una tale eterorizia ha più un significato anatomico determinato dall' incrocio, che quello di una necessaria divisione di lavoro fisiologico. Il clima a lungo periodo di siccità dei paesi meridionali esagera frequentemente un tal fenomeno; la formazione di radici carnose rappresenta in tal caso per molti ibridi europeo-americani una vera necessità fisiologica, ma anche un pericolo per la maggior facilità con la quale la fillossera attacca questi organi ricchi di materiali nutritivi [1]. Ma di ciò mi occuperò più oltre. Ora desidero far osservare che nella valutazione dei caratteri anatomici delle diverse radici, anche di uno stesso vitigno, si devono costantemente tener presenti queste oscillazioni strutturali.

Esame di alcuni caratteri istologici che possono essere considerati come indici di resistenza. — I caratteri anatomici sui quali diversi studiosi hanno rivolto la loro attenzione ritenendoli come altrettante cause o esponenti del grado di resistenza sono i seguenti: spessore del parenchima corticale (Foëx), larghezza dei raggi midollari (Foëx-Müller), spessore delle pa-

[1] L'analisi chimica svela in queste radici una maggior quantità di zuccheri, e una diminuzione degli acidi (ossalico, malico) e delle sostanze tanniche.

reti cellulari e larghezza delle punteggiature in questi tessuti (Foëx-Müller), lignificazione più o meno precoce (Foëx), supposta esistenza di speciali meristemi nella corteccia (Szigethi-Gyula), sviluppo maggiore o minore delle fibre liberiane (Pichi), che funzionerebbero da corpi isolanti ostacolando la trasmissione dell'irritazione (Szigethi-Gyula), precocità della caduta della prima peridermide (Millardet-Ravaz).

Ho studiato 70 vitigni di diversa resistenza confrontandone i caratteri istologici della peridermide, del parenchima corticale, del libro, del legno, del midollo e dei raggi midollari.

Non potendo fare nella presente Nota la descrizione per esteso di tutti questi caratteri nei varî vitigni, mi limito ora a far conoscere quali sono quelli che possono esser considerati quali indici di un elevato grado di resistenza. Essi sono: la durata della prima peridermide, maggiore o minore precocità e sviluppo del libro duro, rapporto fra la larghezza dei raggi midollari primarî e il diametro del cilindro legnoso.

Dirò subito che questi caratteri non hanno mai un valore assoluto e che il resultato del loro esame in molti casi deve essere accompagnato da quello di altre proprietà fisiologiche della radice per trarne una conclusione soddisfacente sul possibile comportarsi di un vitigno sconosciuto di fronte agli attacchi della fillossera. In altra Nota farò conoscere quali altri caratteri dipendenti dall'attività fisiologica dei diversi tessuti radicali possono completare quelli forniti dalla struttura istologica.

La determinazione esatta, sistematica delle particolarità anatomiche della radice ha però una grande importanza nello studio degl'ibridi. Si può con un attento esame delle radici di 1, 2 e 3 anni stabilire quali caratteri del genitore più resistente e in qual misura sieno rappresentati nella radice dell'ibrido. Spesso i caratteri morfologici esterni delle parti aeree o delle radici stesse non permettono di apprezzare nel giusto valore questo rapporto di relativa fusione dei caratteri dei genitori (1). È ben vero che tessuti identici a quelli della madre o del padre possono comparire o scomparire in una stessa radice senza alcuna regolarità, ma si possono sempre determinare le oscillazioni massime che presentano i caratteri predominanti.

I caratteri da trascurare sono: spessore del parenchima corticale, che è subordinato alle proprietà della peridermide, spessore delle pareti cellulari dei tessuti parenchimatici, larghezza delle punteggiature, lignificazione più o meno precoce.

Circa l'esistenza di speciali meristemi supposta da Szigethi-Gyula ho già mostrato come questa opinione, pure avendo un fondamento di verità, sia stata determinata da un errore di osservazione (2).

(1) In generale i caratteri anatomici delle radici degl'ibridi non concordano con quelli morfologici presentati dalle foglie.

(2) Cfr. questi Rendiconti, vol. XVIII, 1909, pag. 491.

Esaminerò ora brevemente il valore da assegnarsi a ciascuno dei tre caratteri sunnominati (¹).

Durata della peridermide periciclica. — Nelle radici che conservano per molto tempo, anche sino a 3 anni, la prima peridermide, questo tessuto sul principio del secondo anno ha un'attiva formazione di nuovi strati suberosi, che subentrano a quelli più esterni che si lacerano per il continuo accrescimento della radice.

Questa semplice disquamazione del sughero, senza che si formi un nuovo strato fillogenico più profondo può essere confusa, in un esame affrettato, con la formazione di un vero ritidoma. È col formarsi di questi nuovi strati che hanno origine le lenticelle, mancanti nei primi tempi dell'esistenza della peridermide periciclica. Questa disquamazione del sughero varia nella sua frequenza da vitigno a vitigno.

La lunga permanenza della prima peridermide permette al parenchima corticale di raggiungere un notevole spessore. Sono in generale le viti che hanno il loro *habitat* normale in paesi caldi, in terreni soggetti a siccità che presentano un notevole ritardo nella perdita della peridermide periciclica. In due modi si esplica l'azione della maggiore precocità della caduta di questo tessuto in rapporto alla resistenza:

1) col produrre la pronta esfoliazione di una gran parte delle tuberosità formatesi sulla corteccia secondaria (Milladert, Ravaz);

2) con l'accelerare la perdita o la notevole diminuzione di cellule o strati cellulari a proprietà meristemali, facilmente irritabili e che normalmente sotto l'influenza della puntura fillosserica producono le tuberosità. È un fatto che ho bene accertato quello della latente natura meristemale nella generalità delle cellule del parenchima corticale della corteccia avente ancora la prima peridermide.

La puntura della fillossera è a questo riguardo un indicatore sensibilissimo.

L'entità dell'alterazione nelle radici a struttura secondaria decresce infatti con l'avanzare dell'età. Gli strati cellulari sensibili sono localizzati man mano sempre più verso la periferia. Un parenchima corticale di una radice di *Riparia* o di *Rupestris* al 2° anno di età è paragonabile a quello di una radice di 4 o 5 anni di *Vinifera.* Le proprietà meristemali delle cellule della corteccia da latenti si fanno manifeste all'inizio e nel principio del periodo vegetativo, è possibile allora stabilire nei diversi strati cellulari l'esistenza e il valore di questa attività di accrescimento. Essa varia da vi-

(¹) M. Gard (*Études anat. sur les Vignes et leurs Hybrides artificiels*) ha preso in considerazione il calibro dei vasi, la grandezza dei grani di amido, sviluppo del midollo, numero delle cellule a rafidi, raggi midollari, ecc. ma non è riuscito a stabilire un criterio di sicura comparazione. I suoi resultati sono soprattutto senza importanza per ciò che riguarda i caratteri anatomici della resistenza.

tigno a vitigno ed è ben lungi dall'essere eguale in tutte le radici con lo stesso periodo di permanenza della prima peridermide. Questa diversità nel numero e nella localizzazione degli strati attivi della corteccia acquista una speciale importanza per spiegare la penetrazione più o meno profonda e la struttura delle tuberosità nei diversi vitigni.

La caduta della peridermide periciclica ha per effetto di spostare verso la periferia gli elementi proliferanti e di diminuirne il numero in corrispondenza dei raggi midollari. Col differenziarsi della corteccia terziaria i singoli settori della radice vengono a perdere quella relativa individualità, anatomica e fisiologica, che si conserva lungamente in molte radici a debole resistenza e che è manifestata, nei casi più salienti, dall'enorme e preponderante sviluppo dei raggi midollari primarî in confronto all'esiguo e ritardato sviluppo di quelli secondarî. È per tal modo che la maggiore o minore precocità della caduta della peridermide periciclica può indirettamente indicarci che certi caratteri *giovanili* della radice, i quali rappresentano un grave pericolo nel caso di un'infezione fillosserica, possono perdurare più o meno. È da notare però che la durata della prima peridermide non può darci un'utile indicazione che nel caso della sua brevità. La sua permanenza sino alla fine del 2° o all'inizio del 3° anno non potrà indicarci altro che la possibilità del verificarsi di tuberosità penetranti; l'irritabilità delle cellule, suscettibili di dividersi, essendo subordinata a molti altri fattori che conviene determinare isolatamente. Esistono così molte viti resistenti come la *Berlandieri*, la *Cordifolia*, la *Rotundifolia*, la *Coriacea*, la *Cinerea*, che presentano una lunga permanenza della peridermide periciclica, anche sino al 3° anno, e delle quali non pertanto è nota la difficoltà a fillosserarsi o a produrre tuberosità penetranti. A questo riguardo è interessante lo studio della radice dei *Cissus*, piante non attaccate dalla fillossera e presentanti per certi riguardi una struttura simile a quella della *Rotundifolia*, *Berlandieri*, *Cordifolia*, *Cinerea*. L'immunità dei *Cissus* è dovuta, come quella della *Rotundifolia* prevalentemente alle proprietà chimiche dei succhi delle radici e alcune di queste proprietà sono partecipate dalle viti che, pur presentando una lunga permanenza della peridermide periciclica, sono resistenti alla fillossera.

Nella *Riparia*, nella *Rupestris*, e un po' meno nella *Candicans*, la caduta della prima peridermide è precoce. Specialmente nelle prime due viti senza alcun dubbio si deve ammettere fra le altre una causa della resistenza di natura prettamente anatomica. Nella *Riparia* più che nella *Rupestris* il parenchima corticale resta notevolmente ridotto dopo la caduta della prima peridermide, il suo accrescimento intercalare è quasi soppresso, i raggi midollari corticali accrescendosi per la quasi esclusiva attività del cambio. Nella *Rupestris* invece è più palese la permanenza di proprietà meristemali nelle cellule del parenchima corticale terziario. La resistenza di questo vi-

tigno è da attribuirsi anche a proprietà chimiche fortemente variabili sotto l'influenza dell'ambiente, e lo stesso io credo debba avvenire per la *Candicans.* In Sicilia relativamente ho trovato più di frequente delle tuberosità sulle radici di *Rupestris* che non su quelle di *Riparia.*

Ravaz ha dimostrato come la *Berlandieri* posta in condizioni di essere attaccata dalla fillossera formi delle tuberosità assai penetranti quali la struttura della sua radice fa prevedere.

L'attitudine di questa vite a crescere nei climi caldi e secchi spiega come la sua coltivazione nella Italia meridionale non abbia determinato una sensibile variazione nel grado della sua resistenza, dovuta prevalentemente a proprietà chimiche dei succhi radicali:

Negl'ibridi fra *Riparia* e *Rupestris* la peridermide periciclica cade al primo anno, come in ambedue i genitori, con un leggero ritardo in confronto della *Riparia.*

Negl'ibridi *Rupestris-Vinifera* la caduta della prima peridermide è ritardata sino alla fine del 2° anno e anche sino all'inizio del 3°, prevalendo il carattere di *Vinifera.* Ciò avviene tanto se la *Rupestris* ha funzionato da padre o da madre nella produzione dell'ibrido. La più lunga permanenza della peridermide periciclica si presenta meno preponderante negl'ibridi *Berlandieri-Riparia*, *Berlandieri-Rupestris*, nei quali la caduta di questo tessuto avviene nel 2° anno, con un sensibile ritardo in confronto alla *Berlandieri.* È indifferente se questa vite abbia funzionato come padre o madre.

Alcune proprietà, probabilmente di natura chimica [1], che nelle radici di *Berlandieri* determinano un minimo grado di ricettività, si trasmettono in modo molto variabile ai prodotti d'incrocio di questa vite con altre specie, cosicchè essa non comunica spesso ai suoi ibridi tutte le sue qualità migliori di resistenza. È per questa ragione forse che dall'incrocio della *Riparia*, della *Rupestris* con la *Berlandieri* derivano vitigni i quali non posseggono un grado di resistenza eguale a quello dei genitori. Il ritardo della caduta della prima peridermide rappresenta senza dubbio una diminuzione delle proprietà peculiari della *Riparia* e della *Rupestris*, senza che una tale diminuzione sia compensata dall'acquisto, in grado sufficiente, dei fattori prevalentemente chimici della resistenza proprî alla *Berlandieri.* Questo fatto diventa ancora più manifesto negl'ibridi *Berlandieri* × *Vinifera* e *Vinifera* × *Berlandieri* nei quali la predominanza dei caratteri di *Vinifera* non può essere equilibrata dalle minime e variabili proprietà di resistenza ereditate dalla *Berlandieri*, a meno che condizioni favorevoli di suolo e di clima non ne esaltino la benefica influenza.

Gl'ibridi *Riparia-Labrusca*, *Riparia-Aestivalis*, *Rupestris-Aestivalis* ecc., si comportano per ciò che riguarda la caduta della peridermide quasi come gl'ibridi di *Riparia-* e di *Rupestris-Vinifera.*

[1] Ne tratterò prossimamente.

Negl'ibridi complessi la caduta della prima peridermide avviene tardi (al 3° anno o alla fine del 2°) se fra i genitori entra a far parte anche un solo vitigno presentante questo carattere. La *Solonis* (*Riparia* — *Rupestris* — *Candicans*?) cambia la peridermide alla fine del 1° o più frequentemente all'inizio del 2° anno (la *Candicans* alla fine del 1° anno).

È interessante il fatto che vitigni a durata egualmente lunga della prima peridermide, come la *Vinifera, Labrusca, Berlandieri*, determinino un diverso ritardo della caduta di questo tessuto nei loro ibridi con *Riparia*, o con *Rupestris*; la *Vinifera* a questo riguardo sembra possedere un maggiore antagonismo con le specie resistenti, ciò che è dimostrato anche dal modo di comportarsi di altri caratteri anatomici (libro duro) negl'ibridi di 1ª generazione.

In altra Nota dirò di quest'ultimo tessuto e di altri caratteri.

Fisiologia — *Ricerche sugli effetti dell'alimentazione maidica. Azione del succo gastrico sulla zeina e sulla gliadina* [1]. Nota II di S. Baglioni, presentata dal Socio L. Luciani.

Chi si propone, mediante lo studio analitico delle diverse proprietà fisiologiche, di pervenire alla conoscenza del *valore nutritivo* di una determinata sostanza alimentare, deve indubbiamente, come uno dei quesiti preliminari, risolvere quello della sua *digeribilità* per opera dei varî succhi digerenti attivi normalmente nel tubo gastro-enterico.

È pertanto che le presenti ricerche fanno parte integrante del mio piano generale di analizzare coi metodi fisiologici gli effetti dell'alimentazione maidica [2].

Allo scopo di poter meglio, mediante il confronto, rilevare le eventuali differenze nel comportamento della zeina all'azione dei fermenti proteolitici del corpo animale, istituii contemporaneamente le medesime prove sulla gliadina, che è la corrispondente proteina (solubile in soluzioni alcooliche) della farina di grano, e talora anche sull'albumina d'uovo (Merck) sgrassata.

Nella presente Nota espongo i risultati ottenuti col *succo gastrico* (pepsina), riserbandomi di comunicare più tardi quelli ottenuti col succo pancreatico.

[1] Nell'eseguire la prima serie delle seguenti ricerche fui aiutato dal dott. Ferruccio Baffoni, che ne utilizzò i risultati per comporre la sua tesi di laurea in medicina e chirurgia. Inoltre i risultati di queste ricerche furono argomento di una comunicazione sommaria al Congresso della Società italiana per il progresso delle scienze (Padova, sett. 1909, cfr. Atti, pag. 536).

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, sed. del 3 maggio 1908, vol. XVII, 1° sem., 609-617.

Preparazione delle proteine. — Fu applicato il secondo metodo accennato nella Memoria precedente, tanto per estrarre la zeina, che la gliadina. Per quest'ultima si utilizzò quella specie di farina di grano, che porta commercialmente il nome di *fiore*.

Per sgrassare le due proteine mi servii anche stavolta dell'acetone.

Su alcune proprietà della zeina così preparata tenni parola nella Memoria precedente. Per la gliadina dirò, che è una polvere finissima e candida (più bianca della zeina, che presenta sempre una lievissima tinta giallognola). Inoltre, a differenza della zeina, i granuli di gliadina messi in acqua lentamente si rigonfiano e si agglutinano. Non oppone perciò a questo solvente la stessa resistenza ad essere disgregata.

La reazione del biureto manifestata dalla gliadina avviene più prontamente che per la zeina; il che forse dipende appunto dalla accennata sua proprietà di non essere totalmente insolubile nell'acqua.

Aggiungerò che da un chilogrammo di farina di grano (fiore) si estrassero gr. 33,300 di *gliadina* sgrassata e disseccata, mentre da un chilogrammo di farina di mais si ottennero gr. 35,400 di *zeina*.

Il *succo gastrico* mi fu fornito per tutte le esperienze dal piccolo stomaco di un cane operato alla Pawlow il 25 marzo 1909, tuttora vivente in ottime condizioni. L'acidità totale del succo determinata più volte col metodo titrimetrico si trovò pressochè costante, lievemente più forte di una soluzione $\frac{n}{10}$ di HCl, ossia corrispondente incirca ad una soluzione 0,4 % di HCl. Era per lo più perfettamente limpido e fluente: raramente commisto a qualche fiocco di muco. In questo caso lo si filtrava prima di adibirlo nelle ricerche.

Con aggiunta di una goccia di soluzione diluita di Cu_2SO_4 non dava precipitato: l'aggiunta successiva di soda determinava un leggerissimo colore violetto.

Il *metodo* sperimentale della prima serie di ricerche consisteva generalmente nel porre una piccola quantità (oscillante tra 15 e 20 cgr.) di zeina o gliadina in 5 cc. di succo gastrico, senza aggiunta di antisettici, a digerire in una stufa regolata a 37°-40° C. In seguito posi a digerire quantità di proteine notevolmente maggiori (fino 5 gr. per volta) in quantità di succo corrispondentemente più forti (25, 50 e 100 cc.).

Gli effetti della digestione erano stabiliti:

a) tenendo conto della quantità delle proteine disciolte;

b) eseguendo su campioni prelevati dal liquido soprastante la reazione del biureto nel modo seguente: 1) aggiungevo al liquido una goccia di soluzione diluita di Cu_2SO_4 per vedere se insorgevano precipitati, e 2) aggiungevo poi alcune goccie di soda. Tenevo conto della colorazione assunta immediatamente dal liquido, che era violetta o rossa, con tutte le gradazioni intermedie a seconda della prevalenza dei peptoni formatisi.

Sapendo per le ricerche del Pawlow e della sua scuola che una non lieve importanza nell'attività digerente del succo si deve ascrivere alla *qualità* del cibo assunto dall'animale e determinante la secrezione gastrica del piccolo stomaco, sperimentai con succhi provenienti da diversa alimentazione (carnea, lattea, di pane di grano, di polenta). A questo riguardo dirò subito, che a prescindere dall'azione, più o meno forte e rapida dei varî succhi, stabilita già dal Pawlow e dai suoi allievi, non ho potuto ottenere risultati concordanti e manifesti, che mi autorizzino ad affermare o a negare recisamente che essi posseggano delle proprietà digerenti *specifiche* in rapporto alla sostanza, che determina la loro secrezione. Debbo però riconoscere che le esperienze istituite in proposito non possono considerarsi esaurienti, perchè relativamente scarse di numero e non tutte potute eseguire con rigorosità di metodo scientifico.

Risultati. Condenserò i risultati della prima serie di ricerche riferendone le conclusioni generali.

Gliadina. 1. I granuli di gliadina a contatto col succo gastrico, scesi al fondo del vasetto, cominciano dapprima a rigonfiarsi per poi subire in un tempo relativamente breve (una o due ore) l'azione digerente del succo. La quale azione si manifesta col diminuire dello strato solido di sostanza sino quasi alla scomparsa. La reazione del biureto eseguita su un saggio del liquido sovrastante indica la presenza di peptoni assumendo la colorazione rosea-rossa.

2. Prolungando la digestione si osserva un comportamento diverso. Il liquido di limpido o quasi limpido va facendosi lattiginoso, finchè man mano si separano dei fiocchi bianchi di precipitato, che si vanno depositando sul fondo, in parte anche lungo le pareti del vasetto. Questo precipitato bianco-fioccoso non presenta più l'aspetto granulare della gliadina e nel decorso di uno o due giorni raggiunge il suo massimo volume. Anche la reazione del biureto è diversa, poichè torna ad assumere colorazione violetta.

Zeina. 1. I granuli di zeina a contatto col succo gastrico, scesi al fondo del vasetto, non si rigonfiano, ma mantengono ben netto il loro carattere granulare. Subiscono tuttavia anche essi l'azione dissolvente del succo, però in un tempo relativamente più lungo della gliadina. Lo strato solido va infatti diminuendo man mano, senza però quasi mai scomparire del tutto. Il minimo volume è raggiunto dopo 24-48 ore.

La reazione del biureto, eseguita su un saggio del liquido soprastante, indica molto chiaramente la presenza di peptoni assumendo di regola una nettissima colorazione rossa.

2. Per quanto si prolunghi la digestione non si osserva successivo intorbidamento di liquido e formazione di precipitato bianco fioccoso. Così pure la reazione del biureto dà sempre colorazione rossa.

Da questi risultati si deduce, innanzi tutto, che il succo gastrico di cane ha azione digerente tanto sulla gliadina che sulla zeina, colla differenza che quest'ultima oppone alla detta azione una resistenza notevolmente maggiore.

Gliadosi e *zeosi*. I prodotti di digestione — che si possono indicare coi nomi di *gliadosi* e *zeosi* — presentano molte proprietà già note per altri proteosi.

Oltre infatti alla accennata loro reazione caratteristica del biureto offrono le seguenti proprietà.

Per prepararli filtrai i liquidi di digestione; i filtrati furono neutralizzati e quindi evaporati a una temperatura di 60° C circa. Dapprima si ottiene una sostanza giallognola di consistenza e tenacia bituminosa, che si distende a fili. Completamente disseccata e polverizzata finemente si presenta di color bianco-grigio, fortemente igroscopica. Ha il grato odore caratteristico dei peptoni. Precipita abbondantemente con soluzioni di acido fosfovolframico Solubile in alcool a 75°.

Dai risultati delle precedenti ricerche emerge però un altro fatto, che cioè, col prolungare dell'azione del succo gastrico sui prodotti di digestione della gliadina, questi si ritrasformano in composti proteici che si separano di nuovo dal liquido. Ciò non accade affatto o per lo meno in una maniera insensibile per i prodotti di digestione della zeina.

All'intento di approfondire questo ultimo fenomeno istituii una seconda serie di esperienze, di cui reputo opportuno riferire in dettaglio le due seguenti.

Esperienza I.

26 agosto 1909. Ore 16.

Si pongono *cinque* grammi di gliadina e *cinque* di zeina rispettivamente con *cento* cc. di succo gastrico filtrato in due bottiglie a tappo smerigliato a digerire in istufa a 40° C. Per controllo si pone nella stessa stufa un vasetto contenente solo succo gastrico.

27 agosto, ore 8.

Il vasetto della gliadina mostra precipitato bianco fioccoso depositato sul fondo e lungo le pareti. Liquido torbido lattescente.

Quello della zeina contiene liquido chiaro trasparente, sul fondo si riconosce uno strato di zeina granulare ricoperto da uno straterello bianco polverulento.

Il vasetto del succo gastrico non mostra cambiamenti di sorta.

Si aspirano dal liquido, sovrastante i depositi, *dieci* cc. tanto dal vasetto della gliadina, che da quello della zeina. Si versano in due vasetti distinti (di cui indicheremo per brevità col nome di G_1 quello contenente i dieci cc. di gliadina e di Z_1 quello contenente i dieci cc. di zeina), che si ripongono alla stufa a 40°. Mentre il liquido, così aspirato, proveniente dalla bottiglia della gliadina è latteo, lasciando riconoscere nel suo seno dei finissimi granuli bianchi natanti, quello della zeina è perfettamente limpido.

Il rimanente mestruo delle due bottiglie si filtra, e del filtrato limpidissimo di ambedue le digestioni si aspirano *cinque* cc. per ciascuna, che si ripongono in vasetti distinti parimenti in istufa a 40°, indicando con G_2 il vasetto e il liquido della gliadina

e con Z_2 quello della zeina. Ambedue questi liquidi sono al momento in cui si collocano nel termostato perfettamente trasparenti.

Ore 11,45. G_1 contiene abbondanti fiocchi bianchi in parte già depositati sul fondo e lungo le pareti. G_2, Z_1. e Z_2 perfettamente limpidi.

Ore 16,45. Tanto G_1 che G_2 contengono un liquido lattiginoso bianco opaco, con fiocchi sedimentati manifesti in G_1. Z_1 e Z_2 perfettamente limpidi e trasparenti.

Nel contempo si osserva, che tanto il filtrato della gliadina che quello della zeina, da cui provengono G_2 e Z_2, mantenuti alla temperatura ambiente (20-24° C) sono ambedue inalterati, ossia totalmente limpidi.

In seguito questi due filtrati sono neutralizzati e se ne preparano, per evaporazione i *gliadosi* e *zeosi*, che pesati allo stato più secco possibile risultano:

gliadosi = gr. 4,500
zeosi = gr. 4,400.

I residui della digestione rimasti sul filtro sono parimenti disseccati e pesati.

Residuo della gliadina = gr. 0,650
» » zeina = gr. 1

Quest'ultimo lascia perfettamente riconoscere tutti i caratteri della zeina granulare inalterata. È solo un po' più colorato intensamente in giallo. Il residuo della gliadina non pare invece potersi del tutto identificare colla gliadina granulare. È di colore grigiastro.

28 agosto, ore 9.

In G_1 e in G_2 si è depositato uno spesso strato solido fioccoso bianco (con una lieve punta in giallognolo) dello spessore di 2 a 5 mm. in G_1 e di 2 mm. in G_2.

In Z_1 si nota sul fondo un tenuissimo straterello biancastro polverulento. In Z_2 e nel vasetto contenente solo succo gastrico nessun precipitato.

I liquidi sovrastanti di G_1 e G_2 sono lattiginosi, mentre quelli di tutti gli altri vasetti sono perfettamente limpidi.

Ore 18. Identiche condizioni.

Nè si manifestarono ulteriori modificazioni nei seguenti giorni.

Esperienza II.

11 ottobre 1909. Ore 9,50.

1 gr. di gliadina e 1 gr. di ovalbumina (Merck) sgrassata si pongono ciascuno con 20 cc. di succo in due grandi pesafiltri a digerire in istufa a 40° C. I granuli di ovalbumina si rigonfiano e in parte si dissolvono.

Ore 11,30′. Ambedue le sostanze sono quasi totalmente disciolte. I mestrui sono filtrati.

Il filtrato della gliadina è alquanto opaco lattiginoso, l'altro è limpidissimo. Di ciascun liquido si aspirano due parti aliquote, che si versano in due vasetti a tappo smerigliato, e di cui indicheremo con G_1 e G_2 quelli contenenti il liquido proveniente dalla digestione della gliadina, e con A_1 e A_2 quelli del liquido dell'ovalbumina. Tanto G_2 che A_2 prima di essere rimessi, insieme agli altri due, nella stufa a 40° vengono riscaldati a bagnomaria alla temp. di 92° C. Non mostrano coaguli, anzi G_2 si chiarifica dopo tale trattamento.

Reazione del biureto dei due filtrati: per quello della gliadina rosso-viola intenso, per quello dell'albumina rosso-porpora intenso.

Ore 14.30′. Nei quattro vasetti non si nota apprezzabile cambiamento.

12 ott. Ore 8,55′.

In A_1 si osserva una sottile nubecola di precipitato pulverulento al fondo del vaso, mentre il liquido sovrastante è completamente limpido.

In A_2 nessun cambiamento.

In G_1 si nota abbondantissimo precipitato bianco fioccoso che dal fondo si eleva al di sopra della metà della colonna del liquido, che è opaco latteo.

In G_2 si vede al fondo un lievissimo precipitato bianco fioccoso, mentre il liquido sovrastante è limpido.

Biureto, rosso-viola per tutti i liquidi, più intensamente rosso per A_2.

Alle ore 17,30′ dello stesso giorno e nei giorni successivi si notarono identiche condizioni.

Risultati. Dalle suesposte esperienze risulta dunque, chiaramente, che il succo gastrico di cane esercita sulla gliadina una duplice azione, dopo averla scissa cioè in prodotti proteici più semplici (peptoni: gliadosi), in una fase successiva trasforma questi in composti, che precipitano e si depositano sul fondo. Tenendo conto del fatto che la reazione del biureto, mentre dapprima colla sua colorazione rossa indica la presenza di peptoni, successivamente torna a mostrare colorazione violetta, si potrebbe ritenere che nella seconda fase si formino composti proteici più complessi dei peptoni. Ossia il succo gastrico sarebbe capace, in questo secondo periodo, di ricostituire dai gliadosi proteine più complesse.

Sta di fatto inoltre, che riscaldando previamente il liquido a 92° C si impedisce questa seconda azione del succo gastrico, il che farebbe credere trattarsi di una vera azione enzimatica.

Il suddescritto fenomeno potrebbe sembrare analogo a quello noto col nome della reazione di Danilewski, ossia della cosidetta formazione di plasteine o di coagulosi. Sebbene anche io inclini a ritenere che sia essenzialmente della stessa natura, pur tuttavia esistono delle differenze, che desidero porre in rilievo. Nel caso su descritto infatti, non solo trattasi di proteine vegetali, ma si ottiene la precipitazione con una concentrazione di peptoni relativamente molto lieve e di più la si osserva come fenomeno, che succede immediatamente e nello stesso mestruo alla proteolisi. Essa è inoltre *specifica*, almeno quantitativamente, se non qualitativamente, della gliadina. Infatti non l'ho osservata, se non in una misura quasi insensibile, per l'albumina d'uovo e per la zeina. La quale ultima proteina ha pure tante altre proprietà fisico-chimiche in comune colla gliadina.

Tornando finalmente a considerare i risultati delle presenti ricerche dal punto di vista, da cui avevo preso le mosse, concluderò che la gliadina e la zeina mostrano notevoli differenze di comportamento all'azione del succo gastrico di cane: a) *La zeina oppone una resistenza molto maggiore della gliadina ad essere digerita, ossia trasformata in prodotti proteici peptoniformi (gliadosi e zeosi)*; b) *mentre, inoltre, i gliadosi sono capaci di subire per opera del succo gastrico, in una fase successiva, la trasformazione in composti proteici probabilmente più complessi, che precipitano e si separano dal liquido, gli zeosi restano invece inalterati.*

Anatomia. — *Ricerche sopra la segmentazione del romboencefalo* [1]. Nota del dott. Primo Dorello, presentata dal Socio F. Todaro.

Dopo che V. Baer nel pollo, e Bischoff nel cane, notarono che la vescicola cerebrale posteriore presenta durante una determinata epoca del suo sviluppo delle ripiegature, che più tardi scompaiono completamente, le ricerche su queste formazioni caratteristiche si sono fatte sempre più numerose, ed in modo vario si è tentato di dare una spiegazione morfologica del loro valore.

Già Remak nel pollo aveva potuto rilevare che vi era una certa corrispondenza tra queste pieghe, gli archi viscerali ed i nervi craniali.

Ma colui, che per primo descrisse accuratamente i rapporti tra queste pieghe e gli abbozzi dei nervi craniali, fu il Béraneck, che studiò l'argomento prima nella lucertola e poi nel pollo.

Orr, nel 1887, dette a queste pieghe il nome di neuromeri, e ne descrisse accuratamente la costituzione istologica. Seguirono poi le ricerche di Hoffmann, di Mc. Clure, di Wakers, di Zimmermann, di Locy, di Hill, di Froriep e di molti altri, fatte su materiale molto numeroso e con intendimenti e risultati molto differenti.

Si scoprì che l'abbozzo del sistema nervoso centrale poteva presentarsi segmentato, quando ancora si trovava allo stato di doccia largamente aperta e questa neuromeria si chiamò primaria per distinguerla da quella, che si ha quando il tubo midollare è chiuso, e che fu detta secondaria. Ma non si potè dimostrare la omologia e la corrispondenza delle due neuromerie.

Si cercò di determinare il numero dei segmenti cerebrali, ma anche nello stesso romboencefalo, in cui la metameria è più netta, i risultati non furono concordi.

La maggior parte degli autori riscontrò nel romboencefalo la presenza di sette segmenti; alcuni però ne distinsero solo sei, altri un numero maggiore di sette.

Anche i rapporti degli encefalomeri cogli abbozzi dei nervi craniali e colla vescicola auditiva non sono stati da tutti gli autori descritti nello stesso modo, anzi vi fu anche chi ammise che durante lo sviluppo questi rapporti potessero variare.

Ma le maggiori discordanze si ebbero nel modo di interpretare il valore morfologico di queste ripiegature della parete cerebrale, poichè di fronte agli

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia normale della R. Univ. di Roma.

autori, che credettero di poter attribuire a queste ripiegature un valore metamerico, ne abbiamo altri, i quali le ritennero come prodotti meccanici, dovuti sia al soverchio accrescimento della parete cerebrale entro uno spazio limitato, sia alla trazione esercitata dagli abbozzi dei nervi craniali, sia alla pressione dei segmenti mesodermali.

Avendo avuto occasione di studiare in una serie di embrioni di Plecotus, che va da uno stadio con cinque paia di protovertebre fino ad embrioni di nove millimetri di lunghezza, il modo col quale compaiono, si sviluppano e successivamente spariscono i segmenti del romboencefalo, ritengo opportuno riassumere in questa breve Nota i fatti osservati, tanto più che essi possono spiegarci la ragione per la quale alcuni autori si sono trovati in disaccordo nell'attribuire a determinati rombomeri gli abbozzi dei nervi craniali.

La prima manifestazione della divisione del romboencefalo in varî segmenti si riscontra in embrioni con sei paia di protovertebre, quando ancora l'abbozzo del sistema nervoso trovasi allo stato di doccia largamente aperta e si è appena accennata la divisione delle tre vescicole cerebrali primitive. A quest'epoca il romboencefalo per mezzo di tenui solchi esterni, ai quali corrispondono creste interne, si presenta diviso in tre segmenti, due caudali di grandezza presso a poco uguale, ed uno rostrale che ha una lunghezza doppia di quella dei segmenti. La costituzione istologica è uguale tanto nella parte media, che alle due estremità del segmento.

In embrioni con undici paia di protovertebre, quando l'abbozzo cerebrale si è trasformato in un tubo aperto solo nel neuroporo anteriore, e quando l'organo auditivo è rappresentato da un semplice ispessimento ectodermale, si trovano quattro segmenti romboencefalici, dei quali i primi tre, salvo l'avvenuta chiusura, sono identici a quelli osservati nello stadio precedente, mentre il più caudale si presenta di nuova formazione. Di questi quattro rombomeri il terzo presenta già ben distinto l'abbozzo gangliare dell'acustico, il quarto sta in stretto rapporto colla vescicola auditiva.

In embrioni con dodici paia di protovertebre è avvenuta la chiusura del neuroporo anteriore ed hanno incominciato a manifestarsi nei rombomeri le caratteristiche differenziazioni istologiche. Caudalmente ai quattro rombomeri osservati nello stadio antecedente se ne sono aggiunti altri due. Si hanno così ora sei rombomeri. Il primo, che è lungo circa il doppio degli altri, nella sua metà caudale sta in rapporto coll'abbozzo gangliare del quinto paio, il secondo non presenta abbozzo gangliare, il terzo sta in rapporto coll'acustico-faciale, il quarto col fondo della depressione auditiva.

In embrioni con ventidue paia di protovertebre si trova che il primo rombomero degli stadî precedenti e che si era sempre presentato molto più lungo degli altri, si è diviso in due, uno rostrale, che darà l'abbozzo cerebellare, ed uno caudale, che è rimasto in rapporto coll'abbozzo gangliare del quinto paio.

I successivi rombomeri quindi, senza cambiare affatto i loro rapporti, aumentano di uno il loro numero seriale: perciò, allo stato di massimo sviluppo dei rombomeri si ha che il primo è il cerebellare, il secondo è il rombomero del trigemino, il terzo è privo di abbozzo gangliare, il quarto appartiene all'acustico-faciale, il quinto sta in rapporto colla vescicola auditiva, il sesto porta l'abbozzo gangliare del glossofaringeo ed il settimo quello del vago.

Negli embrioni di cinque millimetri, poco dopo la comparsa del velo marginale, comincia la riduzione dei rombomeri, che si può dire completa in embrioni di nove millimetri.

Questa riduzione va di pari passo colle profonde modificazioni di forma che presenta il romboencefalo. Essa procede dapprima caudorostralmente, quindi scompaiono successivamente il settimo, il sesto ed il quinto rombomero.

Più tardi il terzo rombomero si ispessisce notevolmente, perde la sua forma concava, presenta una forte protuberanza entro la cavità del romboencefalo e gradatamente assorbe nel suo sviluppo anche il quarto, che così sparisce completamente.

L'ultimo a ridursi è il secondo rombomero, che corrisponde alla parte più dilatata del romboencefalo. La sua riduzione però non è completa, in quanto che la parte più dorsale di esso conserva la sua forma concava e si trasforma negli angoli laterali del quarto ventricolo e nella parte vicina dei recessi laterali.

Le osservazioni fatte negli embrioni di Plecotus mi permettono di venire alle seguenti conclusioni:

La rombomeria si inizia a tubo midollare aperto, *rombomeria primaria*, e si completa quando il tubo midollare si è chiuso, *rombomeria secondaria*.

Nel passaggio dalla rombomeria primaria alla secondaria, non succedono cambiamenti di rapporto colle parti vicine, ma le due rombomerie si comportano in modo che la rombomeria secondaria si manifesta come una ulteriore evoluzione della primaria.

La tardiva separazione del primo e secondo rombomero, che avviene quando già da molto tempo si sono resi evidenti i rapporti tra i singoli rombomeri ed i rispettivi abbozzi gangliari, ci dà ragione della diversità di vedute dei varî autori, i quali attribuirono lo stesso abbozzo gangliare ad un determinato rombomero, oppure al successivo, ovvero ritennero possibile che un determinato abbozzo gangliare durante lo sviluppo si spostasse da un rombomero all'altro.

I fatti da me osservati stanno a dimostrare come i rapporti tra abbozzi gangliari e rispettivi rombomeri si presentano costanti per tutta l'evoluzione dei rombomeri stessi.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

A. Rosati. — *Contributo allo studio cristallografico dell'Idocrasio del Vesuvio*. Pres. dal Socio Struever.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª Transunti.
2ª Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — Transunti. Vol. I-VIII. (1876-84).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — Rendiconti Vol. I-VII. (1884-91).
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — Rendiconti *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 8°.
Rendiconti *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1909). Fasc. 12°.
Memorie *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII. Fasc. 12°.
Memorie *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

Ermanno Loescher & C.° — *Roma, Torino e Firenze.*
Ulrico Hoepli. — *Milano, Pisa e Napoli.*

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 aprile 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 1° maggio 1910.* **N. 9.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 9°

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1° maggio 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sull'equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet sul piano.* Nota del Corrispondente Giuseppe Lauricella.

Nella mia precedente comunicazione: *Sopra alcuni potenziali logaritmici di strato lineare* [1] dimostravo l'esistenza di infinite linee piane chiuse, che chiamavo *speciali*, tali che per ognuna di esse il nucleo dell'equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet è non chiuso, ossia tali che esiste su ciascuna di esse uno strato semplice avente valori nulli nei suoi punti; e davo ancora dei criterî che possono servire ogni volta a verificare se la linea piana che si considera è speciale o no.

Qui mi occupo della costruzione dello strato semplice che risolve il problema di Dirichlet, ossia della risoluzione della detta equazione integrale di 1ª specie. Ordinariamente questo problema si risolve per i campi a tre dimensioni, trasformando il doppio strato che risolve il problema stesso di Dirichlet in strato semplice. Nella presente Nota, applicando la teoria delle equazioni integrali di 1ª specie, dimostro che la questione proposta equivale alla trasformazione del doppio strato, avente per densità la funzione arbitrariamente data, in strato semplice.

(1) Questi Rendiconti, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem. 1910 (6 marzo), pp. 250-260.

Della trasformazione di un doppio strato in strato semplice mi sono occupato per il caso delle tre dimensioni [1], applicando la teoria di Fredholm. Il caso delle due dimensioni, a causa delle singolarità che presenta, sopra tutto se la linea è speciale, va trattato a parte; e questo appunto qui faccio nei §§ 3, 4, 5, applicando ancora la teoria di Fredholm.

In fine, rammentando che i coefficienti dello sviluppo della funzione incognita di un'equazione integrale di 1ª specie in serie di funzioni ortogonali possono sempre esprimersi, come osservai nella mia Nota: *Sopra alcune equazioni integrali* [2], mediante i coefficienti della funzione data, trovo la condizione necessaria e sufficiente per la validità di tale sviluppo, il quale serve a dare una rappresentazione analitica diretta della soluzione del problema proposto.

Dovendo, in ciò che segue, richiamare spesso alcuni risultati sulle equazioni integrali di 1ª specie, contenuti nella mia Nota ora citata e nelle altre due: *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate* [3]; *Sull'equazione integrale di 1ª specie* [4], denoterò rispettivamente queste Note con L_1, L_2, L_3.

Circa alle notazioni adotterò qui quelle introdotte nella Nota sui potenziali logaritmici.

Equazione integrale di 1ª specie relativa al problema di Dirichlet.

1. Sia $\chi(s)$ una funzione finita e continua dei punti nella linea C. Supponiamo che esista uno strato:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi(s) \log r \, ds ,$$

la cui densità sia funzione finita e continua, tale che nei punti di C si abbia:

$$\Phi(s') = \chi(s'),$$

ossia:

$$\chi(s') = \frac{1}{2\pi}\int_C \varphi(s) \log r' \, ds . \tag{15}$$

Allora, in virtù della continuità della $\varphi(s)$, esisteranno e saranno finite

(1) *Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica.* Nuovo Cimento, serie 5ª, vol. XIII, 1907.

(2) Questi Rendiconti, vol. XVII, serie 5ª, 1° sem. 1908, pp. 775-786.

(3) Questi Rendiconti, vol. XVII, serie 5ª, 2° sem. 1908, pp. 193-204.

(4) Ibid., vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. 1909, pp. 71-75.

e continue lungo C (cfr. Nota precedente, § 1) le espressioni $\overline{\dfrac{d\Phi}{dn}}, \overline{\overline{\dfrac{d\Phi}{dn}}}$; e quindi sussisteranno le note formole [1]:

$$\text{(nei punti di } \sigma) \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \chi(s)\,\frac{d\log r}{dn}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\overline{\frac{d\Phi}{dn}}}\log r\,ds,$$

$$\text{(nei punti di } \sigma') \quad 0 = \frac{1}{2\pi}\int_C \chi(s)\,\frac{d\log r}{dn}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_C \overline{\frac{d\Phi}{dn}}\log r\,ds.$$

Posto:

$$W(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C \chi(s)\,\frac{d\log r}{dn}\,ds,$$

queste formole ci dicono che, se l'equazione integrale di 1ª specie (15) ammette una soluzione $\varphi(s)$ finita e continua, il doppio strato $W(\xi,\eta)$ potrà trasformarsi in strato semplice logaritmico tanto nel campo finito σ, quanto in quello infinito σ'.

2. Viceversa supponiamo che il doppio strato $W(\xi,\eta)$ possa trasformarsi in strato semplice logaritmico:

$$V(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C v(s)\log r\,ds$$

nel campo σ e in uno strato semplice logaritmico:

$$V'(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_C v'(s)\log r\,ds$$

nel campo σ'.

Posto:

$$\overline{W} = \lim_{P=s'} W \quad , \quad \overline{\overline{W}} = \lim_{P'=s'} W,$$

si ha, come è noto,

$$\overline{W} - \overline{\overline{W}} = -\chi(s');$$

e quindi, in forza dell'ipotesi fatta, potrà scriversi:

$$V(s') - V'(s') = \overline{W} - \overline{\overline{W}},$$

ossia:

$$\chi(s') = \frac{1}{2\pi}\int_C \{v'(s) - v(s)\}\log r'\,ds. \tag{16}$$

[1] La formola (5) della Nota precedente vale anche quando le funzioni A e B nel campo σ' si comportano come strati semplici logaritmici. Infatti basterà osservare che, in virtù delle (10), (11) di quella Nota, i termini della forma $\dfrac{\log\varrho}{\varrho}$ nello sviluppo di $B\dfrac{dA}{d\varrho} - A\dfrac{dB}{d\varrho}$ si eliminano.

Si introduca la serie di funzioni ortogonali:

$$(17) \qquad \psi_1(s)\,,\,\psi_2(s)\,,\,\dots$$

e la corrispondente serie di costanti:

$$(17)' \qquad \lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\,\dots\,,$$

tali che:

$$(18) \qquad \psi_i(s') = \frac{\lambda_i}{2\pi}\int_C \psi_i(s)\log r'\,ds\,.$$

Da questa equazione risulta intanto che *le* $\psi_i(s)$ *sono finite e continue lungo* C.

Si ha ancora che *la serie* (17) [e quindi anche la (17)′] *è infinita.* Infatti l'equazione integrale:

$$(19) \qquad \int_C \theta(s)\log r'\,ds = 0$$

non ammette alcuna soluzione effettiva (1) quando la linea C non è speciale, ed ammette una sola soluzione effettiva $v_1(s)$ quando C è speciale; mentre se la serie (17) fosse finita la (19) dovrebbe ammettere infinite soluzioni effettive, come risulta dalla teoria delle equazioni integrali (2).

Ciò premesso, si ha, in virtù delle (16), (18),

$$a_i = \int_C \chi(s)\,\psi_i(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_C\int_C \{v'(s') - v(s')\}\,\psi_i(s)\log r'\,ds\,ds' =$$

$$= \int_C \{v'(s') - v(s')\}\,ds'\,\frac{1}{2\pi}\int_C \psi_i(s)\log r'\,ds = \frac{1}{\lambda_i}\int_C \{v'(s') - v(s')\}\,\psi_i(s')\,ds'\,.$$

Le costanti $\lambda_i\,a_i$ sono allora i coefficienti relativi allo sviluppo dell'espressione $v'(s') - v(s')$ in serie delle funzioni $\psi_i(s')$; e quindi la serie $\sum_1^\infty {}_i\,\lambda_i^2\,a_i^2$ sarà convergente, in virtù del noto teorema di Riesz.

Se la curva C non è speciale, ciò è necessario e sufficiente per concludere che l'equazione integrale di 1ª specie (15) ammetterà una soluzione (3), la quale sarà data dalla formola:

$$\varphi(s) = v'(s) - v(s)\,.$$

(1) Conformemente alla nomenclatura introdotta nella mia Nota: *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIX, 1° sem. 1910, pp. 155-163], chiameremo *soluzione effettiva* dell'equazione integrale (19) ogni soluzione che è diversa da zero in punti di un insieme di misura non nulla.

(2) Vedi la Nota L_1, § 6; e la Nota L_2, Art. I, § 1.

(3) Picard, Comptes rendus, 14 juin 1909.

Se la curva C è speciale, bisogna aggiungere l'altra condizione [1]:

$$\int_C \chi(s')\, v_1(s')\, ds' = 0\,. \tag{20}$$

E questa è essa pure verificata dalla $\chi(s)$. Infatti, rammentando che nel caso di C linea speciale si ha per definizione:

$$\frac{1}{2\pi}\int_C v_1(s') \log r'\, ds' = 0\,,$$

dalla (16) risulterà appunto:

$$\int_C \chi(s')\, v_1(s')\, ds' = \int_C \{v'(s) - v(s)\}\, ds \frac{1}{2\pi}\int_C v_1(s') \log r'\, ds' = 0\,.$$

Per cui anche nel caso in cui la linea C è speciale, l'equazione integrale di 1ª specie (15) ammetterà una soluzione, la quale sarà data dalla formola [2]:

$$\varphi(s) = v'(s) - v(s) + \alpha\, v_1(s)$$

con α costante arbitraria.

Riassumendo si ha dunque il seguente riultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista uno strato semplice logaritmico a densità finita e continua, il quale nei punti di C *coincida con la funzione finita e continua* $\chi(s)$, *arbitrariamente data, è che il doppio strato* $W(\xi, \eta)$ *avente per densità la* $\chi(s)$ *possa trasformarsi in strato semplice tanto nel campo finito* σ, *quanto in quello infinito* σ'. *Note le densità degli strati semplici in cui si trasforma* $W(\xi, \eta)$ *nei due campi* σ, σ', *sarà pure nota la densità dello strato semplice richiesto.*

Trasformazione di un doppio strato in strato semplice.

3. Sia $\chi(s)$ una funzione finita e continua dei punti di C. Proponiamoci di trasformare nell'area finita σ il doppio strato $W(\xi, \eta)$ in uno strato semplice $V(\xi, \eta)$, la cui densità $v(s)$ sia una funzione finita e continua.

Supposta l'esistenza della funzione $v(s)$, si avrà che esiste ed è finita e continua lungo C la $\overline{\frac{dV}{dn}}$; quindi esisterà la $\overline{\frac{dW}{dn}}$ e sarà anch'essa finita e continua.

Si supponga inversamente che esista e sia finita e continua lungo C

(1) Vedi la Nota L_3, § 3.
(2) Vedi la Nota L_3, § 4.

la $\overline{\frac{dW}{dn}}$. Consideriamo l'equazione integrale di 2ª specie (di Fredholm):

$$2\,\overline{\frac{dW}{dn'}} = v(s') + 2\int_C \alpha(s', s)\,.\,v(s)\,ds \tag{21}$$

e le corrispondenti equazioni integrali omogenee e coniugate (6), (7) della precedente Nota. Come ivi fu dimostrato, l'equazione (6) ammette una sola soluzione $w_1(s) = \text{cost} \neq 0$; quindi, in virtù della teoria di Fredholm, condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (21) ammetta una soluzione è che si abbia:

$$\int_C w_1(s)\,\overline{\frac{dW}{dn}}\,ds = w_1(s)\int_C \overline{\frac{dW}{dn}}\,ds = 0\,.$$

Poichè $W(\xi, \eta)$ è funzione armonica nel campo σ, questa relazione sarà certamente verificata; ed allora, indicando con $v^*(s)$ una soluzione dell'equazione integrale (21), con $v_1(s)$ la densità del solito strato semplice $V_1(\xi, \eta)$ avente valore costante ($= H$) nei punti di C, e con β una costante arbitraria, avremo per la soluzione più generale della medesima equazione (21):

$$v(s) = v^*(s) + \beta\,.\,v_1(s)\,.$$

In virtù della proprietà del nucleo $\alpha(s', s)$, la $v(s)$ sarà, come la $v^*(s)$ e la $v_1(s)$, finita e continua lungo C.

Ciò premesso, si consideri lo strato $V(\xi, \eta)$ avente per densità la funzione $v(s)$. Si ha, in virtù della (1) della precedente Nota e della (21),

$$\overline{\frac{dV}{dn'}} = \frac{1}{2}\,v(s') + \int_C v(s)\,.\,\alpha(s', s)\,ds = \overline{\frac{dW}{dn'}}\,;$$

sicchè, qualunque sia il valore della costante β, le funzioni $V(\xi, \eta)$, $W(\xi, \eta)$ nei punti di σ differiranno fra di loro al più per una costante additiva; onde, indicando con $V^*(\xi, \eta)$ lo strato semplice logaritmico avente per densità la funzione $v^*(s)$ e con A una quantità costante, potremo scrivere:

$$V(s') - \overline{W} = V^*(s') + \beta H - \overline{W} = A\,. \tag{22}$$

Se la linea C non è speciale, sarà $H \neq 0$; per cui la costante A varierà al variare della costante β, e si potrà determinare quindi β in modo che risulti $A = 0$, ossia:

$$V(s') - \overline{W} = 0\,.$$

Allora si avrà:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad V(\xi, \eta) = W(\xi, \eta)\,.$$

Abbiamo così il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè nel campo σ, limitato da una linea non speciale C, il doppio strato $W(\xi, \eta)$ possa trasformarsi in strato semplice a densità continua, è che esista e sia finita e continua lungo C la $\overline{\frac{dW}{dn}}$.

4. Se la curva C è speciale, sarà $H = 0$; e la (22) potrà scriversi:

$$V(s') - \overline{W} = V^*(s') - \overline{W} = A; \tag{22'}$$

quindi si avrà:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \quad V(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) + A,$$

con A costante determinata ed indipendente da β. Poichè la linea C è speciale, non esisterà uno strato semplice distribuito lungo di essa e avente nei suoi punti valore costante diverso da zero; quindi se A è diverso da zero, il problema di trasformare il doppio strato $W(\xi, \eta)$ in strato semplice è impossibile.

Ora si ha, come è noto,

$$\overline{W} = -\frac{1}{2}\chi(s') + \int_C \alpha(s, s')\chi(s)\,ds;$$

per cui la (22)' diviene:

$$2V(s') = -\chi(s') + 2\int_C \alpha(s, s')\chi(s)\,ds + 2A.$$

Moltiplicando ambo i membri di questa equazione per $v_1(s')\,ds'$ e integrando a tutto il campo C, si ha:

$$2\int_C V(s') \,.\, v_1(s')\,ds' = -\int_C \chi(s') \,.\, v_1(s')\,ds +$$
$$+ 2\int_C\int_C \alpha(s, s')\chi(s)\,v_1(s')\,ds\,ds' + 2A\int_C v_1(s')\,ds';$$

e poichè:

$$2\int_C V(s') \,.\, v_1(s')\,ds' = \frac{1}{\pi}\int_C\int_C v(s)\,v_1(s')\log r'\,ds\,ds' =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_C v(s)\,ds\int_C v_1(s')\log r'\,ds' = 2H\int_C v(s)\,ds = 0,$$

e poichè ancora, in virtù della (7) della precedente Nota,

$$2\int_C\int_C \alpha(s, s')\chi(s)\,v_1(s')\,ds\,ds' =$$
$$= 2\int_C \chi(s)\,ds\int_C \alpha(s, s')\,v_1(s')\,ds' = -\int_C \chi(s) \,.\, v_1(s)\,ds,$$

risulterà

$$\int_C \chi(s) \, . \, v_1(s) \, ds = A \int_C v_1(s) \, ds \, ,$$

dalla quale, essendo [1]:

$$\int_C v_1(s) \, ds \neq 0 \, ,$$

si ricava che condizione necessaria e sufficiente, affinchè sia $A = 0$, è che la funzione data $\chi(s)$ soddisfaccia all'equazione:

$$\int_C \chi(s) \, . \, v_1(s) \, ds = 0 \, . \tag{23}$$

Abbiamo dunque il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè nel campo finito σ, limitato da una linea speciale C, il doppio strato $W(\xi, \eta)$ possa trasformarsi in strato semplice a densità continua, è che esista e sia finita e continua lungo C la $\overline{\overline{\dfrac{dW}{dn}}}$ e che la densità $\chi(s)$ di $W(\xi, \eta)$ verifichi la (23).

5. Si voglia ora trasformare nell'area infinita σ' il doppio strato $W(\xi, \eta)$ in strato semplice $V'(\xi, \eta)$ a densità $v'(s)$ finita e continua, sia la linea C speciale o no.

Anche qui si può notare che se esiste la $v'(s)$, l'espressione $\overline{\overline{\dfrac{dW}{dn}}}$ esisterà certamente e sarà finita e continua lungo C.

Viceversa supponiamo che esista e sia finita e continua lungo C la $\overline{\overline{\dfrac{dW}{dn}}}$. Si consideri l'equazione integrale di 2ª specie (di Fredholm):

$$2 \, \overline{\overline{\frac{dW}{dn'}}} = - v'(s') + 2 \int_C \alpha(s', s) \, . \, v'(s) \, ds \tag{21'}$$

e le corrispondenti equazioni integrali omogenee coniugate:

$$0 = - w_1'(s') + 2 \int_C w_1'(s) \, . \, \alpha(s, s') \, ds \, , \tag{6'}$$

$$0 = - v_1'(s') + 2 \int_C v_1'(s) \, . \, \alpha(s', s) \, ds \, . \tag{7'}$$

[1] Vedi la Nota precedente, § 5.

Sia $v_1'(s)$ una soluzione dell'equazione (7)'. La $v_1'(s)$ sarà finita e continua, in virtù delle proprietà del nucleo $\alpha(s', s)$; quindi dello strato semplice:

$$V_1'(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v_1'(s) \log r \, ds$$

esisteranno e saranno finite e continue le espressioni $\frac{\overline{dV_1'}}{dn}$, $\frac{\overline{\overline{dV_1'}}}{dn}$, e dalle formole (1), (2) della precedente Nota risulterà, tenuto conto della (7)',

$$\frac{\overline{\overline{dV_1'}}}{dn'} = -\frac{1}{2} v_1'(s') + \int_C v_1'(s) \,.\, \alpha(s', s) \, ds = 0 \,, \tag{24}$$

$$\frac{\overline{dV_1'}}{dn'} = \frac{1}{2} v_1'(s') + \int_C v_1'(s) \,.\, \alpha(s', s) \, ds = v_1'(s') \,. \tag{25}$$

Si ha poi:

$$0 = \int_C \frac{\overline{dV_1'}}{dn} \, ds = \int_C v_1'(s) \, ds \,;$$

sicchè la funzione $V_1'(\xi, \eta)$ è armonica nel campo σ', e quindi varrà per essa la formola (3') della precedente Nota, la quale, in virtù della (24), ci darà:

$$\int_{\sigma'} \Delta V_1' \, d\sigma' = 0 \,.$$

Di qui, avuto riguardo che la $V_1'(\xi, \eta)$ si annulla all'infinito, risulta:

$$V_1'(\xi, \eta) = 0$$

in tutti i punti del piano; e per conseguenza, tenuto conto della (25),

$$(\text{nei punti di C}) \quad v_1'(s) = 0 \,.$$

Adunque le (6)', (7)' non ammettono alcuna soluzione effettiva [1]; e quindi l'equazione integrale (21)' ammetterà una soluzione ed una solamente, che sarà finita e continua lungo C.

Si costruisca con questa soluzione $v'(s)$ lo strato semplice:

$$V'(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_C v'(s) \log r \, ds \,.$$

Si ha, in forza della (21)',

$$\frac{\overline{\overline{dV'}}}{dn'} = -\frac{1}{2} v'(s') + \int_C v'(s) \,.\, \alpha(s', s) \, ds = \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'} \,; \tag{26}$$

[1] La dimostrazione di questa proposizione data da Fredholm nella sua Nota: *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet* (Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900, n. 1, Stockholm, pp. 39-46) richiede maggiori condizioni sulla natura della linea C.

e poichè:

$$\int_C \frac{\overline{\overline{dW}}}{dn'}\, ds' = 0 \;\; , \;\; \int_C \frac{\overline{dV'}}{dn'}\, ds' = 0 \, ,$$

$$\frac{\overline{dV'}}{dn'} - \frac{\overline{\overline{dV_1}}}{dn'} = v'(s') \, ,$$

risulterà:

$$\int_C v'(s')\, ds' = 0 \, ;$$

e perciò la $V'(\xi , \eta)$ sarà armonica nel campo σ', appunto come la $W(\xi , \eta)$. In forza della (26) avremo dunque:

$$(\text{nei punti di } \sigma') \quad V'(\xi , \eta) = W(\xi , \eta) \, .$$

Si ha così il seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè nel campo infinito σ' *il doppio strato* $W(\xi , \eta)$ *possa trasformarsi in strato semplice a densità finita e continua, è che esista e sia finita e continua lungo* C *la* $\dfrac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$.

Esistenza e sviluppabilità della densità $\varphi(s)$.

6. Da tutto ciò che precede risulta che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale di 1ª specie* (15), *nella quale la funzione data* $\chi(s)$ *è finita e continua, ammetta una soluzione* $\varphi(s)$ *finita e continua, ossia affinchè esista uno strato semplice logaritmico a densità* $\varphi(s)$ *finita e continua, il quale nei punti di* C *coincida con la funzione data* $\chi(s)$, *è che il doppio strato* $W(\xi , \eta)$, *avente per densità la funzione* $\chi(s)$, *abbia le due derivate normali* $\dfrac{\overline{dW}}{dn} , \dfrac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$ *finite e continue lungo* C [1], *e inoltre che nel caso di* C *linea speciale la funzione* $\chi(s)$ *verifichi l'equazione* (23).

[1] In virtù del noto teorema di Liapounoff, che qui potremmo dimostrare usufruendo dei calcoli del § 5 (Cfr. per le tre dimensioni la mia citata Memoria del Nuovo Cimento, cap. III, § 14), basterà che esista e sia finita e continua lungo C una sola delle due espressioni $\dfrac{\overline{dW}}{dn} , \dfrac{\overline{\overline{dW}}}{dn}$. Rammentiamo ancora che si conoscono delle condizioni, per la funzione $\chi(s)$, sufficienti affinchè ciò avvenga (Vedi ad es. la mia Nota: *Sulle derivate della funzione potenziale di doppio strato*, inserita in questi Rendiconti, vol. XIV, 1° sem., serie 5ª, fasc. 2°, anno 1905, pp. 70-75).

7. Dimostrata l'esistenza della soluzione finita e continua $\varphi(s)$ dell'equazione integrale di 1ª specie (15), risulta, in forza del noto teorema di Hilbert-Schmidt,

$$\chi(s) = \sum_1^\infty {}_i\, a_i \psi_i(s),$$

in cui la serie al secondo membro è uniformemente convergente.

Posto allora:

$$V_i(\xi, \eta) = \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_C \psi_i(s) \log r \, ds,$$

si avrà, in virtù della (18),

$$V_i(s') = \frac{\lambda_i}{2\pi} \int_C \psi_i(s) \log r' \, ds = \psi_i(s');$$

e quindi, applicando un noto teorema del Volterra sopra le serie di funzioni armoniche [1], risulterà lo sviluppo:

$$\Phi(\xi, \eta) = \sum_1^\infty {}_i\, a_i V_i(\xi, \eta).$$

8. Per ciò che riguarda la sviluppabilità in serie di funzioni $\psi_i(s)$ della densità $\varphi(s)$, si può dire [2] che i coefficienti dello sviluppo sono $\lambda_1 a_1$, $\lambda_2 a_2, \ldots$ e che *se la serie* $\sum_1^\infty {}_i\, a_i \lambda_i \psi_i(s)$, *moltiplicata per* $\log r'$, *è integrabile termine a termine nel campo* C, *si avrà*:

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty {}_i\, a_i \lambda_i \psi_i(s). \tag{27}$$

Se poi rammentiamo che, supposte soddisfatte per la funzione $\chi(s)$ le condizioni del teorema al § 6, la soluzione $\varphi(s)$ dell'equazione integrale (15), è certamente finita e continua, avremo, in forza di un teorema sugli sviluppi in serie di funzioni ortogonali [3], che *condizione necessaria e sufficiente, affinchè nei punti di* C *sussista la* (27), *è che la serie* $\sum_1^\infty {}_i\, a_i \lambda_i \psi_i(s)$ *sia quasi uniformemente convergente nel campo* C.

[1] *Sopra alcuna condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa* (Annali di Matematica, Serie II, Tomo XI, 1882-83, pp. 3-55).

[2] Vedi la Nota L_1, § 4_1.

[3] Vedi la mia citata Nota del Circolo matematico di Palermo, § 10, β).

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XVI del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Nella nostra XII Nota [1] sopra questo argomento abbiamo in fine annunciato che stavamo compiendo alcuni studî intorno all'azione della luce sulla canfora e sul fencone ed è di queste esperienze che tratteremo nella presente Nota, sebbene esse non ci abbiano condotto ancora a risultati definitivi.

Canfora.

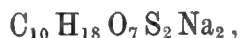
L'esposizione venne fatta in matracci in soluzione idroalcoolica: cioè per ogni 125 gr. di canfora, 625 cc. d'alcool e 460 d'acqua in modo d'avere una soluzione limpida e completa. La durata fu quella ordinaria dal maggio al novembre. Dopo l'insolazione il liquido non aveva mutato nè d'aspetto, nè di reazione, che si mantenne neutra.

Il contenuto d'ogni matraccio venne versato in due litri d'acqua gelata ed il tutto agitato energicamente: filtrando alla pompa attraverso tela, passa assieme al liquido acquoso un olio, mentre resta sul filtro la parte maggiore della canfora inalterata. La parte oleosa, che si può raccogliere su di un filtro bagnato, contiene i prodotti della reazione, naturalmente assieme a della canfora che rimane disciolta nell'olio. Nel liquido idroalcoolico, limpido, filtrato, rimangono quantità trascurabili di quest'ultimo; distillando si nota nelle prime porzioni la presenza di aldeide acetica. Per cercare di separare per quanto è possibile la canfora dai suoi prodotti di trasformazione, l'olio suddetto fu distillato con vapore acqueo: la prima porzione è liquida e contiene ancora aldeide acetica, la seconda deposita canfora col raffreddamento, la terza è nuovamente oleosa e di odore alquanto diverso da quello della seconda. Dopo di avere separato per filtrazione la parte solida, tutte le tre porzioni vennero riunite in soluzione eterea; questa fu seccata con solfato sodico anidro e l'olio liberato dal solvente, sottoposto a distillazione frazionata. La parte che passò fra 200 e 214° conteneva ancora della canfora, da cui si può liberarla per filtrazione, la frazione sotto i 200° e quella fra 214 e 225° restarono liquide; si comprende però agevolmente che per questa via era impossibile liberare dalla canfora il prodotto della reazione e però noi, dopo avere separato la prima per quanto era possibile per raffreddamento e successiva filtrazione, abbiamo sempre impiegato l'olio tutto intero per le nostre ulteriori ricerche. Da 250 gr. di canfora se ne ottiene in media 45 gr.

[1] Questi Rendiconti, vol. 17, I, pag. 576.

Quest'olio contiene, accanto alla canfora inalterata, una *aldeide* ed un *chetone* non saturo della stessa formola $C_{10}H_{16}O$.

La presenza dell'aldeide venne accertata per mezzo della reazione di Angeli; essa si combina poi facilmente col bisolfito e questo dà il mezzo per eliminarla. Agitando l'olio con una soluzione di bisolfito al 33 % l'aldeide passa in soluzione e la parte che non si combina, che è preponderante, può essere facilmente separata mediante l'etere. Con una soluzione di bisolfito più concentrata si ottiene la separazione di squamette perlacee. La soluzione bisolfitica portata a secco, dà un residuo che in parte si scioglie nell'alcool assoluto. Con questo mezzo si ottiene una massa amorfa, deliquescente che, seccata a 100°, ha la composizione

$$C_{10}H_{18}O_7S_2Na_2,$$

cioè quella di una combinazione della aldeide $C_{10}H_{16}O$ con due molecole di bisolfito. Siccome verosimilmente l'aldeide si forma dalla canfora per apertura di un anello, essa sarà olefinica e quindi si comprende che possa unirsi a 2 molecole di bisolfito. Per questa ragione essa non può essere riottenuta dal composto bisolfitico.

Per caratterizzare meglio questa aldeide, che, come si è detto, si forma in assai piccola quantità, abbiamo, come in altri casi, impiegato la reazione di Angeli. L'olio greggio venne trattato nel modo consueto col reattivo di Piloty (per es. 10 gr. del primo in 10 cc. d'alcool con 5 gr. dell'acido di Piloty in 25 cc. d'alcool e 6 gr. di potassa in 50 d'alcool) e il tutto versato poi nell'acqua ed estratto con etere. Tutta la parte non combinata passa in quest' ultimo ed il liquido acquoso contiene l'acido idrossammico legato all'eccesso di potassa. Neutralizzando con acido acetico e trattando poi con acetato di rame, si ottiene il solito precipitato verde del sale rameico dell'*acido idrossammico*, il quale, reso libero per digestione con acido solforico diluito ed estratto con etere, cristallizza dal benzolo in grosse pagliette untuose, prive di colore, che fondono a 118°.

La sua composizione corrisponde alla formola

$$C_{10}H_{17}O_2N = C_9H_{15}.C(OH)NOH,$$

che conferma quella dedotta per l'aldeide dal composto bisolfitico, cioè

$$C_{10}H_{16}O.$$

Per idrolisi con acido solforico diluito, questo acido idrossammico dà contemporaneamente un lattone ed un acido della stessa composizione $C_{10}H_{16}O_2$. Noi abbiamo bollito l'acido idrossammico a ricadere con acido solforico al 10 % per 10 ore ed abbiamo distillato poi il prodotto con vapore acqueo; resta indietro poca resina. Il liquido passato, che contiene goccioline oleose, venne neutralizzato con carbonato sodico ed estratto con etere.

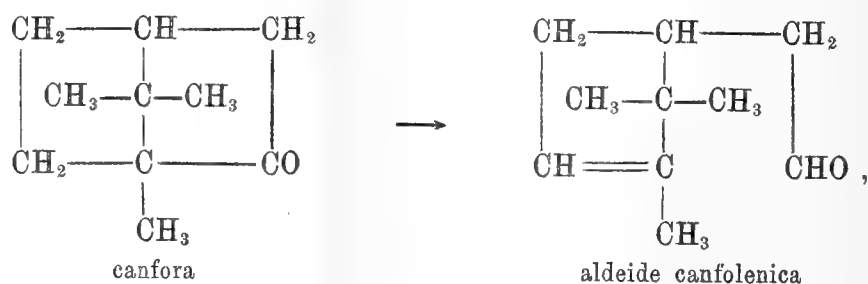
Questo asporta il *lattone*, che, seccato in soluzione eterea con solfato sodico anidro e distillato, passò fra 262 e 266° e si solidificò in una massa cristallina. Questa fonde a 28-29° e bolle a 263°; a 13 mm. a 126°. Il lattone ha, come s'è detto, la composizione

$$C_{10}H_{16}O_2$$

ed è stabile al permanganato potassico.

Dalla soluzione alcalina da cui fu estratto il lattone, si ebbe facilmente, acidificando e ritrattando con etere, l'acido. Seccato in soluzione eterea col cloruro calcico, passò a 13 mm. a 140°. Esso pure è solido, ma fonde a bassa temperatura. Ha la suindicata composizione, $C_{10}H_{16}O_2$, che venne dedotta anche dall'analisi del sale argentico, $C_{10}H_{15}O_2 . Ag$, ed in soluzione alcalina non resiste al permanganato potassico.

La canfora subisce dunque alla luce in piccola parte la scissione aldeidica, analogamente ad alcuni ciclochetoni del gruppo del cicloesanone; a giudicare per analogia si potrebbe supporre che l'apertura dell'anello della canfora avvenga secondo lo schema:

```
CH2——CH———CH2                CH2——CH———CH2
|     |      |                |     |      |
| CH3—C—CH3  |       ——>      | CH3—C—CH3  |
|     |      |                |     |      |
CH2——C———CO                   CH===C       CHO ,
      |                             |
     CH3                           CH3
   canfora                   aldeide canfolenica
```

perchè noi abbiamo trovato che la scissione aldeidica si compie fra il carbonile e quell'atomo di carbonio dell'anello, che porta la catena laterale; così avviene per l'o-metilcicloesanone e per il mentone. Ora, se realmente la canfora si comporta in modo analogo, l'aldeide formatasi doveva essere l'*aldeide canfolenica* ed i composti da noi ottenuti per idrolisi dell'acido idrossammico corrispondente, dovevano essere gli acidi canfolenici ed il lattone ossidiidrocanfolenico. Come si sa, la canforossima si trasforma facilmente nel nitrile α-canfolenico, e l'acido relativo passa per trattamento con acidi minerali, in seguito ad una singolare metamorfosi, all'acido β-canfolenico ed al lattone saturo ossidiidrocanfolenico.

Il lattone suindicato, preparato per ebollizione dell'acido idrossammico con acido solforico, fonde, come s'è detto, a 28-29°, mentre il punto di fusione di quello ossidiidrocanfolenico è dato dagli autori a 30°. Noi ne abbiamo preparato un campione, seguendo le norme indicate dal Tiemann [1], ed abbiamo ottenuto un prodotto che fondeva a 32°. Mescolando i due pre-

[1] Berichte, 28, pag. 2170.

parati in parti eguali, si ebbe il punto di fusione del miscuglio a 30°. Per confermare ulteriormente l'identità del nostro prodotto col lattone in parola, li abbiamo trasformati entrambi, seguendo anche qui le norme del Tiemann, nel corrispondente acido ossidiidrocanfolenico ed abbiamo ottenuto lo stesso prodotto, che fondeva rispettivamente a 103-104° ed a 104°. Il Tiemann dà per quest'acido, tanto facilmente alterabile, il punto di fusione 105°.

L'*acido* che si forma accanto al lattone per idrolisi del composto idro-ossammico è evidentemente un miscuglio dei due acidi canfolenici.

Come s'è accennato più sopra, l'olio greggio che si ottiene nell'insolazione della canfora, oltre all'aldeide, di cui s'è parlato ora, contiene anche un chetone della stessa formola empirica. Per separare questo composto dalla canfora, con cui trovavasi mescolato nel prodotto primitivo, ci siamo serviti con buon successo dei semicarbazoni. L'olio greggio venne anzitutto liberato dall'aldeide per agitazione con un agitatore meccanico con bisolfito sodico. Esso non resiste al permanganato. Da 250 gr. di canfora se ne ebbero dopo il trattamento col bisolfito 40 gr. Ogni 40 gr. di quest'olio, liberato dall'aldeide, sciolti in 150 cc. d'acido acetico glaciale, vennero trattati con una soluzione acquosa di 45 gr. di acetato sodico in 25 cc. d'acqua, a cui erano stati aggiunti 36 gr. di cloridrato di semicarbazide. Il liquido così composto, restando abbandonato a se stesso per qualche giorno, si rapprende in una massa cristallina. Versando il tutto nell'acqua e filtrando, si separano i semicarbazoni dalla parte, piccola parte, del prodotto che non ha reagito e che resta in soluzione. La massa cristallina è formata oltre che dal semi carbazone della canfora (p. f. 236-238°) da un altro composto suo isomero, molto più solubile nell'alcool, per cui la separazione riesce abbastanza facilmente; sciogliendo a caldo la massa nell'alcool e togliendo a più riprese per crescente concentrazione il semicarbazone fondente a 238°, si ottiene, portando a secco i filtrati, un residuo cristallino; dai 40 gr. dell'olio greggio, 18,5 gr. Questo residuo venne purificato prima dal benzolo a caldo, da cui si separa per raffreddamento in una massa di mammelloncini bianchi che fa rapprendere la soluzione, e poi dall'alcool metilico diluito. Così ottenuto, si presenta in aghi bianchi, che fondono a 151-152° ed hanno la composizione:

$$C_{11}H_{19}N_3O = C_{10}H_{16}.CON_3H_3.$$

Da questo semicarbazone non è difficile, seguendo il metodo di F. Tiemann e Schmidt [1], di ottenere libero il chetone. A questo scopo abbiamo, a 2 gr. per volta, distillato con vapore acqueo il carbazone mescolato collo stesso peso di anidride ftalica. Passa un olio, che raccolto e seccato nel modo consueto, distillò fra 200 e 210°; il suo punto d'ebollizione dovrebbe essere 203-204°. Ha la formola precedente,

$$C_{10}H_{16}O,$$

[1] Berichte, vol. 33, pag. 3721.

ed è però anch'esso isomero alla canfora da cui deriva, ma da cui differisce segnatamente per non resistere al permanganato. Da 19 gr. del semicarbazone fondente a 151-152° se ne ottennero 9 gr.

Per cercare di determinare la costituzione di questo chetone, che crediamo non sia stato ancora descritto, lo abbiamo ossidato prima col permanganato e poi con bicromato potassico ed acido solforico. 6 gr. del prodotto sospesi in mezzo litro d'acqua, raffreddata a 0°, vennero trattati con una soluzione di permanganato potassico al 2 °/₀ fino a che persisteva la colorazione violetta. Distillando poi con vapore acqueo, passarono piccole quantità di canfora, che erano ancora contenute nel nostro prodotto. Il liquido filtrato dagli ossidi di manganese e concentrato a b. m., per portarlo a più piccolo volume (200 cc.), venne quindi bollito a ricadere con una soluzione di 30 gr. d'acido solforico e 12 gr. di bicromato potassico in 100 di acqua fino a che la colorazione non s'era fatta decisamente verde. Estraendo ora con etere ripetutamente, si ottiene un residuo oleoso che in parte si solidifica. Purificando la parte solida successivamente dall'acqua, dal benzolo e dall'etere acetico, si ebbe questa in forma di prismetti senza colore, che fondevano a 133-134°. La loro composizione corrisponde alla formola

$$C_{10}H_{16}O_5,$$

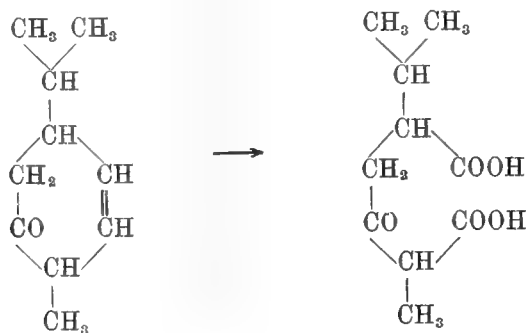
che è quella d'un *acido bibasico*, quale venne confermata dall'analisi del sale argentico.

Degli acidi bibasici di questa composizione che si trovano descritti nella letteratura, due si avvicinano alquanto al nostro: l'acido isochetocanforico di F. Tiemann [1], che fonde a 129-130°,5 e l'acido β-acetiltrimetilglutarico di R. Fittig [2], che si scompone fondendo fra i 125-140°, ma per risolvere con sicurezza il problema in parola sono necessarie ulteriori prove fatte con una quantità assai grande di materia prima [3].

(1) Berichte, 29, 3024.

(2) L. Annalen, 314, 92.

(3) Volendo azzardare un'ipotesi si potrebbe supporre che il chetone isomero della canfora, che si forma per azione della luce, e l'acido ora descritto abbiano le seguenti formole:

```
 CH3 CH3                  CH3 CH3
   \ /                      \ /
    CH                       CH
    |                        |
    CH                       CH
   /  \                     /  \
 CH2   CH        ——>      CH2   COOH
  |    ||                  |
 CO    CH                 CO    COOH
   \  /                     \  /
    CH                       CH
    |                        |
    CH3                      CH3
```

FENCONE.

Il contegno del fencone alla luce è rimarchevole, perchè sebbene il fencone venga considerato da alcuni autori come assai prossimo alla canfora per costituzione, si comporta in modo assai diverso da questa. Si modifica intanto in proporzione molto minore della canfora e poi libera un gaz formato precipuamente da ossido di carbonio. Quale sia la sostanza che si produce in relazione con lo sviluppo di ossido di carbonio non abbiamo potuto ancora accertare con sicurezza; indipendentemente da questa reazione se ne compie un altra, per cui si formano piccole quantità di un idrato del fencone $C_{10}H_{18}O_2$.

L'esposizione venne fatta in parte in matracci, in parte in lunghi tubi verticali, durante il periodo estivo autunnale, p. es. dal maggio al gennaio, impiegando una miscela di 150 gr. di fencone sciolti in 450 cc. d'alcool e 300 d'acqua. Durante l'insolazione il liquido si divise in due strati ed aprendo i tubi si svolse circa un litro di gaz, proveniente dai suddetti 150 gr. di fencone.

Raccolto con le debite cure ed analizzato coi metodi consueti, questo gaz si dimostrò formato segnatamente da *ossido di carbonio*, che venne riconosciuto all'assorbimento con la soluzione ammoniacale di cloruro rameoso, allo spettro d'assorbimento della carbossiemoglobina ed alla fiamma azzurra con cui bruciava. Assieme coll'ossido di carbonio si producono piccole quantità di altra materia gassosa, che non abbiamo potuto riconoscere.

Il contenuto dei tubi, che ha debole reazione acida per tracce di acido formico, di cui in seguito non abbiamo tenuto conto, venne anzitutto agitato fortemente con circa 2 litri d'acqua e l'olio, che stenta a depositarsi dalla emulsione formatasi, venne separato in parte direttamente ed in parte raccolto su filtro bagnato. Siccome l'idrato $C_{10}H_{18}O_2$ suaccennato è solubile nell'acqua e può da questa essere asportato, così la parte oleosa fu ripetutamente lavata con acqua. Il liquido idroalcoolico, da cui venne separato l'olio, distillato e rettificato per liberarlo possibilmente dall'alcool, dà nuove quantità del primo e tutta la parte oleosa del prodotto, ricavata nelle singole operazioni ora descritte, venne distillata con vapore acqueo. L'olio, che passa assieme al vapor acqueo, è formato prevalentemente dal fencone inalterato, ma contiene inoltre un'altra sostanza di cui diremo subito. Nel liquido acquoso, che resta indietro, trovasi sospesa una resina (20 gr. da 365 gr. di fencone), ma oltre a questa esso contiene disciolto l'idrato suindicato. Però tanto questo, come tutti gli altri liquidi acquosi ricavati nella trattazione, furono riuniti e concentrati nel vuoto ed estratti con etere. Si ottenne così una materia solida e cristallina di cui faremo parola più avanti.

La parte oleosa del prodotto, separata convenientemente dall'acqua, venne posta in un miscuglio frigorifero e lasciata lentamente gelare. Si solidifica così più facilmente il fencone puro e la materia che l'accompagna si concentra nella parte che rimane liquida. Questa distilla in parte sotto a 194°, che è il punto d'ebollizione del fencone, e passa massime fra 175° e 180°. È un liquido di odore che ricorda l'essenza di trementina, che non è stabile al permanganato ed all'aria si autossida; trattato con acetato mercurico colla reazione di Balbiano [1] viene ossidato e si forma acetato mercuroso. Non ci è stato però possibile finora di separare completamente questo composto di natura olefinica dal fencone con cui trovavasi ancora mescolato.

Assai agevole riuscì invece la purificazione del prodotto, solubile nell'acqua sopraricordato. L'estratto etereo si solidifica dopo qualche tempo ed il solido ottenuto (6 gr. da 365 gr. di fencone), cristallizzato dal benzolo, forma pagliette fondenti a 138-139°. Il nuovo composto ha la formola

$$C_{10}H_{18}O_2;$$

è solubile nell'acqua, massime a caldo, e negli ordinarî solventi, non ha odore, è sublimabile e resiste al permanganato potassico. La sua natura chimica è quella di un *glicole*, perchè esso si combina con due molecole di isocianato di fenile e dà un etere dibenzoilico.

L'*etere dicarbanilico*, $C_{10}H_{16}O_2(CONH\,C_6H_5)_2$, si ottiene scaldando la sostanza in tubo a 140-150° per alcune ore coll'isocianato di fenile. Scacciato nel vuoto a b. m. l'eccesso di reattivo, si purifica il residuo dal benzolo prima e poi dall'etere petrolico. Si presenta in mammelloni senza colore, che fondono a 206° con decomposizione.

L'*etere dibenzoilico*, $C_{10}H_{16}O_2(CO\,C_6H_5)_2$, fu ottenuto scaldando il glicole con un eccesso di anidride benzoica a 150-160° per 6 ore in un palloncino a bagno d'olio. Il prodotto digerito a lungo con soda all'1 °/₀ e poi estratto con etere, dà un residuo che, purificato dall'acido acetico, si separa in cristalli fondenti a 99°.

Contegno di alcuni chetoni superiori a catena spezzata.

Il comportamento del fencone fece nascere in noi il desiderio di conoscere quello di alcuni chetoni a catena spezzata per vedere se anche in altri casi la luce determinasse uno sviluppo di ossido di carbonio. L'esperienza dette in questo senso risultato negativo, ma ci insegnò un nuovo fatto, che meriterebbe d'essere ulteriormente studiato.

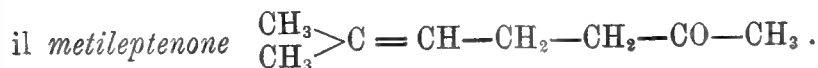
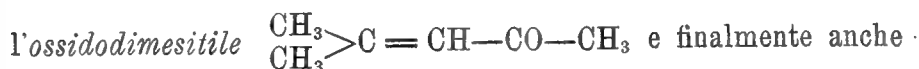
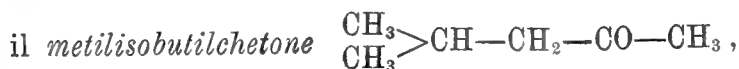
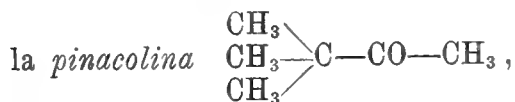
(1) Gazzetta chimica, 36, I, 301.

Noi abbiamo sperimentato, nelle consuete condizioni, i seguenti chetoni:

la *pinacolina* $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C-CO-CH_3$,

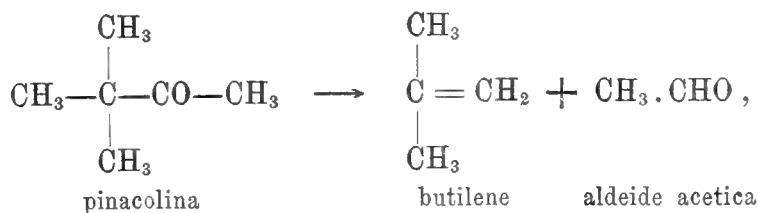
il *metilisobutilchetone* $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!CH-CH_2-CO-CH_3$,

l'*ossidodimesitile* $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C=CH-CO-CH_3$ e finalmente anche

il *metileptenone* $\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C=CH-CH_2-CH_2-CO-CH_3$.

L'esito fu il seguente: che i tre ultimi restano quasi completamente inalterati: col secondo e col terzo si ebbe una lievissima reazione acida nel prodotto dell'insolazione, che mancò del tutto col quarto. La *pinacolina* ci dette invece un risultato assai rimarchevole.

L'esposizione era stata fatta con 98 gr. di pinacolina in 100 cc. d'alcool e 70 d'acqua, in tubi riempiti di anidride carbonica. Durante l'insolazione il liquido si divide in due strati e nell'aprire i tubi si svolge abbondante un gaz combustibile, che arde con fiamma intensamente luminosa. Questo gaz, raccolto ed analizzato, si dimostrò formato prevalentemente da una olefina, assorbibile dall'acido solforico fumante. Le analisi non dettero numeri sufficientemente esatti, perchè l'olefina era accompagnata da un altro gaz, forse di natura paraffinica, ma resero probabile la presenza di un *butilene*.

La parte liquida conteneva molta *aldeide acetica*, materie resinose ed era acida. La ricerca deve essere ripresa, ma da quanto risulta dalle esperienze ora accennate non sembra impossibile che la pinacolina si scinda prevalentemente secondo lo schema:

$$\underset{\text{pinacolina}}{CH_3-\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}-CO-CH_3} \longrightarrow \underset{\text{butilene}}{\overset{\displaystyle CH_3}{\underset{\displaystyle CH_3}{\overset{|}{\underset{|}{C}}}}=CH_2} + \underset{\text{aldeide acetica}}{CH_3.CHO},$$

che corrisponderebbe alla scissione aldeidica dei ciclochetoni.

In questa ricerca siamo stati aiutati successivamente dai dott. Forni, Pestalozza e Vecchiotti, ai quali esprimiamo la nostra riconoscenza.

Mineralogia. — *Rocce a pleonasto di S. Piero in Campo (Elba).* Memoria del Corrispondente C. VIOLA e di M. FERRARI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Chimica fisica. — *Sopra alcune proprietà colloidali dei saponi solubili.* Nota I[a] del Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI e del dott. C. VICTOROW.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla distribuzione delle linee isodinamiche tra i poli di un elettromagnete.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In un precedente lavoro ho dimostrato che traendo profitto della grande birifrangenza magnetica del ferro Bravais di vecchia preparazione (fenomeno Majorana) si può studiare con grande sensibilità ed esattezza l'andamento dell'intensità del campo tra i poli d'un elettromagnete.

Il metodo allora seguìto ricorda i processi della spettroeliografia. Si illumina con luce bianca una piccola parte d'una vaschetta con liquido avente pochi millimetri di spessore; questa è disposta tra nicol incrociati a 45° dal campo, nell'interferro dell'elettromagnete, e in modo che la luce l'attraversi normalmente alle linee di forza. Si produce quindi della parte illuminata della vaschetta un'immagine reale e ingrandita sul piano della fenditura di uno spettroscopio. Esplorando con questa il disco immagine quando il campo è eccitato, lo spettro appare solcato da alquante frange che sono in generale non rettilinee e non seguono le righe di Fraunhofer. Dal loro andamento si può desumere la legge di variazione del campo lungo la linea della vaschetta di cui la fenditura spettroscopica è l'immagine. Possono così essere esplorati diversi diametri o diverse corde della parte illuminata della vaschetta, e si possono desumere le variazioni del campo che corrispondono a spostamenti anche di qualche decimo di millimetro nell'interferro.

Fu anche annunziata una disposizione diversa, consistente nell'illuminare l'intera vaschetta con luce monocromatica. Osservando direttamente con un cannocchiale, l'immagine appare solcata da numerose frange di cui ciascuna rilega i punti del campo ove l'intensità è costante, cosicchè vi corrisponde una birifrangenza di una, due, tre ecc., lunghezze d'onda. Sono cioè direttamente visibili sulla vaschetta le isodinamiche del campo corrispondenti alle intensità $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ecc., secondo il numero d'ordine della frangia considerata.

Queste frange possono essere anche fotografate senza grandi difficoltà, fornendo così degli elementi oggettivi utilissimi per lo studio del campo nell'interferro con diverse forme di masse polari.

Questa Comunicazione ha appunto lo scopo di presentare alcune delle fotografie ottenute, e di dare insieme alcuni particolari sui mezzi più convenienti per l'utilizzazione del metodo.

Per un'esplorazione minuta del campo è utile evidentemente che le isodinamiche siano quanto più fitte e numerose è possibile. E poichè si passa dall'una alla successiva per l'accrescimento d'una lunghezza d'onda nella birifrangenza, e poichè questa è inversamente proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda della luce impiegata, è necessario ricorrere per quanto è possibile a luce monocromatica.

Or non è facile procurarsi una luce sufficientemente monocromatica nella regione spettrale in cui il ferro Bravais, sotto un certo spessore, ha una bastevole trasparenza.

Infatti, per aver disegnate in un campo di circa 15,000 Gauss una dozzina di isodinamiche di diverso ordine occorre uno spessore di liquido assai attivo non inferiore a 4 mm. e sotto questo spessore non è più sufficiente la luce dell'arco a mercurio utilizzato da Cotton a Mouton nelle loro ricerche sul fenomeno Majorana, nè basta filtrare la luce bianca coi soliti vetri o liquidi colorati, poichè con ciò riesce appena visibile la quarta o la quinta frangia, e anche queste perdono ogni nettezza di contorno.

Il procedimento che mi ha dato i migliori risultati, per la quantità di luce utilizzabile e per la sua omogeneità, è il seguente.

Un fascio di luce solare illumina direttamente, senza fenditura, un reticolo concavo di Rowland di media grandezza (parte incisa $5 \times 2,5$ cm.; distanza focale circa 1 metro). Si ha così a piccola distanza dal reticolo (inferiore a 1 metro) uno spettro luminosissimo e abbastanza disperso; la sua purezza non è molto elevata poichè si riconosce appena qualche linea di Fraunhofer; ma è sufficiente allo scopo. Cosicchè, collocando nel piano ove lo spettro è più puro una fenditura di circa mezzo centimetro di larghezza, e utilizzando la luce emergente per illuminare tra nicol incrociati la vaschetta, il campo di visione è abbastanza intensamente illuminato e sono nettamente delineate le frange fin oltre la quindicesima. Occorre naturalmente utilizzare la porzione più conveniente dello spettro, tra il rosso e l'aranciato, e restringere il fascio al passaggio dei nicol, per mezzo di lenti opportune, per avere le minori perdite di luce possibili. Credo inutile dilungarmi in questi particolari che sono d'impiego corrente in ottica; mi limito solo a rilevare l'efficacia del reticolo come il solo apparecchio che permetta di ottenere senza lenti nè fenditure uno spettro molto disperso e abbastanza puro a piccola distanza dall'apparecchio medesimo, il che non è senza vantaggio, quando lo sperimentatore non abbia un grande spazio a sua disposizione.

Nell'esecuzione delle prove fotografiche [1] si produceva della vaschetta,

[1] Mi giovai per queste dell'aiuto abile e intelligente del sig. G. Trabacchi, al quale esprimo i più vivi ringraziamenti.

(utilizzando l'intera luce che la traversa), un'immagine reale, all'incirca della stessa grandezza, nel posto ove era collocato lo *chassis* con la lastra. Il colore della luce impiegata veniva scelto tenendo conto insieme dell'assorbimento selettivo del liquido, minore verso il rosso, e della sensibilità della lastra fotografica crescente verso il verde. Naturalmente per la visione diretta occorreva una quantità di luce minore e si poteva quindi accrescere la omogeneità della luce impiegata; cosicchè la nettezza delle frange era di molto superiore di quel che apparisce dalle fotografie.

Altre precauzioni furono necessarie. Anzitutto occorreva durante la posa fotografica (circa 5 minuti primi) mantener costante la intensità del campo, per evitare uno spostamento delle frange molto facile a verificarsi in quelle di ordine elevato. Serviva allo scopo un reostato nel circuito dell'elettromagnete, atto a mantenere costante l'intensità della corrente. Si dovettero inoltre escludere i campi intensissimi, poichè un forte riscaldamento dell'avvolgimento e del ferro, comunicandosi al liquido, ne altera la costante di birifrangenza magnetica.

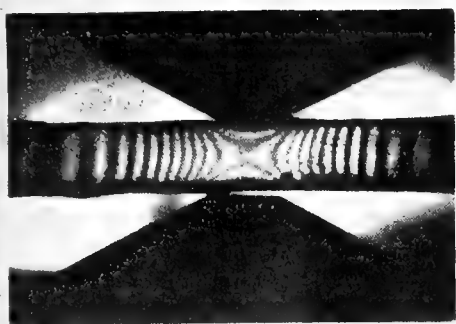
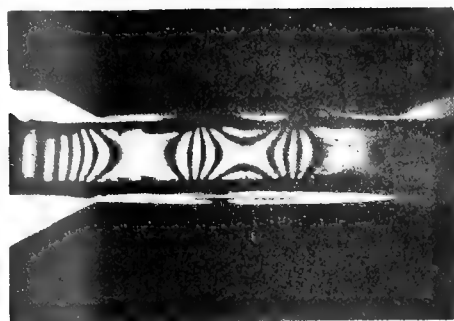
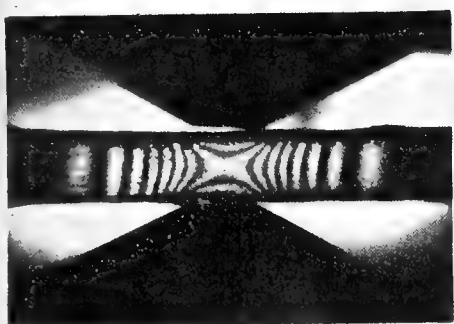
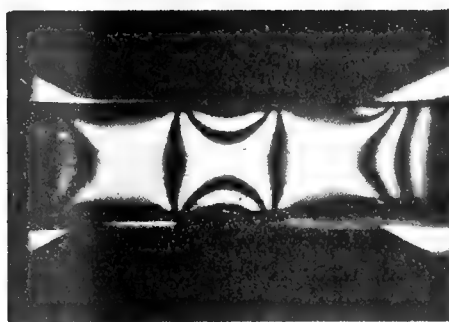
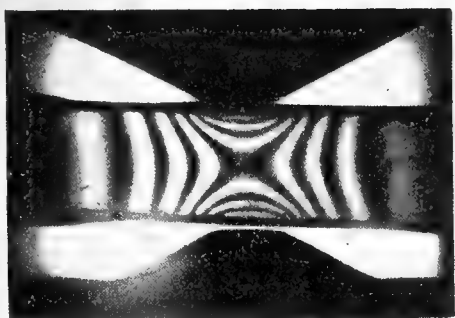
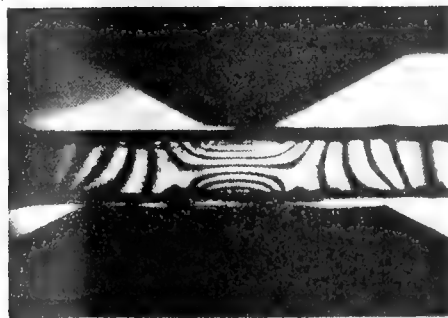
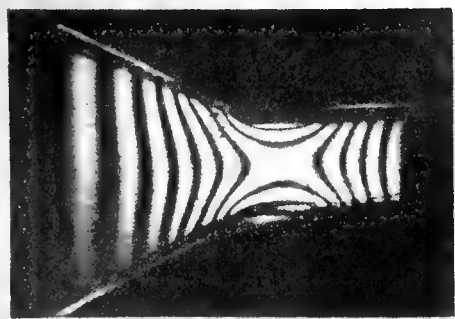
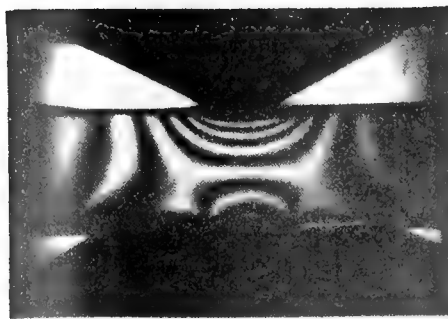
Infine erano da evitare spostamenti nella direzione del fascio solare, con che si modifica alquanto la lunghezza d'onda media della porzione di spettro utilizzata dalla fenditura, e quindi si ha uno spostamento sensibile delle frange. Comunque le difficoltà non furono grandissime; ed esse non esistono più, come è naturale, quando ci si contenti della visione diretta, nel qual caso il fenomeno è non solo molto più netto, ma anche assai più interessante poichè si può seguire il moto delle frange che risulta da una variazione della corrente magnetizzante, permettendo così di fissare con facilità il numero d'ordine delle isodinamiche che talvolta è lo stesso in parti diverse del campo.

Le figure 1-7 riproducono molto imperfettamente alcune delle fotografie eseguite.

La 1 è ottenuta con una vaschetta in celluloide, costruita appositamente per abbracciare l'intero interferro, anche nella parte conica delle masse polari. L'ordine delle frange si riconosce facilmente partendo dall'esterno.

Tutte le altre sono eseguite con due vaschette di vetro, di 4 mm. di spessore, e aventi forma rettangolare. L'una, la più larga, permette di avvicinare le masse polari a circa 11 mm.; l'altra, la più stretta, permette un avvicinamento fino a 7 mm. Con la prima fu usato un liquido meno attivo.

La 2, la 3 e la 3 *bis*, sono ottenute con le masse non forate, terminate da dischetti piani di circa 5 mm. di diametro. Nella 2 è visibile fino alla 6ª frangia, nella 3 fino alla 8ª che forma i due rami d'una specie d'iperbole; nella 3 *bis* la corrente magnetizzante aveva maggiore intensità, e la frangia d'ordine più elevato, duplice anch'essa, è la 12ª.

La 4 e la 5 sono eseguite con un polo forato e l'altro massiccio, a distanze diverse rispettivamente eguali a 11 e a 7 mm. Si riconosce subito che lungo

l'asse del campo si ha il massimo gradiente delle isodinamiche, le quali sono ivi quasi verticali. Nella fig. 4 si incontrano orizzontalmente dalla 1ª fino alla 5ª frangia, mentre la 1ª e la 2ª si svolgono anche all'esterno. Nella fig. 5 le isodinamiche sono ancora più fitte tra i poli, e si passa lungo l'asse dalla isodinamica 4ª alla 8ª, in uno spazio ch'era, sul vero, di 3 mm. Si ritrova così la variazione di circa il 13 % per mm. lungo l'asse ottenuta con l'altro metodo. E si riconosce a prima vista, da la forma delle isodinamiche, che il campo è sensibilmente costante, in prossimità dell'asse, nel senso trasversale, mentre varia così rapidamente nel senso longitudinale, confermandosi la spiegazione data delle anomalie riscontrate da Tenani nello studio del fenomeno Zeeman (¹).

Le figg. 6 e 7 sono eseguite con le due ordinarie masse forate dell'elettromagnete Weiss.

La 6 offre poco interesse, poichè data la piccola attività del liquido, si raggiunge appena la 4ª frangia, duplice, nella corona circolare che circonda il foro.

Molto più interessante è la 7, ottenuta coi poli a 7 mm. e un liquido più attivo. Si ha in essa una serie di 8 frange; poi la 9, che occupa quasi l'intera corona circondante il foro, poi le frange in ordine decrescente 8, 7, 6, 5; e tra i fori la duplice frangia d'ordine 4; al di là il fenomeno si riproduce simmetricamente.

L'ordine delle frange si riconosce agevolmente dal loro movimento allo aumentare della corrente. In ogni caso tra due frange immediatamente adiacenti c'è una differenza di ± 1 nel numero d'ordine; inoltre il fenomeno è sempre simmetrico rispetto all'asse polare.

Come ebbi a notare nella citata Comunicazione la birifragenza osservata in ciascun punto della vaschetta misura l'effetto integrale lungo il raggio luminoso che la traversa. E perciò se nel percorso di questo il campo ha intensità diverse, le frange non disegneranno esattamente le isodinamiche, e ciò tanto più quanto maggiore è lo spessore della vaschetta.

Or esperienze eseguite con vaschette più sottili delle precedenti (fino a 1 mm.) nel qual caso le frange sono meno numerose, confermano i risultati generali riprodotti nelle fotografie dimostrando che lungo il raggio luminoso, nel piccolo percorso entro la vaschetta, le variazioni del campo sono di lieve entità. E che così debba essere si riconosce anche osservando che il campo è di rivoluzione intorno all'asse dell'elettromagnete, e che il gradiente del campo lungo il raggio luminoso nelle prossimità dell'asse si identifica col

(¹) Contrariamente a quanto è detto nella mia prima Comunicazione l'anomalia riscontrata dal Tenani coi tubi di Geissler del diametro di mm. 1,8 non è del 2 ma di circa il 6 per cento, com'egli mi ha fatto osservare.

gradiente trasversale, ed è ancora minore allontanandosi alquanto da quello, poichè il raggio percorre la vaschetta tangenzialmente a un cerchio di rivoluzione, ch'è una isodinamica. Or il gradiente trasversale è nelle prossimità dell'asse inferiore all'uno per cento per millimetro, come risulta anche da tutte le esperienze sul fenomeno Zeeman; l'errore massimo era così, con la vaschetta di 4 mm., inferiore al 4 %; e le variazioni dell'errore da punto a punto notevolmente più piccole, risultandone una deformazione trascurabile delle frange rispetto alle vere isodinamiche.

Finirò coll'accennare ad una particolarità del metodo da cui si può trarre profitto.

Le frange rappresentano le isodinamiche *della componente* del campo nel piano normale ai raggi luminosi; ma le rappresentano anche se la direzione di questa componente è variabile da punto a punto; soltanto in questo caso sarà diversa da punto a punto la luminosità del fondo chiaro su cui spiccano le frange oscure, e queste spariranno solo nei posti ove la componente del campo è orientata nel senso d'uno dei nicol incrociati.

Effettivamente si può constatare che esse *non si spostano* girando *insieme* il sistema dei nicols messi sempre all'oscurità, ma si modifica solo la luminosità del fondo su cui esse si disegnano.

È quindi interessante ricercarne la forma nel caso di masse polari di forme diverse, potendosene ottenere la soluzione di problemi che interessano la teoria del magnetismo e l'elettrotecnica.

Fisica. — *Sulla origine di alcune gravi anomalie recentemente osservate nello studio del fenomeno di Zeeman e su un nuovo metodo per lo studio di un campo magnetico* (1). Nota di Mario Tenani, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Sotto analogo titolo, in questi stessi Rendiconti, il prof. O. M. Corbino pubblica alcune osservazioni riguardanti i risultati da me recentemente esposti. Avendo egli esaminato con un metodo che ricorda nella sua essenza quello proposto dallo Schmauss (2) l'andamento del campo magnetico nell'intraferro del suo elettromagnete di Weiss, egli avverte che la differenza da me notata per alcune linee spettrali tra gli sdoppiamenti delle linee del doppietto longitudinale e delle linee laterali del tripletto trasversale, con l'osservazione contemporanea di due fenomeni, può essere spiegata dal fatto che il campo magnetico, quando si usa, come io feci, un nucleo massiccio e l'altro forato, varia rapidissimamente a mano a mano che

(1) Pervenuta all'Accademia il 1 maggio 1910.
(2) *Ann. der Phys.* X, p. 658, 1903.

si procede nell'intraferro dal polo massiccio a quello forato. Per tale ragione le varie parti della sorgente luminosa si troverebbero in campi così diversi, da dover ritenere che a questa causa sia dovuta in gran parte la differenza notata.

A queste osservazioni io devo opporre che la forma dei nuclei da me adoperati, come risulta dalle mie Note, è un po' diversa da quelle normali di Weiss che il prof. Corbino adopera [1]. Inoltre io debbo opporre che, se le sorgenti da me adoperate avessero avuto estensione tale da trovarsi realmente nei varî loro punti (posti su rette parallele alle linee di forza), in campi di intensità così diversa, nell'esame del tripletto le righe sarebbero risultate alquanto diffuse nella disposizione stigmatica e non stigmatica del reticolo, poichè sulla fenditura del reticolo avrebbero dovuto necessariamente arrivare raggi partiti da regioni della sorgente luminosa che si sarebbero trovate in campi diversi. Ciò io posso assolutamente escludere: e non può neppure pensarsi che io abbia ottenuto linee nettissime perchè l'impressione della lastra avveniva (nella disposizione astigmatica) là dove le varie linee emesse dai varî punti si sovrapponevano in parte, poichè in tal caso, prolungando molto le pose, come molte volte mi accadde, avrei dovuto ottenere delle linee ampiamente sfumate: come pure posso dire che la disposizione ottica non fu mai così perfetta (cosa veramente difficile a realizzarsi dopo tre riflessioni totali), da far sì che l'immagine della sorgente luminosa fosse esattamente parallela alla fenditura. Posso ancora aggiungere che, se anche questo si fosse sempre verificato, in modo che la luce passata attraverso la fenditura si potesse pensare proveniente da una sottile porzione della sorgente luminosa perpendicolare alle linee di forza, nelle varie esperienze ripetutamente eseguite avrei dovuto trovare per la differenza tra gli sdoppiamenti diversi valori, mentre dalle mie Note risulta il contrario.

Le spiegazioni di questi fatti sono due: o le sorgenti luminose non erano così estese come il prof. Corbino ammette, o il campo non era nel mio caso così inomogeneo come risulta dalle sue esperienze.

Ambedue queste spiegazioni del fatto da me prima notato e che ugualmente e indipendentemente si oppongono all'interpretazione data dal professor Corbino ai miei risultati, possono essere corroborate dalle seguenti osservazioni:

Il prof. Corbino ammette che il capillare dei Geissler a mercurio che servirono nelle mie esperienze, fosse tutto pieno dei vapori luminosi: ciò

[1] Il profilo dei poli può desumersi dai seguenti dati:

Nucleo massiccio: Diametro polare cm. 7, angolo di apertura del cono terminale 57°, diametro della base polare mm. 10.

Nucleo forato: Diametro polare cm. 7, foro cm. 2 all'estremità neutra, mm. 6 all'estremità polare. Angolo di apertura del cono terminale 60°, diametro della base polare mm. 15.

darebbe alla sorgente luminosa uno spessore, contato secondo le linee di forza, di mm. 1,8. Ora invece, nel campo magnetico, la scarica, per azioni elettromagnetiche del campo sulla corrente che attraversa il Geissler forma un filetto di piccolissima sezione e di elevatissimo splendore che si addossa alle pareti del capillare. L'elevato splendore di quel filamento non permette una misura precisa del suo diametro: permette soltanto di dire che è molto sottile: una misura precisa non mi riuscì.

Rammenterò che il Paschen (1) ebbe a notare la formazione di quel filamento, distinto dal resto del capillare, in tubi di 0,2 mm. e poichè le ragioni della formazione di tale filetto parrebbero dipendenti dall'esistenza del campo e non da un'azione speciale delle pareti, non sembra che vi sia ragione per ammettere che anche in capillari più larghi il filamento luminoso sia molto più grosso.

Se tale fatto si verifica, questa sarebbe intanto una prima ragione che spiegherebbe quell'assenza delle sfumature delle righe del tripletto che si oppone alla interpretazione data dal prof. Corbino ai miei risultati (2).

Ma occorre anche rammentare a questo proposito che il mio risultato sui Geissler fu dato soltanto in via provvisoria. Tale provvisorietà era derivata dal fatto che nel capillare avvengono delle riflessioni le quali rendono la misura soltanto apparentemente precisa; ed occorre rammentare ancora che tali riflessioni tendono a diminuire la differenza da misurarsi e quindi, fin che non si sarà fatta l'esperienza in condizioni più decisive sarà per lo meno prematuro ragionare sul valore della differenza stessa. Ho in corso le esperienze con capillari più sottili *per eliminare le riflessioni* suddette: ma non credo di dovere qui precipitare la pubblicazione di tali delicatissime osservazioni.

La seconda delle spiegazioni da me proposte per dare ragione del fatto da me osservato, risulta corroborata da esperienze ausiliarie eseguite in questi giorni sulla riga Hg 4047 nel III ordine del reticolo da me usato e discusse insieme col prof. Corbino nell'adunanza ultima della Società italiana di Fisica.

Ho disposto l'elettromagnete in modo che le linee di forza riescano verticali. Nel foro che attraversa uno dei poli ho introdotto un tubo di Geissler di forma speciale da me costruito in modo che il capillare occupasse completamente, non ostante che uno dei nuclei dell'elettro magnentesia massiccio, lo spazio compreso fra i poli e risultasse parallelo alle linee di forza. I varî punti vengono così a trovarsi in punti via via più discosti dal polo massiccio. Sulla fenditura del reticolo, usato astigmaticamente al modo solito di Row-

(1) Paschen, *Phys. Zeitsch.* **I**, 1900 p. 478.

(2) La posizione del filamento luminoso è tale che la luce del doppietto non viene riflessa perpendicolarmente al campo.

land, ho proiettato un'immagine di questo capillare con una lente di fuoco conveniente in modo da coprire della luce tutto il reticolo. Dovevo aspettarmi un tripletto molto confuso, se è vero che il campo varia tanto rapidamente come risulterebbe dalle esperienze del prof. Corbino: invece ottenni un bellissimo tripletto dove una lievissima sfumatura accompagna le righe laterali (per tutta la loro lunghezza) che pur spiccano nettissime altrettanto quanto la riga mediana che serve di confronto.

Ciò vuol dire che ci sono bensì dei punti del capillare che si trovano in campi di intensità via via diversa, ma la maggior parte del Geissler si trova in un campo uniforme (sensibilmente).

Resta a spiegarsi la contraddizione tra questo risultato e quello ottenuto dal prof. Corbino col suo metodo.

Egli poneva fra i poli dell'elettromagnete una vaschettina dello spessore di circa $^1/_2$ centimetro contenente del ferro Bravais che come è noto diventa birefrangente quando è posto in un campo magnetico. Giudicava poi del modo di variare del campo nei varî punti che si trovano sull'asse del campo stesso, dalla differenza di cammino assunta nell'attraversare il liquido dai due raggi polarizzati ad angolo retto che prendono origine da un raggio incidente polarizzato rettilineamente a 45° sulle linee di forza e di direzione perpendicolare alle stesse. Disponendo la vaschetta fra due nicol incrociati egli otteneva l'estinzione della luce lungo certe linee in cui la differenza di cammino era tale da restituire alla vibrazione uscente la forma stessa della vibrazione incidente.

Ora (1) senza entrare in molti particolari su tale punto, particolari che la forma speciale del campo, quale può essere rivelata da uno spettro magnetico, e la sua inomogeneità, può far subito prevedere, io osserverò *in generale* che il metodo usato, offrendoci il risultato integrale del campo sul liquido lungo la direzione di propazione del raggio, non offre la misura di una quantità legata in modo semplice al valore del campo e tanto meno, quanto meno il campo è uniforme lungo il raggio considerato. Le linee di uguale birifrangenza non corrispondono quindi come il prof. Corbino ammette, a linee isodinamiche del campo.

Una modificazione del metodo usato dal prof. Corbino può prestarsi meglio praticamente, non già a disegnare la forma di tali linee isodinamiche, ma a far vedere con un semplice calcolo come varia il campo lungo una data

(1) La legge trovata dal Majorana per la suddetta differenza β di cammino è espressa dalla formula

$$\beta = \frac{K \, . \, l(\delta - 1) \, H^2 \lambda^2_{Na}}{\lambda^2}$$

dove K è una costante, l lo spessore del liquido soggetto al campo, $(\delta - 1)$ la concentrazione del liquido, H l'intensità del campo, λ la lunghezza d'onda.

retta. Si mandi attraverso la vaschetta nella direzione voluta un sottile fascio monocromatico di raggi paralleli, polarizzati a 45° sulle linee di forza. Per effetto della birefrangenza assunta dal liquido la forma della vibrazione varierà man mano che il raggio procede e ciò tanto più rapidamente, quanto più forte sarà la birefrangenza del liquido. Per quanto osservò lo Schmauss, alla cui Memoria rimando, guardando lateralmente entro il liquido, si vedrà la traettoria del fascio di raggi segnata da una successione di molti punti alternativamente luminosi e oscuri. I punti luminosi corrispondono [1] a punti in cui la vibrazione ha una certa forma, i punti oscuri a punti in cui la vibrazione stessa ha forma diversa.

Siccome la vicinanza più o meno grande di tali punti nelle varie porzioni della retta assegnata, dà un'idea del valore della birifrangenza [2] in quei tratti, così questo metodo servirà a fornirci in quei tratticelli il valore del campo. Sarà interessante confrontare i risultati così ottenuti [3] con quelli esposti in questa Nota, ottenuti con i Geissler.

Geologia — *Sull'esistenza dell'Oligocene nella regione del Monte Iudica (prov. di Catania)* [4]. Nota del dott. G. Checchia-Rispoli, presentata dal Corrispondente G. Di-Stefano.

In varî lavori ho parlato dell'esistenza di *Lepidocyclina* negli strati del Cretaceo superiore ed in quelli dell'Eocene della Sicilia. Credo opportuno ora di occuparmi anche, in una serie di Note, di cui la presente è la prima, di quelle che si trovano in terreni più giovani, poichè esse sono anche diffuse nell'Oligocene e nel Miocene della nostra isola.

(1) Vedi la Memoria citata dallo Schmauss. Vedi anche Verdet, *Vorlesungen über die Wellent. des hichtes*, 2° vol. p. 403, 1887.

(2) Io intendo per valore della birifrangenza in un dato punto, il limite del rapporto della differenza di cammino assunta dai due raggi polarizzati ad angolo retto, lungo un certo tratto, per la lungezza del tratto stesso, al tendere a 0 di tale lunghezza, Tale funzione è proporzionale al quadrato del campo secondo la legge citata del Majorana: non lo è invece, in generale, il suo integrale lungo un certo tratto come il prof Corbino suppone.

(3) A questo metodo sarà sempre logicamente possibile opporre la seguente considerazione: La birifrangenza assunta dal ferro Bravais dipende dall'orientamento di particelle ultramicroscopiche esistenti in seno al liquido, le quali posseggono una permeabilità magnetica diversa da quella del liquido in cui sono immerse. È quindi possibile pensare che in un campo non rigorosamente uniforme tali particelle emigrino verso il polo di intensità maggiore o minore. Un addensamento di tali particelle renderebbe il metodo poco attendibile anche colla modificazione introdotta. Su questo punto intendo di fare qualche esperienza.

(4) Lavoro eseguito nell'Istituto geologico della R. Università di Palermo.

Fra il materiale della regione del Monte Iudica, portato a Roma dal prof. Giovanni Di-Stefano nel 1900, vi erano varî campioni di calcari a *Lepidocyclina*, indicati come superiori alle argille dell'Eocene superiore, della cui fauna io allora esclusivamente mi occupai ([1]). Il prof. Di-Stefano più tardi nella sua seconda Nota su *I pretesi fenomeni di carreggiamento in Sicilia* ([2]), accennò in via generale, per la stessa regione, all'esistenza di lembi di calcare a *Lepidocyclina* tipiche superiori al Bartoniano. Più recentemente egli portò a Palermo, dal gruppo del Monte Iudica, altri campioni di roccia simile, da lui sempre ritenuta superiore alle argille eoceniche.

Da uno dei lembi oligocenici del gruppo del Monte Iudica e non già dagli strati sottostanti, che sono stati determinati esattamente come eocenici, deve provenire il campione di breccetta con *Lepidocyclina*, che il professor A. Silvestri, polemizzando col dott. R. Douvillé, ha indicato in una sua Nota, con queste parole: « *...gli concedo che tutti, nessuno escluso, i ritrovamenti finora segnalati di Lepidocicline dichiarate eoceniche siano, qual per l'una e qual per l'altra ragione da lui addotta, inesatti, gli concedo che la breccetta nota come eocenica del M. Iudica, dove anch'io ho osservato una Lepidocyclina non distinguibile dalla* DILATATA (*Michelotti*), *ed assieme a Nummuliti, purtroppo indeterminabili, sia invece tongriana...* » ([3]).

Da poco ho potuto visitare, insieme col prof. Di-Stefano e col dott. Gemmellaro, i terreni intorno al Monte Scalpello (gruppo del Monte Iudica) e constatare personalmente l'esistenza di quei lembi di calcare a *Lepidocyclina* nella regione Paraspora, presso lo sbocco del valloncello Carbonara e più sopra, a destra del Valloncello.

Ivi si osservano, tanto sulla destra che sulla sinistra del torrente, delle argille verdicce, brunicce, di color cioccolata, con intercalazioni lentiformi di strati di un calcare a litotanni, grigio o rossiccio, specialmente nelle parti esterne, ora tenace, ora facilmente disgregabile e passante a breccia.

Questi calcari sono ricchi di *Lepidocyclina*, a cui si associano *Nummulites*, *Orthophragmina* ed altri foraminiferi. In quelle argille si osservano anche degli strati di una arenaria gialliccia.

Questa formazione, superiore all'Eocene, copre anche la parte elevata delle colline della regione Paraspora, e per un accavallamento dovuto a fenomeni orogenetici, dei quali hanno parlato il prof. Di-Stefano ([4]) ed il

([1]) Checchia-Rispoli, *I Foraminiferi eocenici del gruppo del Monte Iudica e dei dintorni di Catenanuova in provincia di Catania* (Boll. Geol. Ital., vol. XXIII), 1904.

([2]) V. in Rend. R. Acc. d. Lincei, Cl. sc. fis. mat. e nat., vol. XVI, 1° sem., ser. 5ª, fasc. 6°, 1907.

([3]) Silvestri A., *Sull'età geologica delle Lepidocicline*, in Atti d. Pontificia Romana Acc. d. N. L., anno LX, 1907.

([4]) Di Stefano G., loc. cit., 1907.

dott. Scalia, nel suo recente e importante lavoro (1), s'immergono, sulla sinistra della valletta, sotto il Trias fossilifero, che costituisce parte della regione Paraspora.

La fauna che si raccoglie nelle brecciuole calcaree contenute nelle argille scagliose è essenzialmente composta di *Lepidocyclina* di medie e piccole dimensioni; però queste forme, nonostante la loro grande abbondanza, non possono riferirsi che a poche specie, fra cui ben distinte sono la *Lepid. dilatata* Micht. sp., la *Lepid. marginata* Micht. sp. e la *Lepid. Tournoueri* Lem. et Douv.

I fossili più abbondanti, dopo le Lepidocicline, sono le Nummuliti, riferibili con sicurezza alla *Nummulites Boucheri* de la H., che è la più comune, alla *N. vasca* Joly et Leym., e a qualche altra specie, che, per il cattivo stato di conservazione, non ho potuto per ora ben determinare. Alle Lepidocicline ed alle Nummuliti si associano delle *Orthophragmina*, da rapportarsi tutte alla *Orth. Di-Stefanoi* Ch.-Risp., la quale, oltre a trovarsi diffusissima nell'Eocene siciliano, è stata ritrovata anche da noi in parecchie località della formazione oligocenica della Sicilia, come si vedrà in lavori consecutivi. Si osservano infine nelle stesse lastre calcaree non rari esemplari dell' *Heterostegina reticulata* Rütm., dell' *Operculina complanata* Defr. sp., della *Gypsina globulus* Reuss sp. e di una *Amphistegina*, comunissima, che con molta probabilità sembra riferirsi alla *Amphistegina Niasi* Verbeek sp. (2).

La fauna, che qui ho esaminata e che mi propongo di illustrare prossimamente, dimostra l'Oligocene, per la presenza di Nummuliti generalmente

(1) Scalia S., *Il gruppo del Monte Iudica* (Boll Soc. Ital., vol. XXVIII), 1909.

(2) Sono delle piccole forme lenticolari, appuntite nel centro delle facce, dal margine tagliente e dalla superficie ornata di strie semplici. La sezione equatoriale mostra una piccola loggia centrale circolare, una spira regolare (su di un $r = 1,2$ mm. si contano 5 a 6 giri di spira) e dei setti numerosi molto inclinati sulla spira e spesso arcuati. Questi caratteri si trovano tutti nell'*A. Niasi,* dalla quale noi non sapremmo separare gli esemplari in esame. L'*A. Niasi,* secondo il Verbeek, che primo la descrive (v. *Description géologique de Iava et Madoura,* 1896), sarebbe ancora vivente nei fondi sabbiosi presso alle rive, ove è lo sbocco di taluni ruscelli dell'isola di Nias. Però con molta probabilità gli esemplari di questa specie, che ivi si raccolgono, potrebbero provenire dalla disgregazione degli avanzi delle marne mioceniche dell'interno dell'isola e poi trasportati dai ruscelli al mare, tanto più che, sulle rive si trovano unicamente alla foce dei fiumi. Essa intanto è comune nelle marne del Burdigaliano di Nias, Sumatra, ecc. È stata poi ritrovata dal Vredenburg (v. *Nummulites Douvillei, an undescribed species from Kachh with remarcks on the zonal distribution of indian Nummulites,* 1906), al quale spetta l'averla staccata dal gen. *Nummulites* e riferita al gen. *Amphistegina,* insieme con piccole *Lepidocycline,* nella parte più elevata della formazione a *Clypeaster* di Pagu or Mekran nell'India. In ultimo la signorina Osimo (v. *Di alcuni Foraminiferi dell'Eocene di Celebes,* 1908) la rinvenne nell'Eocene superiore di Celebes, insieme con *Nummulites, Lepidocyclina,* ed altri foraminiferi in campioni di rocce raccolti dal prof. G. Bonarelli.

conosciute in tutto l'Oligocene (per quanto la *Numm. Boucheri*, come abbiamo più volte scritto, apparisca di già nell'Eocene superiore) e per la mancanza di tipi esclusivamente eocenici. Nell'Oligocene questa fauna, che si raccoglie in istrati immediatamente superiori e concordanti sul Bartoniano, non occupa un posto elevato, come indica la presenza di *Orthophragmina*, la cui diffusione verticale, per quanto è noto finora, non oltrepassa il Tongriano.

Sarà il caso più tardi di studiare quale sia l'estensione di questa formazione nel gruppo del M. Iudica. Per ora ho esaminato anche i campioni di calcare marnoso raccolti nel 1900 dal prof. Di-Stefano col dott. Scalia nella regione Passo del Ladrone, appartenente allo stesso gruppo montuoso del M. Iudica e posta nel territorio di Rammacca. Questi calcari marnosi grigio-giallicci, secondo le concordi affermazioni dei proff. Di-Stefano, Vinassa e Scalia, che hanno visitata la regione, si trovano sulle argille scagliose eoceniche e sono rappresentati da alcuni piccoli resti di denudazione. Ho trovato in essi, oltre a resti di Lamellibranchi (*Ostrea*), abbondanti *Lepidocyclina*, tra cui la *Lepid. dilatata* Micht. sp., la *Lepid. Raulini* Lem. et Douv., e poi una *Amphistegina*, identica a quella precedentemente descritta.

I resti calcarei in esame occupano la stessa posizione dei calcari a *Lepidocyclina* della regione Paraspora. Le argille bartoniane che li sostengono, contengono a poca distanza dal Passo del Ladrone, cioè sotto le case di Giumarra, strati di brecciuole calcaree con Nummuliti ed altri foraminiferi eocenici, come *N. garganica* Tell., var. *samnitica* Ch.-Risp., *N. italica* Tell., *N. Guettardi* d'Arch., *N. Tchihatcheffi* d'Arch. et H., *Orth. sella* d'Arch. sp. ecc.

È dunque logico pensare che quei calcari rappresentino anche un lembo dell'Oligocene; però questa conclusione deve essere emessa, almeno per ora, con riserbo, perchè il materiale paleontologico che ho potuto studiare è ristretto, mentre dall'altro canto le *Lepidocyclina*, che vi si raccolgono, salgono anche in sedimenti miocenici.

Rileviamo in ultimo che la *Hexagonocyclina*, da me citata nel 1904 sotto la denominazione *Lepidocyclina* (?) *aspera* Gümb., in varie località del gruppo del M. Iudica e sulla sinistra del Dittaino, non ha nulla da fare con le *Lepidocyclina* di cui mi occupo in questa Nota, e che proviene da strati certamente eocenici. Forme simili alla *Hexagonocyclina* ora citata si rinvengono pure nell'Eocene della provincia di Palermo.

Chimica — *Analisi della lega rame-manganese. Titolazione diretta di ferro e manganese esistenti in una stessa soluzione.* Nota del dott. E. Azzarello, presentata dal Corrispondente A. Peratoner.

Avendo avuto occasione di analizzare delle leghe contenenti in media il 95 % di rame ed il 5 % di manganese e per le quali era condizione essenziale quella di contenere solo piccolissime quantità di ferro, sono stato indotto a ricercare un metodo di analisi il quale, oltre a fornire risultati esatti, presentasse quella rapidità e quella semplicità che tanto sono indispensabili in un laboratorio di chimica tecnologica.

La separazione del rame dal ferro e dal manganese viene eseguita facilmente con diversi metodi e fra questi è molto comodo ed elegante quello elettrolitico. La separazione del ferro dal manganese invece non riesce sempre tanto semplice, specie quando uno di questi due elementi trovasi solo in piccolissime proporzioni. Avendo preso in esame parecchi fra i moltissimi metodi proposti all'uopo, in alcuni non ho riscontrata quella celerità o quella semplicità tanto necessaria, per altri ho dovuto convincermi che non si prestano tanto bene al caso presente (1).

(1) Oltre ai comuni metodi all'ammoniaca, al carbonato di bario, al succinato sodico e all'acetato (Mittasch, Z. f. anal. Ch., *42* [1903], pag. 492; Brunch, Ch. Ztg. [1904], pag. 1513; Funk, Z. f. angew. Ch., *18* [1905], pag. 1687; Z. f. anal. Ch., *45* [1906], pag. 181), ho preso in esame ancora il metodo al carbonato ammonico (Herschel, Ann. de ch. et phys. [3], *49* [1856], pag. 306; Schwartzenberg, Ann. d. Ch. u. Pharm., *97* [1856], pag. 216), quello al solfato sodico (Kessler, Z. f. anal. Ch., *11* [1872], pag. 258; *18* [1879], pag. 3), quello al clorato potassico (Beilstein e Jawein, Ber., *12* [1879], pag. 1528; Hampe, Ch. Ztg., *7* [1883], pag. 73 e *9* [1885], pag. 1478; Jesse Jones, Monit. Scientif., luglio 1895), quello al carbonato monosodico (Meineke, Z. f. angew. Ch., *1* [1888], pag. 227), quello all'idrossilamina (Jannasch e Rühl, Chem. Centr., 1905, II, pag. 706) e quello alla piridina (Moor e Miller, Am. Ch. Soc., *30* [1908], pag. 593).

Due metodi da prendersi in considerazione, ma che non presentano quella rapidità che mi propongo, sono quello di Krieger (Ann. d. Ch. u. Pharm., *88* [1853], pag. 261) e quello di Bollenbach e Luchmann recentemente pubblicatosi (Chem. Centr., 1909, I, pag. 44). Secondo il primo metodo si precipitano simultaneamente ferro e manganese con carbonato ammonico, si pesa il precipitato dopo calcinazione e quindi si titola in esso l'ossido manganoso-manganico o l'ossido ferrico. Il secondo metodo consiste nel titolare ferro e manganese in porzioni aliquote della stessa soluzione e cioè in una si dosa il ferro con permanganato potassico, nell'altra ferro e manganese ossidandoli in soluzione alcalina con ferricianuro di potassio e titolando con permanganato il ferrocianuro formatosi.

Anche i metodi elettrolitici non sono realmente pratici (Classen e Reis, Ber., *14*; Classen, Ber., *14*, pag. 2771; Classen e Ludwig, Ber., *18*: Hollard e Bertiaux, Bull. soc. chim., *29* [1903], pag. 926; ecc.).

Ho potuto però constatare che, separato elettroliticamente il rame dalla soluzione solforica della lega, si possono successivamente dosare in essa con esattezza e rapidità ferro e manganese l'uno dopo l'altro accoppiando i metodi volumetrici di Margueritte (1) per il primo, e di Volhard-Wolff (2) per il secondo. Così in base ad un'unica pesata e senza ricorrere a frazionamenti della soluzione come consigliano Classen (3) e Lunge (4) (ciò che oltre ad essere poco comodo non sempre è possibile fare o per la poca quantità di campione disponibile o per la troppo esigua proporzione di uno degli elementi da dosare) si arriva in un sol giorno a completare l'analisi di diversi campioni di rame-manganese.

In soluzione acida infatti si titola benissimo un sale ferroso in presenza di manganese per mezzo del permanganato potassico (5) ed una volta ottenuta la esatta ossidazione del ferro si può procedere con grande semplicità sullo stesso liquido alla determinazione del manganese col metodo Volhard-Wolff previa separazione del ferro con ossido di zinco. In questo caso basta togliere dal manganese trovato quello introdotto in soluzione durante la titolazione del ferro.

Che tale accoppiamento sia stato da altri sinora eseguito non mi risulta.

Ecco il modo di operare:

Gr. 1 circa di lega si sciolgono in 10 cc. di ac. nitrico, del p. sp. 1,2, in un bicchiere di vetro di Jena di forma alta, della capacità di 200 cc., coperto con vetro da orologio. Dopo che la reazione si è rallentata, si riscalda a b. m. fino a completa soluzione, si aggiungono 2 cc. di ac. solforico conc. e si evapora a b. m. fino quasi a secco, quindi si elimina l'eccesso di ac. solforico scaldando cautamente a bagno di sabbia fino a che non si svolgono più vapori acidi. Dopo raffreddamento si aggiunge un po' d'acqua acidulata con ac. solforico, si scalda sino a completa dissoluzione

(1) Ann. de chim. et de phys. [3], *18* (1846), pag. 244; vedi anche Skrabal, Oesterr. Ch. Ztg., *13*, (1910), pag. 1.

(2) Guyard, Bull. soc. chim., *6* (1863), pag. 89 e Chem. News, (1863), pag. 292; Winkler, Z. f. anal. Ch., *3* (1864), pag. 423; Habich, Z. f. anal. Ch., *3* (1864), pag. 474; Morawski e Stingl, J. f. prakt. Ch., N. S., *18* (1878), pag. 96; Volhard, Ann. d. Ch. u. Pharm., *198* (1879), pag. 318; Meineke, Ref. d. anal. Ch., *3* (1883), pag. 337 e *5* (1885), pag. 1; Liebigs Ann., *189*, pag. 239; Stahl u. Eisen, *4*, pag. 702; Särnström, B. u. H. Ztg., *40* (1882), pag. 425; Wolff, Stahl u. Eisen (1891), pag. 377; confronta anche Fischer, Z. anal. Ch., *48* (1909), pag. 751 e de Konink, Chem. Centr., (1904), I, pag. 1429 e II, pag. 64.

(3) Ausg. Method. d. anal. Ch., I, pag. 468 (1901).

(4) Ch. tec. Unt. meth., II, pag. 236 (1905).

(5) Kessler, Pogg. Ann., *118*, pag. 41 e *119*, pag. 225; Zimmermann, Ber., *14* (1881), pag. 779 e Ann. d. Ch. u. Pharm., *213* (1882), pag. 302; Manchot, Ann. d. Ch. u. Pharm., *325* (1902), pag. 105.

(se sono presenti piccole quantità di silice e di solfato di piombo si separano per filtrazione e si dosano con i soliti metodi), si aggiungono 3 cc. di ac. solforico conc., si diluisce a 150 cc. ed il liquido, *preventivamente riscaldato a circa 60°*, si sottopone ad elettrolisi usando elettrodi di Winkler (¹), una corrente di 0,3 Amp. per dm.² ed una tensione di 1,7-1,8 Volts (²).

Dopo circa 5 ore la deposizione del rame è completa, si stacca allora il catodo, dopo di averlo lavato con un po' d'acqua senza interrompere la corrente, si finisce di lavare, si essicca con le solite precauzioni e si pesa.

Il liquido restante, contenente le prime acque di lavaggio del catodo e nel quale si ritorna ad immergere l'anodo, si scalda e, agitando, si tratta con pochissima acqua ossigenata al 3 %, goccia a goccia, sino a dissoluzione del precipitato di ossidi di manganese e di ferro ed a distruzione delle eventuali piccole quantità di ac. permanganico formatesi durante l'elettrolisi (³). Quindi si tratta con una soluzione di permanganato $N/_{100}$ sino a colorazione rosa onde distruggere l'eccesso di acqua ossigenata, tenendo conto del permanganato consumato e che corrisponde ad una quantità di manganese allo stato di sale manganoso che indicheremo con A (1 cc. di $KMnO_4$ $N/_{100}$ dà gr. 0,00011 di Mn) (⁴), Si versa allora il liquido in un pallone adatto, si riduce con zinco, e con le solite norme si dosa il ferro con la suddetta soluzione di permanganato (1 cc. = gr. 0,00056 di Fe) (⁵). Si avrà così un'altra quantità di manganese allo stato di sale manganoso introdotto in soluzione e che indicheremo con B (⁶). In seguito si neutralizza la maggior parte dell'acido con soda caustica, si aggiunge un piccolo eccesso di ossido di zinco sospeso nell'acqua e con le dovute precauzioni si titola il manganese totale con permanganato $N/_{10}$ (titolato nelle stesse condizioni in cui si dovrà operare; 1 cc. = gr. 0,00165 di Mn) (⁷). Sottraendo A + B dal manganese totale trovato si ottiene la quantità di manganese contenuta nella soluzione primitiva.

(¹) Ber. (1899), pag. 2192.

(²) Alla fine dell'operazione si hanno 0,27 Amp. e 2,5 Volts.

(³) Usando un anodo costituito da un cilindro di rete di filo di platino, alto 50 mm. e con 12 mm. di diametro, si ottiene su di esso un deposito relativamente molto aderente e si verifica quasi mai durante l'elettrolisi la formazione di ac. permanganico. In questo caso riesce più facile portare il deposito in soluzione facendo arrivare direttamente su di esso l'acqua ossigenata.

(⁴) $2KMnO_4 + 5H_2O_2 + 4H_2SO_4 = 2KHSO_4 + 2MnSO_4 + 8H_2O + 5O_2$.

(⁵) È consigliabile controllare una volta tanto il contenuto in manganese di questa soluzione trasformando il permanganato in sale manganoso e dosando poi il manganese col metodo Volhard-Wolff.

(⁶) $2KMnO_4 + 10FeSO_4 + 8H_2SO_4 = K_2SO_4 + 2MnSO_4 + 5Fe_2(SO_4)_3 + 8H_2O$.

(⁷) $2KMnO_4 + 3MnO = K_2O + 5MnO_2$.

Riporto qui i risultati ottenuti applicando il suddetto metodo di analisi sopra miscele di soluzioni titolate di solfato di rame, di manganese e di ferro:

	I		II		III	
	Calcolato	Trovato	Calcolato	Trovato	Calcolato	Trovato
Cu %	95,00	94,96	90,00	90,02	96,36	96,31
Mn »	4,50	4,53	9,00	8,95	3,05	3,06
Fe »	0,50	0,48	1,00	0,97	0,59	0,60

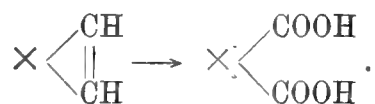
Una *lega di rame e manganese* diede in nove diverse analisi i seguenti numeri:

	Seguendo il metodo proposto da Lunge [1]	
	I	II
Cu %	94,86	94,87
Mn »	4,60	4,64
Fe »	0,42	0,38
Pb »	tracce	tracce

	Seguendo il metodo descritto nella presente Nota						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Cu %	94,85	94,85	94,84	94,87	94,85	94,87	94,86
Mn »	4,59	4,64	4,61	4,64	4,62	4,63	4,59
Fe »	0,45	0,42	0,44	0,40	0,43	0,40	0,40
Pb »	tracce	tracce	tracce	tracce	tracce	tracce	tracce

Chimica. — *Ricerche sulla stricnina e brucina* [2]. Nota di R. Ciusa e G. Scagliarini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Come hanno reso assai probabile le interessanti ricerche di Hermann Leuchs sull'ossidazione della stricnina e brucina, nella molecola di questi due alcaloidi dovrebbe esser presente un doppio legame, che, nell'ossidazione, dovrebbe dar origine ai due carbossili dell'acido stricnonico e brucinonico [3]

$$X\left\langle\begin{matrix}CH\\ \|\\ CH\end{matrix}\right. \longrightarrow X\left\langle\begin{matrix}COOH\\ \\ COOH\end{matrix}\right. .$$

Uno di noi (Ciusa) ha già da un certo tempo intrapreso delle ricerche su questi alcaloidi, ed ora per prender data comunichiamo i risultati otte-

[1] Loco cit.
[2] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Bologna.
[3] Berichte *41*, 1711, 4393; *42*, 770-2494-2681-3067-3703.

nuti nello studio dell'azione del bromo sulla stricnina; ricerche intraprese appunto allo scopo di riconoscere la natura del doppio legame.

Il bromo è stato fatto agire sinora in soluzione acquosa sulla soluzione acquosa del bromidrato di stricnina da H. Beckurts ([1]) e da Léon Martin ([2]). Per azione di una mol. di bromo su una mol. del bromidrato questi Autori ottennero sempre una monobromostricnina $C_{21}H_{21}O_2N_2Br$ fondente a 222° dalla quale non si riesce ad eliminare in alcun modo acido bromidrico. Per azione successiva di un'altra mol. di bromo Martin (l. c.) ottenne una bibromostricnina $C_{21}H_{20}O_2N_2Br_2$ fondente a 130-131° e i due perbromuri $C_{21}H_{21}O_2N_2Br . HBr . Br$, $C_{21}H_{20}O_2N_2Br_2 . HBr . Br$ corrispondenti rispettivamente alla mono-, ed alla bibromostricnina.

Anche Beckurts (l. c.) ottiene per azione di due mol. di bromo una sostanza fondente a 230° alla quale assegna la formula $C_{21}H_{20}O_2N_2Br_2$ e che per riscaldamento con acqua svolge HBr e si trasforma in una base $C_{21}H_{20}O_2N_2Br$ che fonde a 216°. Questa base non fu però studiata ulteriormente, nè, secondo noi, è stata ottenuta allo stato puro; perchè vien descritta come una sostanza che facilmente si resinifica: molto facilmente si tratta della monobromostricnina fondente a 222° e quindi la sostanza bibromurata fondente a 230° deve essere considerata come un bibromuro di stricnina $C_{21}H_{22}O_2N_2Br_2$.

Finalmente Löbisch e Schoop ([3]) ottennero per azione del bromo in acido solforico concentrato sulla stricnina scioltaparimenti in acido solforico conc. una monobromostricnina differente da quella fondente a 222° e che dà con acido solforico e bicromato potassico una colorazione bleu differente dalla colorazione caratteristica che dà nelle stesse condizioni la stricnina. Inoltre per riscaldamento sotto pressione di questa β-monobromostricnina con potassa alcoolica si avrebbe separazione di bromuro potassico e formazione di una nuova base ([4]).

Nelle nostre esperienze abbiamo fatto agire il bromo sulla stricnina sciolta in acido acetico glaciale. In questa maniera si ottiene un bibromuro $C_{21}H_{22}O_2N_2Br_2$ che esiste in due modificazioni.

La prima più solubile fondente a 122° e che per cristallizzazione successiva dall'alcool ed anche per fusione si trasforma nella modificazione stabile fondente a 260°. Anche la forma cristallina è assai differente: la prima modificazione cristallizza in aghi incolori riuniti a rosetta; la seconda forma degli splendidi cristalli monoclini.

([1]) Berichte, *18* (1885) 1235; Central Blatt, *1890*, 2°, 60; Arch. der Pharm., *243*, 493 (1905).

([2]) Bulletin, *1904*; 386.

([3]) Monatsheft *6*. 855 (1885).

([4]) È nostra intenzione di intraprendere lo studio di questa β-monobromostricnina e della base che si ottiene per azione della potassa alcoolica, studio che L. e S. non continuarono.

Questo bibromuro già in soluzione alcoolica, o meglio per ebollizione con acqua si trasforma in una sostanza isomera, solubile in acqua a caldo, e che però deve essere considerata come il bromidrato della monobromostricnina fondente a 222°; se si tratta infatti questa nuova sostanza in soluzione acquosa con potassa, ammoniaca o acetato sodico si ottiene la monobromostricnina fondente a 222°, già ottenuta da Beckurts e da Martin (l. c.). Una prova fatta per vedere se era possibile ottenere eliminazione di HBr mediante la potassa alcoolica ci ha dato risultato negativo.

La monobromostricnina sciolta in acido acetico glaciale è capace alla sua volta di addizionare bromo: come prodotto principale si ottiene però per successiva cristallizzazione dall'alcool metilico una magnifica sostanza cristallina giallo-arancio contenente sei atomi di bromo e che ha il carattere di un perbromuro e che risponde alla formula $C_{21}H_{22}O_2N_2Br_6 . H_2O$. Molto probabilmente si tratta di un perbromuro del bromidrato della monobromostricnina. $C_{21}H_{21}O_2N_2Br . HBr . Br_4 H_2O$.

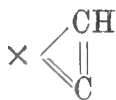
Come prodotti secondarî siamo riusciti ad isolare una sostanza cristallina con quattro atomi di bromo, che noi riteniamo sia il bromidrato del bibromuro della monobromostricnina, $C_{21}H_{21}O_2N_2Br . Br_2 . HBr$ ed una seconda sostanza che all'analisi dà dei numeri corrispondenti a quelli richiesti dal bibromuro della monobromostricnina.

Mentre la stricnina e la monobromostricnina in soluzione acida per acido solforico diluito riducono immediatamente il permanganato, il bibromuro della stricnina ed il bibromuro della monobromostricnina lo riducono solamente dopo un certo tempo ([1]).

Della monobromostricnina e dei due bibromuri abbiamo studiato anche l'azione fisiologica: su ciò verrà riferito in una prossima Nota.

La monobromostricnina e i due bibromuri della stricnina non reagiscono nè coll'idrossilamina, nè colla *p*-nitrofenilidrazina.

Il contegno della stricnina col bromo da noi trovato può interpretarsi ammettendo che nella molecola di questo alcaloide esista un doppio legame del tipo:

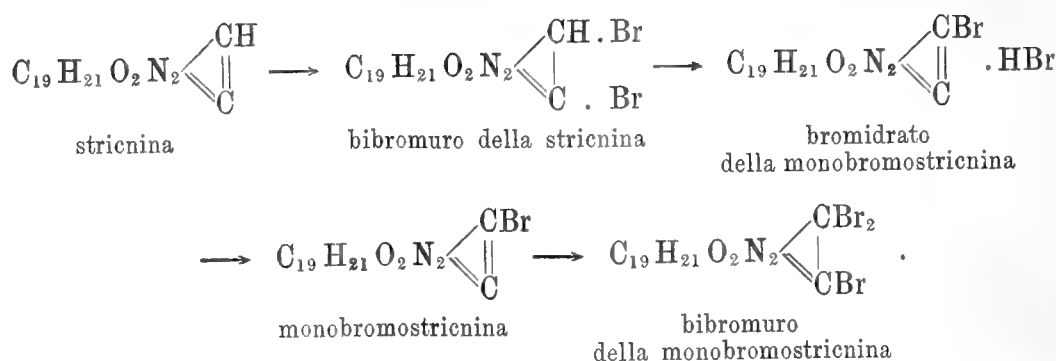
$$\times \begin{cases} CH \\ \| \\ C \end{cases}$$

sicchè l'azione del bromo e le trasformazioni delle sostanze ottenute possono essere intese collo schema seguente:

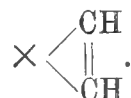
([1]) È noto che per le sostanze basiche primarie, secondarie e terziarie la prova al permanganato di Baeyer non può farsi in soluzione alcalina. Per le basi primarie e secondarie conviene prepararne il benzolsolfoderivato, per le terziarie bisogna operare in soluzione acida.

$$C_{19}H_{21}O_2N_2\left\langle\begin{matrix}CH\\ \|\\ C\end{matrix}\right. \longrightarrow C_{19}H_{21}O_2N_2\left\langle\begin{matrix}CH.Br\\ |\\ C\ .\ Br\end{matrix}\right. \longrightarrow C_{19}H_{21}O_2N_2\left\langle\begin{matrix}CBr\\ \|\\ C\end{matrix}\right. .HBr$$

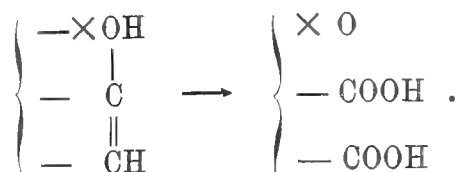
stricnina — bibromuro della stricnina — bromidrato della monobromostricnina

$$\longrightarrow C_{19}H_{21}O_2N_2\left\langle\begin{matrix}CBr\\ \|\\ C\end{matrix}\right. \longrightarrow C_{19}H_{21}O_2N_2\left\langle\begin{matrix}CBr_2\\ |\\ CBr\end{matrix}\right. .$$

monobromostricnina — bibromuro della monobromostricnina

Ciò sta alquanto in contraddizione con quanto ammette Hermann Leuchs (l. c.), secondo il quale nella stricnina si dovrebbe trovare un doppio legame:

$$\times\left\langle\begin{matrix}CH\\ \|\\ CH\end{matrix}\right. .$$

Bisogna osservare che l'acido stricnonico è chetonico: Hermann Leuchs ammette che anche la stricnina (e brucina) sia chetonica; ma che la funzione chetonica non si possa manifestare per impedimenti sterici. A noi pare invece che la funzione chetonica si formi nell'acido brucinonico e stricnonico contemporaneamente all'ossidazione, e che la funzione del secondo atomo di ossigeno nella molecola dei due alcaloidi non sia quindi ancora con sicurezza chiarita: non bisogna dimenticare che tutte le volte che nei prodotti di trasformazione della stricnina e brucina compare la funzione chetonica, sparisce contemporaneamente la tossicità, ciò che fa pensare che avvenga una modificazione profonda nella struttura.

Potrebbe ammettersi che nei due alcaloidi il secondo atomo d'ossigeno si trovi sotto forma di idrossile come si può dedurre dalle esperienze di Schützenberger [1] e G. Minunni [2], e l'ossidazione avvenga allora secondo lo schema:

$$\left\{\begin{matrix}-\times OH\\ |\\ -\ \ C\\ \|\\ -\ \ CH\end{matrix}\right. \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\times\ O\\ -COOH\\ -COOH\end{matrix}\right. .$$

Ad ogni modo Hermann Leuchs continua le sue ricerche ed anche noi abbiamo in corso delle ricerche in proposito e ci riserviamo di tornare quanto prima sull'argomento.

(1) C. r. 47,233.
(2) G. Minunni e G. Ortolena, Gazz. Ch. It., *30*, 1°.

PARTE SPERIMENTALE.

10 gr. di stricnina si sciolgono in 200 ccm. di acido acetico glaciale ed alla soluzione, mantenuta fredda con acqua si aggiunge, agitando continuamente, bromo finchè ne viene assorbito: si separa una sostanza giallognola, che si secca su potassa e si cristallizza dall'alcool. È bene adoperare un eccesso di alcool: per raffreddamento e meglio per evaporazione di una parte del solvente si separano degli splendidi aghi incolori riuniti a rosetta fondenti a 122° [1]:

gr. 0,1828 di sostanza diedero gr. 0,1404 di AgBr
» 0,1212 » » » 0,0936 » »
» 0,2036 » » 10,3 ccm. di azoto misurati a 23° e 766 mm.

$C_{21}H_{22}O_2N_2Br_2$	Calcolato	Br 32,38 ;	N 5,70
	Trovato	» 32,69 ; 32,86 ;	» 5,69

Questa prima modificazione del bibromuro della stricnina, che dà una colorazione violetta con acido solforico e bicromato potassico quando però si lasci la soluzione in acido solforico a sè per alcuni minuti (5-10 minuti) prima di aggiungere il bicromato, si trasforma al momento della fusione nella forma più stabile: dopo i 122° solidifica un'altra volta, e fonde poi a 260°. Si trasforma anche per ricristallizzazione dall'alcool, specialmente se si cerca di farla cristallizzare da soluzioni diluite. Qualche volta non si riesce ad ottenere la forma fondente a 122°, ma si ottiene già alla prima cristallizzazione la forma fondente a 206°. Questa modificazione più stabile forma dei cristalli grossi incolori sferoidali solubili a caldo in alcool ed in acido acetico glaciale poco solubile a freddo quasi insolubili in tutti gli altri solventi.

gr. 0,1612 di sostanza diedero gr. 0,2980 di CO_2 e gr. 0,0748 di H_2O
» 0,1620 » » 8,4 ccm. di N a 16° e 748 mm.
» 0,1778 » » gr. 0,1366 di AgBr
» 0,2002 » » » 0,1510 » »

$C_{21}H_{22}O_2N_2Br_2$	Calcolato	C 51,01 ;	H 4,45 ;	N 5,69 ;	Br 32,38
	Trovato	» 50,42 ;	» 5,15 ;	» 5,94 ;	» 32,57 ; 32,10

Se si fa bollire con acqua questo bibromuro a poco a poco vi si scioglie, e per raffreddamento cristallizza una sostanza sotto forma di aghi uniti a

[1] Assieme a questa sostanza si separa, se non si ha cura di seccare a lungo il prodotto grezzo della reazione su potassa una sostanza giallognola, avente carattere di perbromuro, e che all'analisi dimostra contenere tre atomi di bromo:
gr. 0,1306 di sostanza fornirono gr. 0,1297 di AgBr; gr. 0,2009 fornirono 9 ccm. di N ($t = 17°$ $p = 761$ mm.).
$C_{21}H_{22}O_2N_2Br_3$ Calc. Br 41,81; Trovato 42,26 Calc. N 4,89; Trovato 5,22.

rosetta, e che all'analisi fornisce dei numeri corrispondenti a quelli di un bromidrato di una monobromostricnina:

gr. 0,1704 di sostanza diedero gr. 0,1318 di Ag Br
" 0,1419 " " " 0,1078 " "
" 0,1524 " " 7,3 ccm. di N misurati a 11° e 767 mm.

$C_{21}H_{21}O_2N_2Br.HBr$ Calcolato Br 32,38; N 5,69
Trovato " 32,90; 32,40; " 5,81

Per aggiunta di potassa alla soluzione acquosa del bromidrato si separa una base che cristallizzata dall'alcool acquoso si ottiene sotto forma di aghetti sottilissimi, incolori fondenti esattamente a 222°-223° e che è identica alla monobromostricnina già preparata da Beckurts e Martin (l. c.):

gr. 0,1500 di sostanza diedero gr. 0,0702 di Ag Br
" 0,1870 " " " 0,0862 " "
" 0,1654 " " 10 ccm. di N misurati a 13° e 749 mm.

$C_{21}H_{21}O_2N_2Br$ Calcolato Br 19,37; N 6,78
Trovato " 19,91; 19,61; " 7,00

La monobromostricnina bollita con potassa alcoolica, o scaldata in tubo chiuso con potassa alcolica, non dà bromuro potassico. Con cloranile in soluzione etereo-alcoolica dà una colorazione violetta. Con acido solforico concentrato e bicromato potassico dà una colorazione fugace rosso-violetta.

La monobromostricnina trattata col bromo analogamente alla stricnina libera dà un precipitato cristallino giallo-rosso. Per cristallizzazione dall'alcool metilico di questo precipitato si ottiene una magnifica sostanza sotto forma di aghetti giallo-oro. All'analisi questa sostanza fornisce dei numeri che concordano con quelli richiesti da un perbromuro $C_{21}H_{22}O_2N_2Br_6.H_2O$:

gr. 0,1378 di sostanza diedero gr. 0,1556 di CO_2 e gr. 0,0312 di H_2O
" 0,1502 " " 4,70 ccm. di N misurati a 12° e 765 mm.
" 0,1698 " " gr. 0,2292 di Ag Br
" 0,1405 " " " 0,1911 " "

$C_{21}H_{22}O_2N_2Br_6.H_2O$ Calcolato C 30,33; H 2,51; N 3,37; Br 57,76
Trovato " 30,08; " 2,52; " 3,74; " 57,44; 57,88

Questa sostanza annerisce a 200° perdendo bromo, e non fonde: è solubile a caldo in alcool metilico, in acido acetico ed in cloroformio; dà con acido solforico e bicromato potassico una colorazione rossa che passa subito al verde.

Per riscaldamento con acqua o meglio con iposolfito, questo perbromuro perde bromo: rimane una sostanza che contiene 28,35-28,49 % di bromo [1].

[1] Lo studio di questo perbromuro, e della sostanza che si ottiene per ebullizione con acqua o con soluzione di tiosolfato, forma attualmente oggetto delle nostre ricerche.

Per concentrazione dell'alcool metilico da cui si separa il perbromuro, si ottiene una sostanza cristallina incolora che all'analisi dà dei numeri richiesti dal bromidrato, del bibromuro della monobromostricnina con una mol. d'acqua:

gr. 0,1639 di sostanza diedero gr. 0,2274 di CO_2 e gr. 0,0586 di H_2O
" 0,1642 " " 6,00 ccm. di N a 13° e 740 mm.
" 0,1724 " " gr. 0,1916 di AgBr
" 0,1404 " " " 0,1571 " "

$C_{21}H_{21}O_2N_2Br.Br_2.HBr.H_2O$ Calc. C 37,50; H 3,57; N 4,26; Br 47,62
Trov. " 37,82; " 3,99; " 4,44; " 47,30; 47,62

Questa sostanza si ottiene dall'alcool metilico sotto forma di una polvere cristallina, che riscaldata annerisce, senza fondere. Dalle acque madri metiliche per aggiunta di potassa si ha il bibromuro della monobromostricnina, sotto forma di un precipitato bianco, e che non si riesce a cristallizzare da alcun solvente. Si purifica sciogliendolo in alcool metilico e riprecipitandolo con acqua, oppure sciogliendolo in cloroformio e precipitandolo con ligroino:

gr. 0,1477 di sostanza diedero gr. 0,2400 di CO_2 e gr. 0,0660 di H_2O
" 0,1647 " " 7,10 ccm. di N misurati a 14° e 761 mm.
" 0,1614 " " gr. 0,1592 di AgBr

$C_{21}H_{21}O_2N_2Br.Br_2$ Calcolato C 43,97; H 3,66; N 4,88; Br 41,89
Trovato " 44,31; " 4,96[1]; " 5,08; " 41,91

Questa sostanza scaldata nel tubicino annerisce senza fondere. In soluzione di acido solforico diluito non scolora il permangato, mentre la stricnina e la monobromostricnina lo scolorano immediatamente.

Queste ricerche saranno continuate.

In una Nota comparsa nell'ultimo fascicolo dei Berichte [2], Hermann Leuchs e Friederich Leuchs intraprendono lo studio dei sali colorati isomeri della base della cacotelina. Sento quindi la necessità di far noto che, indipendentemente dalle esperienze precedenti di Hermann Leuchs (che aveva iniziato le sue ricerche colla ossidazione dei due alcaloidi con permanganato in soluzione acetonica) ho anch'io da un certo tempo incominciato lo studio dell'azione dell'idrossilamina, fenil-, *p*-nitrofenilidrazina e acqua di bromo sulla cacotelina, e spero di comunicarne quanto prima i risultati.

(R. Ciusa).

[1] In questa, come in altre determinazioni di idrogeno della stessa sostanza non siamo riusciti ad ottener numeri migliori: è noto che altre sostanze alogenate della stricnina si comportano allo stesso modo.

[2] Berichte: *43*, 1042.

Chimica — *Azione della luce sull'aldeide benzoica in presenza di iodio.* Nota di L. Mascarelli e N. Bosinelli, presentata dal Socio G. Ciamician.

In una Nota precedente (¹) uno di noi già descrisse quali sono i principali prodotti, che si ottengono quando l'aldeide benzoica viene esposta alla luce solare in presenza di piccole quantità di iodio. Fra questi vi è un olio bollente a 189-191° e 18^{mm} che, in seguito ai risultati avuti dall'analisi elementare e dalla determinazione del peso molecolare, si considerò come dimero dell'aldeide benzoica stessa.

Lo studio ulteriore di questa sostanza permise di stabilire, che è benzoato di benzile $C_6H_5COOCH_2C_6H_5$. Essa è assai poco volatile col vapor acqueo, può distillare a pressione ordinaria e allora bolle a 315°-320°. Quest'olio bollito a ricadere con soluzione di potassa alcoolica (si usò soluzione titolata) si saponifica quantitativamente secondo l'equazione:

$$C_6H_5COOCH_2C_6H_5 + KOH = C_6H_5COOK + C_6H_5CH_2OH .$$

Dal prodotto di saponificazione si isolò poi l'acido benzoico e l'alcool benzilico.

Ci accertammo che la formazione del benzoato di benzile era provocata dalla luce e non solo dalla presenza dello iodio, esaminando il contenuto dei tubi che, preparati fin dal 1906, erano stati conservati al buio fino ad ora.

Come si vede si è effettuata sotto l'influenza della luce ed in presenza dello iodio la ben nota reazione di Cannizzaro (²) per la quale l'aldeide benzoica può essere in parte ossidata ad acido benzoico ed in parte ridotta ad alcool benzilico. Se si pensa come detta reazione, che venne estesa a molte altre aldeidi da varî ricercatori, come da Lieben e suoi allievi (³), da Claisen (⁴), da Raikow e Raschtannow (⁵), da Tischschenko (⁶) ecc. è stata finora effettuata solo con alcali caustici o con sostanze a reazione alcalina, riesce difficile comprendere come lo iodio possa agire in tal caso.

(¹) Rend. R. Acc. Lincei, *19*, I, 383 (1910).
(²) Liebig's Annalen d. Ch., *88*, 129 (1853).
(³) Monatshefte f. Chemie, *21*, 1222 (1900); *22*, 289, 536, 545 (1901); ecc.
(⁴) Berichte d. deut. Ch. Ges., *20*, 646 (1887).
(⁵) Chem. Centralblatt (1902), I, 1212.
(⁶) Chem. Centralblatt (1906), II, b. 1310.

Con ogni verosimiglianza la reazione si compie attraverso fasi ben diverse da quelle che si hanno nella reazione di Cannizzaro [1].

Fra le interpretazioni appare più probabile quella che dà anche la spiegazione dell'azione catalizzatrice dello iodio. Lo ioduro di benzoile, che si forma in un primo tempo per azione dello iodio sull'aldeide [2] potrà reagire coll'acido iodidrico rigenerando iodio e formando alcool benzilico:

$$C_6H_5COJ + 3HJ = 4J + C_6H_5CH_2OH$$

il quale ultimo in presenza di altro ioduro di benzoile darà l'etere:

$$C_6H_5CH_2OH + J.COC_6H_5 = HJ + C_6H_5CH_2O.COC_6H_5.$$

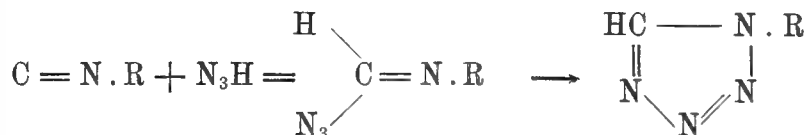
Che i cloruri dei radicali acidi per azione di riducenti possano originare eteri più o meno complessi è noto da lungo tempo [3].

Quest'interpretazione è in accordo anche col fatto, che la reazione non si compie al buio.

Infatti l'ioduro di benzoile che, secondo Wöhler e Liebig [4], pare non si formi per diretta azione dello iodio sull'aldeide benzoica, si origina invece da queste sostanze sotto l'influenza della luce [5].

Chimica. — *Azione dell'acido azotidrico sopra alcuni acidi della serie acetilenica. Sintesi dei derivati dell'osotriazolo* [6]. Nota di E. Oliveri-Mandalà e A. Coppola, presentata dal Corrispondente A. Peratoner.

In una Nota precedente uno di noi [7] ha dimostrato che l'acido azotidrico si condensa con la metil-carbilammina in derivato del tetrazolo:

$$C = N.R + N_3H = \begin{matrix} H \diagdown \\ C = N.R \\ N_3 \diagup \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} HC - N.R \\ \| \quad\quad | \\ N \quad\quad N \\ \diagdown N \diagup\!\!\diagup \end{matrix}$$

Era però prevedibile che quest'acido si fosse addizionato anche a composti acetilenici, in modo simile nel quale avviene pel suo etere fenilico, la

(1) Siccome recentemente il prof. Angeli ebbe a far cenno ad una nuova interpretazione di questa reazione (Rendic. R. Acc. Lincei, 1908, I, 313), così ho voluto consigliarmi con lui al riguardo.

(2) Mascarelli, Rend. R. Acc. Lincei, *19*, I, 386 (1910).

(3) Klinger e Schmitz, Berichte d. d. Chem. Ges., *24*, 1271 (1891); Anderlini, Gazz. Chim. It., *25*, II, 46 (1895).

(4) Annalen d. Chemie, *3*, 262 (1832).

(5) Mascarelli, l. c.

(6) Lavoro eseguito nel R. Istituto Chimico di Palermo.

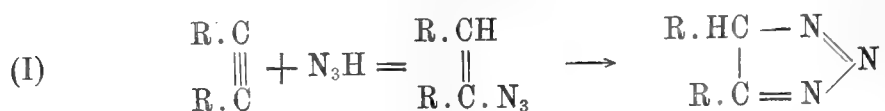
(7) Oliveri, Questi Rendiconti, vol. 14, serie 5ª, fasc. 4º, pag. 228.

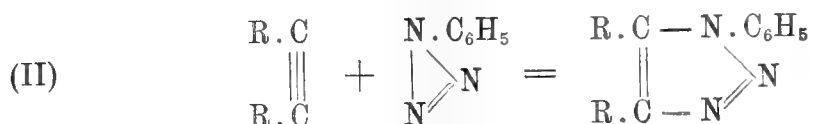
diazobenzolimide, che non solo si condensa con taluni derivati dell'acetilene [1], ma mostra in genere grande facilità di reazione di fronte a svariate sostanze: etere acetico, acetoacetico, propionico, malonico, cianuro di benzile, etere cianacetico ecc. [2].

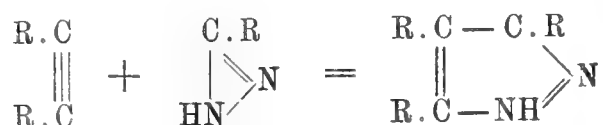
Ed infatti l'esperienza ha confermato le nostre previsioni; in quanto che l'acido azotidrico si è condensato con gli acidi propargilico, acetilen-dicarbonico e fenil-propiolico, e da tutti abbiamo ottenuto i corrispondenti derivati dell'osotriazolo.

Teoreticamente sono possibili i due seguenti casi:

O che l'acido azotidrico, come gli idracidi, si addizioni in un primo tempo ai composti acetilenici e l'azide così formata subisca poi una trasposizione intramolecolare secondo lo schema seguente:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{c} R.C \\ \||| \\ R.C \end{array} + N_3H = \begin{array}{c} R.CH \\ \| \\ R.C.N_3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} R.HC - N \\ \quad | \qquad\quad \rangle N \\ R.C = N \end{array}$$

oppure che avvenga una condensazione analoga a quella, con la quale A. Michael ed in seguito Michael, Luehn e Highbee dagli eteri fenil-propiolico ed acetilendicarbonico e diazobenzolimide passarono ai corrispondenti triazoli:

$$\text{(II)}\qquad \begin{array}{c} R.C \\ \||| \\ R.C \end{array} + \begin{array}{l} N.C_6H_5 \\ | \quad \rangle N \\ N \end{array} = \begin{array}{l} R.C - N.C_6H_5 \\ \quad \| \qquad\quad \rangle N \\ R.C - N \end{array}$$

Questa seconda reazione troverebbe la sua analogia nelle condensazioni dei diazoidrocarburi grassi ai legami acetilenici, da cui si ottengono i derivati del pirazolo [3]:

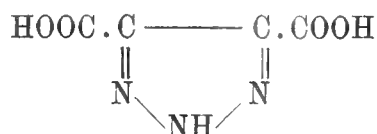
$$\begin{array}{c} R.C \\ \||| \\ R.C \end{array} + \begin{array}{l} C.R \\ | \quad \rangle N \\ HN \end{array} = \begin{array}{l} R.C - C.R \\ \quad \| \qquad\quad \rangle N \\ R.C - NH \end{array}$$

Ora poichè dalla condensazione dell'acido azotidrico con l'acido acetilendicarbonico si è ottenuto un acido triazol-dicarbonico, identico a quello preparato da Bladin e che per eterificazione con il diazometano ha fornito un etere trimetilico, in cui uno dei metili è attaccato indubbiamente ad azoto, perchè con potassa fornisce metil-ammina, è da conchiudere che la condensazione è avvenuta secondo lo schema (II), a meno che non si vogliano considerare le due formule sopra scritte come tautomere. In tal caso le due sostanze risulterebbero identiche e la condensazione si può interpretare egualmente bene con ambidue gli schemi.

[1] Journ. f. prakt. Chem., 1893; *48*, 94 — Am. Chem. Journ., 1898; *20*, 392.

[2] Cfr. Otto Dimroth, Berichte, *35*, 1029 — Ann. der Chem., 335, 1 e seg.

[3] Buchner e Fritsch., Berichte, 1893; *26*, 256 e seg. — Buchner, Berichte, 1889, *22*, 842.

Acido osotriazol-dicarbonico.

```
HOOC.C———C.COOH
     ||        ||
     N\      /N
        \NH/
```

Gr. 5 di acido acetilen-dicarbonico (1) sciolti in etere furono addizionati ad una soluzione eterea ugualmente concentrata di acido azotidrico in grande eccesso. Sembra che a freddo la condensazione non abbia luogo o per lo meno essa avvenga molto lentamente: se si riscalda invece per poco tempo (circa un quarto d'ora) a b. m. alla temperatura di 45-50° in un recipiente di vetro a pressione, si deposita una sostanza bianca polverosa che tappezza completamente le pareti della boccia. La sostanza lavata con etere fonde a 96°. Cristallizzata dall'acido cloridrico acquoso o meglio sciolta in acqua ove è discretamente solubile, e precipitata con acido cloridrico fonde a 99°. Essa è identica all'acido osotriazol-dicarbonico preparato quasi contemporaneamente da Bladin (2) e da Zincke (3) per ossidazione con permanganato potassico rispettivamente dall'azimido-toluolo e dall'acido azimido-benzoico.

L'acido seccato a 115° diede all'analisi i seguenti numeri:

gr. 0,1129 di sostanza fornirono cc. 25,4 di N a 14° e 764 mm.

Su 100 parti:

Calcolato per $C_4H_3O_4N_3$	Trovato
N 26,78	26,80

Etere dimetilico dell'acido N-metil-osotriazol-dicarbonico.

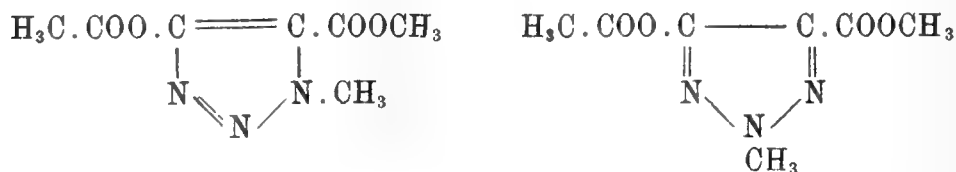
Questo etere fu preparato per eterificazione di gr. 2 di acido (1 mol.) con tre molecole di diazometano svolto da cc. 8 di nitrosometiluretano. Terminato lo sviluppo gassoso si evapora l'etere. Rimane in questo modo un olio di odore gradevole. Per aggiunta di qualche goccia di acqua e per forte fregamento si solidifica tosto in una massa cristallina lievemente colorata in giallo. La sostanza è solubile a freddo in etere, poco solubile in acqua e alcool. Essa si può cristallizzare dall'etere di petrolio. È più conveniente però di sciogliere la sostanza a caldo in etere, essendo necessaria una grande quantità di solvente per cristallizzarla e riprecipitarla con etere di petrolio. L'etere comincia a fondere a 55° ed a 60° è completamente fuso.

(1) Preparato assieme all'acido propiolico secondo le indicazioni di Perkin, Journ. Chem. Soc., 1907; 91, 834.

(2) Berichte, 1893; *26*, 545 e 2736.

(3) Ann. Chem. Pharm., 1896; 291, 341.

Bollito con una soluzione acquosa concentrata di alcali sviluppa metil-ammina, una prova che la sostanza contiene il gruppo $-N.CH_3$. Per l'etere in parola, data la facile mobilità dell' idrogeno immidico nel nucleo del triazolo, possono prendersi in considerazione le due seguenti formule isomere:

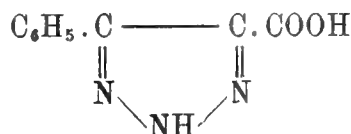
```
H3C.COO.C ═══ C.COOCH3          H3C.COO.C ──── C.COOCH3
        |      |                         ‖       ‖
        N      N.CH3                     N       N
         \    /                           \     /
           N                                 N
                                             |
                                            CH3
```

All'analisi:

1) gr. 0,1732 di sostanza fornirono cc. 31 di N a 14° e 760 mm.
2) gr. 0,2720 di sostanza diedero gr. 0,1172 di H_2O e gr. 0,4207 di CO_2.

Su 100 parti:

Calcolato per $C_7H_9O_4N_3$		Trovato 1	Trovato 2
C	42,11	42,18	—
H	4,52	4,78	—
N	21,10	—	20,89

Acido-C-fenil-osotriazol-carbonico.

```
C6H5.C ──── C.COOH
     ‖       ‖
     N       N
      \     /
        NH
```

Gr. 10 di acido fenil-propiolico sciolti in etere furono fatti reagire in un modo analogo con una soluzione eterea concentrata di acido azotidrico in grande eccesso. La reazione avviene molto lentamente e fa ricordare l'addizione degli idracidi, specialmente dell'acido cloridrico, che tanta analogia mostra con l'acido azotidrico, agli acidi acetilen-carbonici.

Infatti, mentre l'acido cloridrico, come l'acido azotidrico, si addiziona molto facilmente all'acido acetilen-carbonico e propargilico, esso invece si condensa con l'acido fenil-propiolico dopo una settimana (1). Ed analogamente mettendo a reagire l'acido azotidrico e l'acido fenil-propiolico a b. m. alla temperatura di 45-50° in una piccola boccia a pressione, dopo sei giorni di riscaldamento si riesce a condensare solamente circa 7/10 della quantità di acido fenil-propiolico impiegato.

Dopo questo tempo le pareti del recipiente si trovano rivestite di una sostanza bianca cristallina che è il prodotto della reazione.

(1) Michael, Pendleton, Journ. Prak. Chem. [3] *40*, 65.

L'acido C-fenil-osotriazol-carbonico fonde a 205-206° decomponendosi in CO_2 e feniltriazolo. Anche i carboacidi degli altri nuclei ciclici azotati (pirrolo, pirazolo, pirro-diazolo) eliminano con eguale facilità CO_2 dal carbossile, il quale si trova, come in questo caso, vicino al radicale fenilico.

La sostanza è insolubile in acqua, poco solubile in alcool, insolubile in etere, benzolo, etere di petrolio. Si scioglie negli alcali e riprecipita per aggiunta di acidi forti in polvere bianca amorfa.

Cristallizza dall'alcool acquoso. All'analisi ha dato numeri concordanti con la formula $C_9H_7O_2N_3 + 1/2\ H_2O$. Non si riesce però in alcun modo a disidratare l'acido, nè su acido solforico nel vuoto, nè riscaldando in corrente di aria secca a 130°. Verso 140° comincia a disidratarsi; nello stesso tempo però perde lentamente CO_2. Infatti sulle pareti fredde del tubo in cui era posta la navicella con la sostanza a seccare si osservarono dopo tre ore di riscaldamento degli aghetti bianchi che al punto di fusione furono identificati per fenil-triazolo.

All'analisi:

1) gr. 0,1537 di sostanza fornirono gr. 0,3074 di CO_2 e gr. 0,0514 di H_2O
2) gr. 0,1453 di sostanza fornirono gr. 0,2887 di CO_2 e gr. 0,0503 di H_2O
3) gr. 0,1582 di sostanza diedero cc. 29,4 di N a 16° e 760 mm.

Ed in 100 parti:

Calcolato per $C_9H_7O_2N_3 + 1/2\ H_2O$		Trovato		
		1	2	3
C	54,54	54,21	54,52	—
H	4,21	3,85	3,72	—
N	21,21	—	—	21,56

Sale di bario. — Si ottiene nel miglior modo sciogliendo l'acido in una soluzione acquosa diluita di ammoniaca e aggiungendovi cloruro di bario.

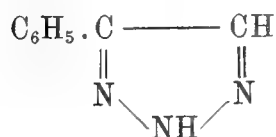
Precipita dopo un po' di tempo il sale di bario corrispondente, il quale cristallizza con due molecole di acqua che perde per lungo stare nel vuoto su acido solforico:

gr. 0,2540 di sostanza perdettero gr. 0,0155 di acqua.
gr. 0,2751 di sostanza fornirono gr. 0,1154 di $BaSO_4$

In 100 parti:

Calcolato per $(C_9H_7O_2N_3)_2\ Ba + 2H_2O$		Trovato	
H_2O	6,53	6,10	—
Ba	24,80	—	24,64

C-fenil-osotriazolo.

```
C6H5.C ——— CH
     ||      ||
     N\    /N
       \NH/
```

Gr. 1,5 di acido fenil-osotriazol-carbonico furono riscaldati in un tubo d'assaggio immerso in un bagno ad olio alla temperatura di 210-215°. Terminato lo sviluppo di anidride carbonica la massa fusa solidificò di nuovo per raffreddamento. Una parte del fenil-triazolo sublimò in piccoli aghi bianchi sulle pareti fredde del tubo. La sostanza è insolubile in acqua, etere acetico, poco solubile a freddo in benzolo, discretamente a caldo. Cristallizza dall'alcool acquoso o anche dal benzolo, in squamette soffici, di color madreperlaceo, le quali fondono a 143-145°.

Una determinazione di azoto ha dato:

gr. 0,1541 di sostanza svolsero cc. 38,8 di N a 17° e 759 mm.

Calcolato per $C_8H_7N_3$	Trovato
N 28,95	28,93

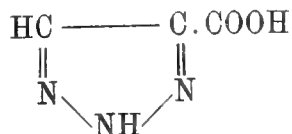
Il fenil-triazolo ha proprietà tanto basiche che acide: e pertanto dà un sale di argento, si scioglie negli alcali diluiti, precipitando poi per aggiunta di acidi, e forma con l'acido cloridrico e con l'acido cloroplatinico i sali corrispondenti.

Il *cloruro* $C_8H_7N_3 . HCl$ si precipita sotto forma di polvere bianca cristallina quando si fa passare acido cloridrico gassoso in una soluzione eterea del fenil-triazolo. Esso è insolubile in acqua fredda. A caldo vi si scioglie e si decompone lentamente. Fonde intorno ai 140°:

gr. 0,2125 di sostanza diedero gr. 0,1638 di AgCl corrispondenti a gr. 0,0409 di Cl.

In 100 parti:

Calcolato	Trovato
Cl 19,71	19,24

Acido osotriazol-carbonico.

È stato preparato come il precedente. La separazione di quest'acido dalla soluzione eterea avviene dopo circa 20 minuti di riscaldamento. Cri-

stallizzato dall'acqua fonde a 219°. È insolubile in etere, acetone e cloroformio. L'acido osotriazol-carbonico è stato estesamente descritto da Pechmann [1] che per il primo lo preparò per ossidazione dell'acido amido-n-fenil-osotriazolcarbonico con permanganato potassico e da Zincke [2] che l'ottenne per azione della liscivia di soda sul tricloroacetil-pirro(a, b)diazolo.

Infine O. Dimroth [3] lo preparò ossidando l'acido amino-fenil-1,3 triazol 5-carbonico e ne dimostrò l'identità con quelli preparati da Pechmann e da Zincke, i quali prima venivano ritenuti come isomeri.

Fisiologia vegetale. — *Metodo di sterilizzazione di piante vive per esperienze di fisiologia e di patologia* [4]. Nota dei dottori Eva Mameli e Gino Pollacci, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

Una delle difficoltà che si presentano in molte esperienze di biologia, di fisiologia e di patologia vegetale, è quella di riuscire a sterilizzare dei vegetali superiori senza impedire il loro normale sviluppo. I mezzi sterilizzanti fin'ora tentati a tale scopo, furono i lavaggi con acqua sterilizzata e con alcuni disinfettanti, quali il bicloruro di mercurio, l'acido cloridrico, alcuni sali di rame, di ferro, ecc. Ma l'uso dell'acqua sterilizzata dà risultati incompleti (come noi stessi potemmo sperimentare) perchè nella massima parte dei casi non asporta completamente i germi infettivi; e in quanto ai diversi disinfettanti fin'ora usati, se possono servire, ad una data concentrazione, per sterilizzare alcuni semi senza ucciderli, non servono invece per la sterilizzazione dei tessuti in vegetazione, che ne restano danneggiati più o meno fortemente.

Il prof. Giacomo Rossi, in un lavoro intitolato: *Terzo contributo allo studio della macerazione della canapa, Portici, 1907*, riuscì ad ottenere la sterilizzazione di pezzi di canapa senza alterare la loro struttura anatomica, usando una soluzione di acqua ossigenata al 3 °/₀ (pari a volumi 9 di ossigeno). Egli però non estese le sue ricerche a piante vive.

L'acqua ossigenata, com'è noto, è un potentissimo disinfettante. Miquel, Bert, Regnard, Ebell, Bruns, ecc., dimostrarono la sua potente azione distruttrice sui microrganismi, ed ora essa viene considerata come uno dei più forti antisettici conosciuti. Bruns infatti trovò che l'acqua ossigenata usata in soluzione al 3 °/₀ per la disinfezione delle ferite, ha un potere disinfettante

(1) Ann. der Chem., 1893; 262, 317.
(2) Ann. der Chem., 1900; 311, 317.
(3) Berichte, 1902; *35*, 1044.
(4) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Pavia.

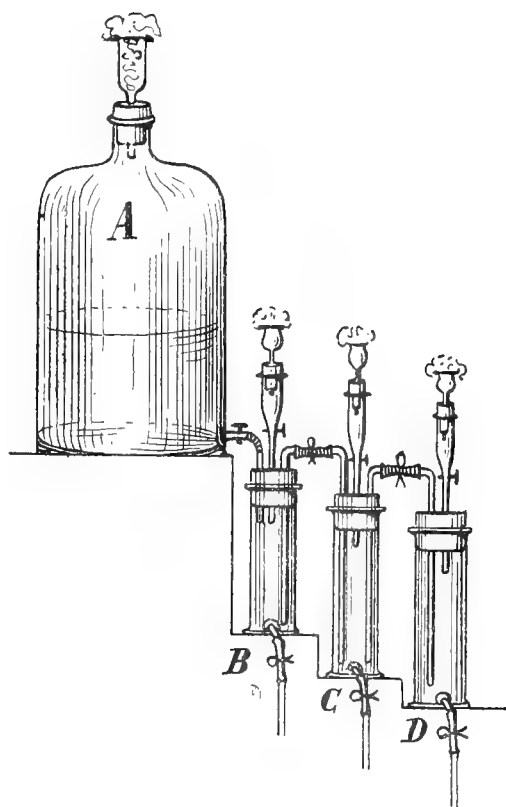
eguale a quello del sublimato corossivo all'1 $^{0}/_{00}$, e Miquel ottenne eguali effetti da acqua ossigenata gr. 0,05, bicloruro di mercurio gr. 0,07, e nitrato d'argento gr. 0,08. In pratica, com'è noto, l'acqua ossigenata viene usata, oltre che in chirurgia e in medicina, anche per la sterilizzazione e la conservazione di alcuni generi alimentari (latte, acquavite, birra) e dell'acqua potabile.

Venne anche sperimentata l'azione dell'acqua ossigenata sulla germinabilità dei semi. V. Sodin (*Annales agronomiques de Paris, XXIII, 462 e 468*) trovò che essa non ha efficacia sulla germinazione, mentre A. Sanna (*Atti del VI Congresso inter. di Chim. applicata, IV, 407*) trovò che l'acqua ossigenata esercita un'azione acceleratrice sulla germinazione dei semi (ceci, grano, ricino), specialmente nei primi 8 giorni. Egli ottenne i migliori risultati usando una soluzione acquosa contenente il 0,15 $^{0}/_{0}$ di acqua ossigenata. In organismi vegetali viventi vennero fatte esperienze da Chodat e Bach (*Berich. d. D. chem. Gesell., XXXV, 1275, 1902; e Ebenda, Heft 13, pag. 2466*), i quali stabilirono con ricerche sperimentali accurate, che, contrariamente all'opinione del Loew (che riteneva che l'acqua ossigenata fosse un forte veleno per la cellula vegetale vivente), l'acqua ossigenata *pura*, in soluzione non troppo concentrata, non è velenosa per il protoplasma vegetale. Venne anche constatato dallo Chodat e dal Bach che fino alla concentrazione dell'1 $^{0}/_{0}$, l'acqua ossigenata (contenente una soluzione di nitrato potassico) provoca nelle cellule di alcuni muschi una plasmolisi normale.

Nessun autore studiò per altro l'azione dell'acqua ossigenata sui vegetali superiori viventi, allo scopo di sterilizzarli, senza recar loro danno. Per alcune nostre ricerche sperimentali in corso, riguardanti la controversa questione dell'assimilabilità dell'azoto atmosferico per parte dei vegetali superiori [1], noi cercammo di ottenere con varî mezzi la disinfezione di semi e di piantine, senza alterare la germinabilità degli uni e la vitalità delle altre. Ma, se per i primi la sterilizzazione era possibile con i disinfettanti più comuni, per le seconde (piantine di Lemna, di Salvinia, di Azolla, di Nymphea, ecc.) non lo era altrettanto, poichè i tessuti radicali e fogliari delicatissimi di tali piante, non sopportavano, senza restarne danneggiate, una concentrazione tale che fosse sufficiente per sterilizzarle perfettamente [2]. Guidati infine dalla considerazione che, come risulta dalle ricerche degli autori su citati, l'acqua ossigenata ha un energico potere distruttore sui microrganismi, mentre non altera la struttura anatomica dei vegetali superiori, pensammo di applicarla alla disinfezione delle piante che volevamo far sviluppare in culture perfettamente sterilizzate. Sottoponemmo cioè all'azione

(1) Vedi nostra Nota preliminare in Rend. Acc. Lincei, 1910.

(2) Tentammo anche l'uso del fluoruro d'argento o tachiolo a concentrazioni diverse, ottenendo però, nelle numerose prove fatte, risultati ottimi come disifettante ma non applicabili al nostro caso perchè il tachiolo è troppo nocivo ai tessuti vegetali.

dell'acqua ossigenata *pura* a concentrazioni diverse, delle piantine di *Lemna major*, di *Salvinia auriculata*, di *Nymphea*, ecc., tenendovele completamente immerse per periodi di tempo successivamente crescenti a partire da un minuto. Dopo ciascun periodo si estraevano dalla soluzione di acqua ossigenata due piantine di ciascuna specie, che, accuratamente lavate con acqua sterilizzata, venivano messe, l'una in un palloncino contenente una soluzione nutritizia completa, l'altra in una provetta di cultura contenente brodo o gelatina sterile, che venne tenuta in termostato a 32° per 10 giorni. L'osservazione continuata per parecchi giorni dimostrò:

1°) che le piantine, convenientemente trattate con soluzioni di acqua ossigenata, si possono sterilizzare completamente;

2°) che esse possono vivere e continuare a moltiplicarsi dopo tale azione.

Il grado di concentrazione della soluzione, e la durata dell'azione, variano a seconda della specie vegetale. Oltrepassato un certo periodo di soggiorno nell'acqua ossigenata, le piantine restano danneggiate.

Il metodo che a noi risultò più conveniente fu il seguente: Sottoponemmo le piantine al lavaggio con acqua potabile sterilizzata, allo scopo di asportare le sostanze estranee, e la massima parte dei germi che vivono abbondanti sugli organi vegetativi delle piante acquatiche. L'apparecchio usato fu il seguente: Un serbatoio di vetro sterilizzato (A, v. figura) della capacità,

di parecchi litri, e munito di due tubulature, conteneva l'acqua sterilizzata occorrente per il lavaggio. La tubulatura superiore veniva turata con cotone sterilizzato; l'altra era messa in comunicazione con un secondo recipiente, munito, oltre che del tubo di attacco, di un sifone. In questo secondo vaso B, collocato più in basso, si metteva il materiale da sterilizzare. Si faceva passare l'acqua dal serbatoio nel pallone, da dove effluiva di continuo l'acqua di lavaggio per mezzo del sifone. Le piantine venivano così lavate abbondantemente senza trovarsi a contatto dell'ambiente esterno. Usando di un sifone a lume largo si possono asportare direttamente le piantine ben lavate dal recipiente B, senza aprire il vaso stesso. Il materiale poteva così essere portato nel recipiente C contenente l'acqua ossigenata, dopo avere aperto il vaso B, oppure per mezzo di un altro sifone. In C le piante subivano il contatto coll'acqua ossigenata (che veniva poi asportata per mezzo di un rubinetto con filtro) e venivano lavate abbondantemente con nuova acqua sterilizzata proveniente dal serbatoio A. Dopo di ciò esse passavano, per mezzo di un altro sifone, nel pallone D di cultura, munito, come i vasi B e C, di un rubinetto con filtro per l'uscita dell'acqua che era penetrata assieme alle piantine, e di un imbuto per l'introduzione della soluzione nutritizia.

Nella tabella seguente sono riportati i risultati ottenuti con piante di *Salvinia auriculata* e di *Lemna major*, organismi che data la delicatezza dei loro tessuti, e la difficoltà di sterilizzarli, causa la presenza di tricomi e di asperità (come nella Salvinia), permettono di generalizzare questo metodo di disinfezione a molti altri vegetali:

Pianta	Concentrazione della soluzione di H_2O_2	Durata dell'azione in minuti primi	Sterilizzazione	Stato della pianta
Salvinia auriculata	1,8 °/₀ = vol. 6 di O	60	Incompleta	Sano
»	2,1 /°₀ = vol. 7 di O	30	»	»
»	»	45	»	»
»	»	60	completa	»
»	2,4 °/₀ = vol. 8 di O	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	»
»	»	60	»	»
»	2,7 °/₀ = vol. 9 di O	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	»
»	»	60	»	»
»	3 °/₀ = vol. 10 di O	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»

Pianta	Concentrazione della soluzione di H_2O_2	Durata dell'azione in minuti primi	Sterilizzazione	Stato della pianta
Salvinia auriculata	3 °/₀ = vol. 10 di O	30	completa	sano
»	»	45	»	»
»	»	60	»	sofferente
»	3,3 °/₀ = vol. 11 di O	5	»	sano
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	»
»	»	60	»	sofferente
»	3,6 °/₀ = vol. 12 di O	5	»	sano
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	»
»	»	60	»	sofferente
Lemna major	1,8 °/₀ = vol. 6 di O	1	Completa	Sano
»	»	2	»	»
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»
»	»	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	»
»	»	60	»	sofferente
»	2,1 °/₀ = vol. 7 di O	1	»	sano
»	»	2	»	»
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»
»	»	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	sofferente
»	»	60	»	»
»	2,4 °/₀ = vol. 8 di O	1	»	sano
»	»	2	»	»
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»
»	»	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	sofferente
»	»	60	»	»
»	2,7 °/₀ = vol. 9 di O	1	»	sano

Pianta	Concentrazione della soluzione di H_2O_2	Durata dell'azione in minuti primi	Sterilizzazione	Stato della pianta
Lemna major	2,7 °/₀ = vol. 9 di O	2	»	sano
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»
»	»	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	»
»	»	45	»	sofferente
»	»	60	»	»
»	3 °/₀ = vol. 10 di O	1	»	sano
»	»	2	»	»
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»
»	»	5	»	»
»	»	10	»	»
»	»	15	»	»
»	»	30	»	sofferente
»	»	45	»	»
»	»	60	»	»
Lemna major	3,3 °/₀ = vol. 11 di O	1	Completa	Sano
»	»	2	»	»
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»
»	»	5	»	»
»	»	10	»	sofferente
»	»	15	»	»
»	3,6 °/₀ = vol. 12 di O	1	»	»
»	»	2	»	»
»	»	3	»	»
»	»	4	»	»

È certo quindi che, seguendo il metodo sopra descritto, si possono sterilizzare perfettamente con acqua ossigenata, piante vive senza danneggiarle; fatto questo non privo d'importanza per gli utili servigi che esso può rendere, non solo nelle ricerche di Biologia e di Fisiologia, ma anche in quelle di Patologia vegetale [1].

[1] La sterilizzazione di parecchie nostre culture fu controllata anche dal dott. Domenico Carbone, dell'Istituto d'Igiene della nostra Università, al quale porgiamo vivi ringraziamenti.

Agronomia. — *Sul terreno leucititico irriguo.* Nota di G. DE ANGELIS D'OSSAT, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Dalla esperienza esposta nella precedente Nota [1] *sull'azione caolinizzante delle radici sulle rocce laviche romane*, è legittimo inferire parecchie altre conclusioni di un qualche interesse pratico. Espongo le considerazioni con la massima brevità.

Con un semplice calcolo sulla superficie occupata dalla sabbia lavica e del corrispondente quantitativo di argilla prodotto dalle radici, si ricava che

cm^2 157	sono coperti da	kg.	1	di sabbia,	dando argilla	gr.	2
m^2 1	"	"	63,6	"	"	"	127,2
ha. 1	"	"	636,000	"	"	kg.	1272

L'argilla in questo caso, come già fu avvertito, non devesi intendere nel senso rigoroso mineralogico.

Ponendo che l'argilla sia derivata esclusivamente dalla *leucite*, ciò che non deve essere lontano dalla verità per essere il minerale predominante ed il più facilmente trasformabile, si ottiene:

per anno e per ha., *leucite* trasformata kg. 2145.

Da questa quantità, servendomi dell'$Al^2 O^3$ contenuta, si calcola di $K^2 O$ disponibile:

per anno e per cm^2 . . . . gr. 0,0046
" m^2 . . . . " 46,16
" ha. . . . . kg. 461,60
" e per kg. di sabbia *leucititica*, gr. 0,7222.

Dai trattati più autorevoli e recenti deduco che la cenere di fieno secco per ha. corrisponde a kg. 478,40, con kg. 128 di $K^2 O$: donde:

$K^2 O$ disponibile per ha. . . . . . . kg. 461,60
" asportata dalla produzione per ha. " 128
Rimangono . . . " 333,60

Essendo contenuto nella sabbia lavica il quantitativo di $K^2 O$ disponibile pari a kg. 429300, parrebbe si potesse facilmente ricavare dai dati, ora esposti, il tempo necessario a smaltire tutta la riserva (*potenza* + *ricchezza*): ma il calcolo è di natura ben più complessa. Non si conosce infatti la proporzionalità efficiente del fenomeno rispetto al tempo. In ogni modo, ponendo costante l'azione caolinizzante e la trasformazione della leucite, la

[1] Rendiconti R. Accademia Lincei, vol. XIX, ser. 5ª, 1° sem., fasc. 3°.

riserva potassica potrebbe almeno servire per 931 anni. Riflettendo poi che i calcoli poggiano solo sul tenue strato investito dalle radici del prato, si può essere sicuri che la K^2O non potrà difettare nei terreni provenienti dalle nostre lave: donde la niuna opportunità delle concimazioni potassiche nei terreni menzionati.

I rimanenti kg. 333 di K^2O della *potenza* annua dove emigrano?

Per rispondere alla non facile domanda e per determinare — più esattamente fosse possibile — il complesso fenomeno del ricambio delle sostanze nel terreno agrario, ho eseguito un esperimento in proposito.

In un vaso, con tutte le cautele praticate nella precedente esperienza, ho posto la stessa lava ridotta in polvere sottile, frammischiandovi granelli mezzani e grossi: questi ultimi però non superavano 5 mm. di diametro medio Nel vaso fu seminato lo stesso fiorume di prato (Graminacee e Leguminose); l'adacquamento fu praticato, con relativa abbondanza, due volte nella settimana con acqua Paola, come quella che rappresenta la meno dura fra le acque romane. Non ho trattato con acqua stillata per non allontanare troppo l'esperienza dal caso pratico e perchè temevo che il prato non prosperasse. I timori infatti furono giustificati, dacchè l'acqua di risulta, raccolta in un recipiente sottostante, dovetti riservire per ben due volte a causa del notevole intristimento della vegetazione. Ciò è importante constatare per due ordini di considerazioni.

Le condizioni meccanico-fisico-chimiche del suolo erano di gran lunga più propizie in questo che nel vaso della esperienza sulla caolinizzazione. In questa la sabbia era stata stacciata e liberata dalla terra fine, l'adacquamento avveniva con acqua distillata: nella presente esperienza fra la sabbia trovavasi la polvere sottile e l'irrigazione era praticata con un'acqua di complessa composizione chimica. L'intristimento della vegetazione in questo ultimo vaso rispetto al primo, con rigogliosa produzione, ha un valore notevole; dacchè dimostra sicuramente — essendo uguali le altre condizioni — che il fatto dell'uscita dell'acqua dal vaso è di per se stesso dannoso.

Possedendo poi il terreno agrario la proprietà di trattenere la potassa e l'anidride fosforica, le acque di risulta passate due volte attraverso il vaso devono avere abbandonato parte dei nominati elementi; dei quali, in caso contrario, avremmo trovato maggior quantità nelle acque percolate. I risultati chimici quindi rimangono certo al di sotto della verità e quindi conferiscono maggiore sicurezza alle conclusioni.

L'esperienza ebbe principio il 3 aprile 1908 e terminò nello stesso giorno dell'anno successivo.

L'acqua di risulta non fu abbondantissima, dacchè si raccolse, senza tener conto dell'evaporazione che si cercò tenere limitata, poco più di un litro per chilogramma di sabbia: quasi a pari volume.

Feci sottoporre all'analisi chimica quantitativa la roccia e l'acqua di scolo, per ottenere i quantitativi assoluti di K^2O e P^2O^5 contenuti.

Trascurai Ca O per tre ragioni:

a) perchè trovasi nella composizione della Paola,

b) e della lava;

c) e perchè presa particolarmente in esame in un altro esperimento.

I calcoli istituiti sopra i dati analitici hanno dato gr. 0,04 di K^2O per ogni litro d'acqua di scolo, cioè gr. 40 per m^3.

L'anidride fosforica risultò di gr. 0,00256 per litro e quindi gr. 2,56 per m^3.

Adunque l'acqua Paola, sprovvista di K^2O e di P^2O^5, scola ricchissima di quelle sostanze. Essa addiventa molto più ricca dei due nominati elementi di quello che siano le acque conosciute come notevolmente fertilizzanti. Infatti il Müntz trovò, per m^3 ed in gr. di K^2O, nella Durance 3.120, Sorgues 3,740, Rhône 2,980 e di P^2O^5 rispettivamente 0.034; 0,026; 0,032.

I risultati dell'esperienza superano quasi sempre anche i massimi che presentano le stesse acque di fognatura:

Per 1000 vol..	Krocker	Vay	Schlösing Th.
K^2O	0,02-0,06	0-0,003	0-0,007
P^2O^5	tr.	0-0,0017	tr.

Lo Schlösing trattò l'acqua di dilavamento di una terra argillosocalcarea ottenuta col metodo di spostamento.

La nostra acqua di scolo contiene disciolta più anidride fosforica di tutte le analisi citate; quasi similmente si può asserire per la potassa, rimanendo il quantitativo trovato colla presente esperienza solo inferiore al massimo raggiunto dal Krocker.

Considerando la quantità di K^2O disponibile in un anno, dopo aver detratto da essa la parte asportata con la produzione vegetale, rimane una quantità quasi esattamente proporzionale a quella rinvenuta nell'esperienza sull'azione caolinizzante delle radici. Vale a dire le due esperienze si controllano scambievolmente.

Ora della parte residua un solo quarto, quasi giusto, è dall'acqua asportato fuori dalla cerchia d'azione delle piante. Da ciò evidentemente risulta che il danno arrecato dall'irrigazione non può sicuramente attribuirsi alla K^2O, rispetto alla quantità. Rimane però a stabilirsi se il nocumento non avvenga per il dilavamento od esportazione della K^2O elaborata e pronta all'assimilazione. Un simile ragionamento può farsi riguardo all'anidride fosforica, della quale, rispetto alla rimanente parte, viene tolta dal campo di influenza delle radici solamente una quinta parte.

Rispetto poi alle quantità totali contenute nel terreno, la porzione sottratta dall'acqua per la K^2O è uguale $^1/_{522}$ e per l' $P^2O^5 = {^1/_{480}}$. Ciò però, è bene dichiararlo, risulta dalla sola nostra esperienza isolata.

Laonde, l'irrigazione abbondante se non mostra a primo esame il danno che arreca, ben lo rivela nel bilancio dello scambio delle sostanze, risultando abbreviato ± della metà il tempo necessario allo smaltimento delle rispettive *ricchezze* del terreno. E ciò, notisi, risulta solo considerando la parte residua, dopo aver fatto astrazione di quella servita alla produzione.

Da quanto appare dall'avvenuto intristimento della vegetazione, posto che debba ripetersi esclusivamente, od in gran parte, dalla soverchia irrigazione, parrebbe che l'acqua abbondante compisse nel terreno, rispetto alle piante, un ufficio ben diverso da quello che esercita vantaggiosamente nell'organismo vivente, dove funge anche da mezzo di trasporto delle sostanze con il minor consumo degli organi. Dallo studio dell'utile equilibrio delle soluzioni nutritizie nel terreno e negli specifici organismi vegetali, debbono derivare le leggi sull'irrigazione, la quale altrimenti sarà governata dall'empirismo, dal pregiudizio e dalle regole regionali.

Finalmente si stima superflua qualsiasi osservazione, a causa dell'evidenza, sull'alterazione subìta dalla *leucitite* nei riguardi della geodinamica.

Patologia vegetale. — *Ricerche istologiche sulle radici di diversi vitigni in rapporto al grado di resistenza alla fillossera* (¹). Nota di L. Petri, presentata dal Socio G. Cuboni.

Precocità e sviluppo del libro duro. — Uno dei caratteri anatomici delle radici che è comune alla totalità dei vitigni resistenti è la precocità del differenziarsi delle fibre liberiane e il successivo loro sviluppo in confronto al libro molle. Questo carattere, nella generalità dei casi da me osservati, rappresenta soprattutto un buon indice della resistenza nelle viti che, perdendo la prima peridermide verso il 3° anno, per quest'ultimo fatto potrebbero esser comprese fra i vitigni non resistenti. Le fibre liberiane non costituiscono però una causa della resistenza; il loro precoce differenziarsi e l'ulteriore grande sviluppo sono dei semplici esponenti di altre più complesse proprietà anatomiche e fisiologiche delle radici. Non si deve credere, per esempio, che i fasci fibrosi del libro possano essere un ostacolo al propagarsi dell'azione irritante che segue la puntura della fillossera. La formazione di tuberosità a spese del parenchima liberiano per punture avvenute in corrispondenza di fasci di fibre dimostra quanto sia infondata questa opinione.

Devo far notare come esistano alcune viti le quali sembrano non seguire la regola comune. Fra quelle poco resistenti, la *Lincecumii* (²) è l'unica,

(¹) In una Nota antecedente ho già accennato ai caratteri della peridermide.

(²) Secondo Gard, la *V. Lincecumii* o *Linsecomii* sarobbe un ibrido di *Aestivalis-Candicans*. Secondo Munson, una varietà di *Aestivalis*. I caratteri del libro duro sono

che io sappia, la quale presenti, sino dal primo anno, un discreto sviluppo del libro duro e lo conservi anche nei periodi successivi.

Questa vite perde la prima peridermide al 3° anno, la sua vulnerabilità alla fillossera è forse spiegata dalla mancanza, nelle sue radici, di alcune proprietà chimiche comuni ad altri vitigni aventi una struttura affine dell'apparato radicale. È nota anche la insufficiente resistenza della *Solonis* in alcuni terreni, ora in questa vite la prima peridermide della radice cade presto (inizio del 2° anno), e le fibre liberiane possono comparire in molte radici già alla fine del primo. Si tratta quindi di due caratteri di vitigno resistente. Il libro duro però in molte radici comparisce tardi e in generale al 2° e 3° anno non acquista mai quello sviluppo che la sua precocità avrebbe fatto supporre. Ho trovato alcune radici di due anni che erano quasi del tutto prive di fibre liberiane. Questo carattere di vite poco resistente si trova in accordo coi resultati della pratica. Citerò infine la *Coriacea*, vite di una resistenza sconosciuta, non attaccata però dalla fillossera. La caduta della prima peridermide avviene al 3° anno e le fibre liberiane si differenziano al secondo, proprio come in una varietà di *Labrusca*. L'immunità in questo caso è determinata da una serie di fattori i quali evidentemente non sono in rapporto diretto con lo sviluppo del libro duro.

L'esame microscopico, per la valutazione dei caratteri delle fibre liberiane, deve essere eseguito su sezioni trasverse di radici di 1, 2 e 3 anni, perchè spesso negli ibridi una comparsa precoce delle fibre liberiane non è sempre seguìta da un corrispondente notevole sviluppo di questo tessuto nell'età successive.

Raramente alle prime fibre liberiane si uniscono in numero più o meno grande delle cellule sclerenchimatiche che, nell'ulteriore accrescimento della corteccia possono anche trovarsi disseminate negli strati periferici del parenchima corticale (*Riparia* [1], *Rupestris*, *Candicans*). In un caso solo (*Rotundifolia*) ho notato la formazione costante di una guaina fibrosa, continua, lateralmente ai fasci liberiani [2]. Salvo il caso più sopra accennato (*Coriacea*), in tutte le viti ad elevata resistenza il libro duro comparisce sino dal primo anno di età della radice, spesso anche quando è appena iniziata la formazione della peridermide periciclica. Nelle viti asiatiche (*Romaneti*, *Amu-*

quelli della *Candicans* in ogni caso, piuttosto che quelli della *Aestivalis*, dalla quale per ciò che riguarda tale tessuto è nettamente diversa. Siccome ho notato che anche negli ibridi naturali costantemente vi è prevalenza dei caratteri del genitore meno resistente, se la *Lincecumii* fosse un ibrido *Aestivalis-Candicans*, dovremmo trovare il libro duro tardivo ciò che non è. Non si può escludere però che si tratti di un ibrido a $^3/_4$ di sangue di *Candicans*.

(1) In questo vitigno tali elementi sclerosi furono osservati già dal Pichi.

(2) Questa struttura si continua anche nel fusto (Gard). Szigethi-Gyula ha pubblicato un disegno dove la serie laterale delle fibre liberiane è ben manifesta.

rensis) e nella *Vinifera* il libro duro si differenzia al secondo anno e anche al principio del 3°. Nell'*Arizzonica, Labrusca, Californica*, tutte viti a resistenza assai debole, l'epoca della comparsa delle prime fibre liberiane e il loro sviluppo successivo corrispondono approssimativamente a quanto si verifica nella *Vinifera*. Nella *Rubra* il libro duro ha caratteri eguali a quelli presentati da questo tessuto nelle viti resistenti, la peridermide periciclica persiste quasi sino al 3° anno [1]. La *Monticola*, che cambia quest'ultima alla fine del 2° anno, forma il libro duro al primo anno, ma solo in modo appena apprezzabile.

Generalmente negli ibridi lo sviluppo del libro duro segue un andamento che corrisponde a quello della peridermide periciclica, e cioè le specie a libro duro tardivo, come la *Vinifera*, fanno pure ritardare il differenziarsi di questo tessuto nelle radici dei loro prodotti di incrocio con specie a libro duro precoce.

Negli ibribi *Riparia*- e *Rupestris*-*Berlandieri* la precocità della formazione di questo tessuto è conservata e lo sviluppo ulteriore è uguale ora all'uno, ora all'altro dei genitori.

Negli ibridi *Berlandieri* × *Vinifera* e *Vinifera* × *Berlandieri* il libro duro comparisce al 2°, anno e al 3° ha uno sviluppo paragonabile a quello che questo tessuto presenta nella *Vinifera*. Solo eccezionalmente si possono trovare radici che nel primo anno presentano traccie di fibre liberiane. Il clima e i terreni del meridionale possono ritardare il differenziarsi di questi elementi in quegli ibridi nei quali prevalgono i caratteri di un genitore a libro duro tardivo.

Rapporto fra l'apertura dei raggi midollari primarii e il diametro del cilindro legnoso. — La larghezza dei raggi midollari ha un valore molto relativo come carattere diagnostico delle proprietà anatomiche e fisiologiche della radice in relazione alla resistenza antifillosserica. Può infatti costituire semplicemente un indice delle variazioni del grado di resistenza che uno stesso vitigno subisce per diversità di condizioni d'ambiente.

Misurando la larghezza dei raggi midollari primarî all'altezza del cambio e determinandone il rapporto col diametro del cilindro legnoso, si ha un valore che, considerato nella media, è costante per le radici della stessa età di un medesimo vitigno, in determinate condizioni di vegetazione. Questo rapporto esprime indirettamente lo sviluppo relativo degli elementi legnosi,

[1] Alcune reazioni chimiche comuni alle radici di *Berlandieri, Rupestris, Rotundifolia* sembrano non esser partecipate dalla *Rubra*. Il saggio relativo però venne eseguito in inverno e il resultato quindi non può esser ritenuto per definitivo. La struttura delle radici di questa vite si avvicina a quella della *Cordifolia*. Nella pratica è sconosciuta la sua resistenza. Il libro duro molto sviluppato al terzo anno costituisce un carattere non dubbio di vite resistente. La *Lincecumii*, che rappresenta l'eccezione fra le specie non resistenti, al terzo anno non presenta mai il libro duro così sviluppato come nella *Rubra*.

la tendenza maggiore o minore della radice a un anormale aumento dei tessuti parenchimatici. Per ovviare a molti errori è preferibile misurare sempre i raggi midollari più larghi fra quelli primarî.

Questo rapporto (RL) presenta i suoi valori minimo e massimo rispettivamente nella *Riparia* ($^1/_{26}$-$^1/_{19}$) e nella *Vinifera* ($^1/_8$-$^1/_4$). Tutte le altre viti presentano valori intermedî senza alcuna correlazione col grado da loro occupato nella scala della resistenza sanzionata dalla pratica. Esiste però un certo parallelismo fra il variare del valore di RL e il grado di resistenza negli ibridi di *Riparia* e *Rupestris*, e in generale in tutti quegli ibridi che hanno per genitore più resistente un vitigno a raggi midollari molto stretti. In questi casi il diminuire del valore di RL indica nella radice un ritorno dei caratteri di vite più resistente.

La *Coriacea* e la *Candicans* presentano il rapporto RL quasi come la *Vinifera*: $^1/_9$. *Cordifolia, Rotundifolia, Berlandieri, Cinerea, Rupestris* hanno RL rispettivamente eguale a $^1/_{14}$, $^1/_{12}$, $^1/_{14}$, $^1/_{18}$, $^1/_{18}$.

Nella *Rupestris* quest'ultimo valore è dato solo dalla *Rupestris du Lot*, la *Rupestris Ganzin, Martin, Metallica* presentano rispettivamente $^1/_{14}$, $^1/_{15}$, $^1/_{11}$.

Müller (1) ha pure cercato di stabilire un rapporto fra la larghezza relativa dei raggi midollari e il grado di resistenza. Egli confrontava lo spessore dei raggi midollari a quello dei fasci legnosi. Le viti esaminate da questo botanico differivano troppo poco fra loro sia per la resistenza, sia per la struttura anatomica perchè da simili ricerche potessero derivare dei risultati soddisfacenti.

Influenza del clima e del terreno sulla variazione dei caratteri su indicati. — Le esperienze che ho istituito sino dal 1908 per stabilire l'influenza del clima e del terreno sulle variazioni chimiche ed istologiche nelle radici di alcuni vitigni, non sono ancora terminate. Mi limito qui a riferire sommariamente quanto ho potuto osservare nelle viti coltivate al nord e al sud d'Italia.

Nelle viti americane coltivate in Sicilia si nota un ritardo e un minore sviluppo del libro duro, un maggior diametro dei vasi del legno, una maggior tendenza a formare molto parenchima corticale e midollare. Un buon indice di queste variazioni è l'aumento della larghezza dei raggi midollari. Così per es. nella *Rupestris du Lot* il rapporto RL, che è eguale a $^1/_{18}$ al nord, in Sicilia può salire a $^1/_{10}$ e anche a $^1/_8$. Nella *Riparia gloire*, da $^1/_{19}$ ad Arizzano sale spesso a $^1/_{11}$ a Palermo. L'innesto con varietà di vite nostrale sembra favorire queste modificazioni strutturali (2).

(1) *Untersch. über die anat. Bau* ecc. Kaschau, 1882.

(2) Nella *Riparia gloire* innestata con *Perricone* da 12 anni (Palermo) il rapporto RL in alcune radici di 2-3 anni sale anche a $^1/_6$. Nelle radici più adulte si ha invece un valore normale.

Gli ibridi con sangue di *Vinifera* nel meridionale presentano uno straordinario sviluppo del parenchima corticale e dei raggi midollari in molte loro radici. La caduta della prima peridermide è alquanto ritardata. Queste modificazioni strutturali, che si possono esprimere affermando che, specialmente negli ibridi con sangue di *Vinifera*, i caratteri dominanti di questa specie vengono maggiormente esaltati, non dipendono tanto dal clima quanto dalla natura del terreno. Esistono infatti alcune località della Sicilia, come Campobello di Licata [1], dove gli impianti di alcuni ibridi europei-americani e americo-americani non presentano alcuna modificazione strutturale dell'apparato radicale. La *Berlandieri*, in confronto alla *Riparia* e alla *Rupestris* risente molto meno dell'influenza del terreno e del clima meridionali, i caratteri istologici delle sue radici almeno non mostrano costanti variazioni da quelli tipici [2].

Per ciò che riguarda i vitigni nostrali coltivati al sud esistono varietà, come *Mantonico* (Campobello) nelle quali il libro duro è discretamente sviluppato più che nel *Riesling renano*. In questa vite invece, come in altre del nord, esiste tutto al più un lieve anticipo della caduta della peridermide periciclica. Nel *Negro-amaro* delle Puglie il libro duro è assai più sviluppato che nel *Sangioveto* della Toscana o nel *Gamay* del Beaujoleais. Fra la *Fresia* e il *Cassòlo* del Lago Maggiore esiste una differenza di struttura assai più apprezzabile di quella che passa fra la *Fresia* e il *Negro-amaro*. In complesso, non esiste una diversità costante di struttura fra le radici di varietà di *Vinifera* del nord e quelle del sud; nel sud è forse più frequente la tendenza a formare dei larghi raggi midollari, ad aumentare cioè i tessuti di riserva. Ciò che presenta invece una differenza apprezzabile è la composizione chimica dei succhi [3].

Una delle conseguenze più manifeste di queste variazioni sotto l'influenza del clima e del terreno è il fatto ben constatabile della maggiore ricettività per la fillossera che nel sud presentano molti vitigni completamente immuni nel settentrione.

Per studiare la struttura delle tuberosità sulle radici adulte di *Riparia*, *Rupestris*, *Berlandieri*, e loro ibridi, invano ho cercato il materiale necessario negli impianti di queste viti nei terreni fillosserati del Piemonte e anche dell'Italia centrale, solo in Sicilia mi è stato possibile trovarne, sia pure in piccola quantità.

Struttura delle tuberosità sottoperidermiche nei diversi vitigni. — Oltre ai tre tipi di tuberosità che ho già descritto [4] per le radici di *Vi-*

[1] Si tratta di uno dei primi impianti, eseguito dal sig. Baebera, di Campobello.

[2] Nel R. vivaio di Noto ho osservato che qualche radice di *Berlandieri* ritardava sino al 2° anno la formazione del libro duro, ciò che normalmente non avviene mai.

[3] Ho già accennato ad alcune di queste differenze in altra Nota. (Cfr. questi Rendiconti, vol. XIX, 1910, pag. 27).

[4] *Studî sul marciume delle radici nelle viti fillosserate.* Roma, 1907.

nifera e che si osservano anche in tutte le altre viti a debole resistenza, si possono osservare per queste iperplasie fillosseriche altre modalità di struttura che credo opportuno ora di descrivere brevemente facendone notare i rapporti coi tessuti normali della radice.

I. Tuberosità sottoperidermiche di 2° grado differenti da quelle tipiche.

1. *Zona profonda di accrescimento a cui prende parte il parenchima liberiano.* — Specialmente nella *Vinifera* e, più di rado negli ibridi europeo-americani, alcune tuberosità devono la loro formazione a un'irritazione del libro molle. La proliferazione delle cellule di questo tessuto avviene in senso centripeto, venendo spostati verso l'esterno la guaina del fascio liberiano e gli elementi fibrosi più esterni (fig. 1, *a*). Sono queste tuberosità che evidentemente hanno fatto supporre a Szigethi-Gyula l'esistenza di uno speciale meristema alla cui attività sarebbero dovuti l'accrescimento del parenchima liberiano e quello del raggio midollare corticale [1]. Nelle radici sane, non fillosserate, questo fatto non avviene mai, inoltre nel caso di una proliferazione provocata dalla puntura fillosserica le divisioni cellulari non avvengono che in una sola direzione.

2. *Zone radiali di accrescimento che confluiscono col cambio.* — Nella Memoria già citata ho mostrato come il cambio possa prendere parte alla formazione di una tuberosità di 2° grado. In alcuni casi però la proliferazione del cambio non è molto esagerata ed è possibile allora constatare (specialmente nelle tuberosità formatesi in giugno) la fusione delle estremità interne delle zone radiali meristemali dei raggi midollari primarî col cambio (fig. 1, *b*).

3. *Zone di accrescimento ramificate.* — In alcune tuberosità di 2° grado le zone meristemali radiali sono ramificate verso la periferia del parenchima corticale (fig. 1, *c*).

II. Tuberosità sottoperidermiche superficiali. — Si tratta di tuberosità, comuni soprattutto alle viti americane di mediocre od elevata resistenza. Possono però presentarle anche la *Vinifera* e le altre viti poco resistenti.

1. *Con zona di accrescimento individualizzata.* — Nei vitigni europeo-americani, e più di rado nella *Vinifera*, l'irritazione si limita allo strato del parenchima corticale posto subito sopra al fascio liberiano (fig. 1, *d*).

In altri casi la zona di accrescimento si mantiene assai superficiale pure essendo manifesti i meristemi radiali dei quali solo la porzione più esterna di un solo lato è irritata (fig. 1, *e*).

[1] Cfr. Questi Rendiconti, vol. XVIII, p. 491.

Nella *Rupestris, Riparia, Riparia* × *Rupestris, Berlandieri, Berlandieri* × *Riparia, Berlandieri* × *Rupestris* le tuberosità possono presentare una zona di accrescimento arcuata molto superficiale, posta in generale in corrispondenza di un raggio midollare primario (fig. 2, *a*).

2. *Con iperplasia degli strati superficiali del parenchima corticale.* — Si tratta di tuberosità di nessuna gravità, molto salienti, spesso voluminose ma pochissimo penetranti. Si trovano anche sulle radici di *Vinifera*.

Sono dovute a una irritazione degli strati più esterni del parenchima corticale le cellule dei quali si dividono senza direzione determinata (fig. 2, *b*).

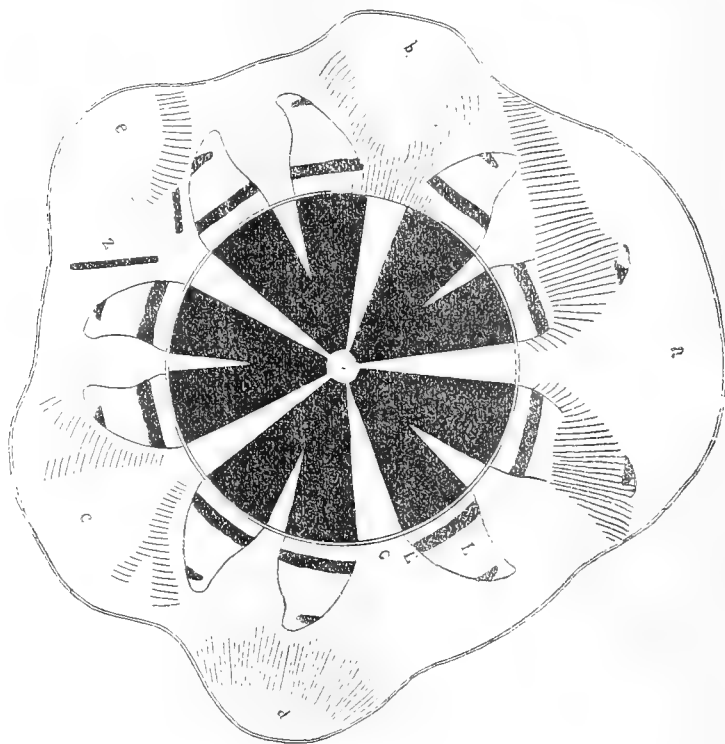



Fig. 1. — Schema di una sezione di radice con diversi tipi di tuberosità. — C = Cambio. L = libro molle. L′ = libro duro. Z = zona radiata meristemale del raggio midollare primario (immodificata). Per il resto cfr. il testo.

Altre tuberosità, simili nell'aspetto esterno, sono delle vere intumescenze costituite da cellule allungatissime in senso radiale (fig. 2, *c*). È facile osservare queste tuberosità nei terreni umidi.

III. *Tuberosità sui tralci.* — Sui tralci di *Vinifera* sotterrati, si trovano spesso delle tuberosità presentanti una struttura simile a quella delle iperplasie delle radici di 3 o 4 anni. Si formano a spese di due zone di accrescimento radiali poste ai lati dei fasci liberiani.

Le diverse modalità di struttura che possono presentare le tuberosità sottoperidermiche sono in relazione alla localizzazione delle molteplici serie cellulari del parenchima corticale che, nel periodo di massimo accresci-

mento in spessore della radice, entrano in attiva proliferazione. Nella fig. 2, *d* sono schematizzate le principali serie cellulari in accrescimento. Le divisioni cellulari avvengono normalmente alla direzione delle linee. L'esistenza di queste cellule a proprietà meristemali latenti nella corteccia della radice normale, non implica sempre una loro irritabilità in seguito alla puntura fillosserica. La trasmissione dell'irritazione alle diverse serie cellulari può essere arrestata più o meno presto nei varî vitigni a seconda delle condizioni di vegetazione. A questo riguardo anche una stessa radice può presentare delle differenze marcatissime.

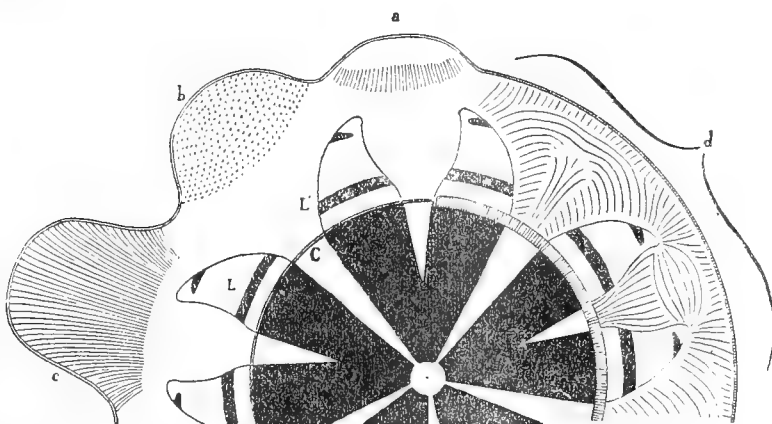



Fig. 2. — Schema di diversi tipi di tuberosità (come la fig. 1). d = Schema della localizzazione delle serie cellulari in accrescimento all'inizio del periodo vegetativo.

In generale le varietà di *Vinifera*, che presentano il libro duro più sviluppato, meno facilmente formano tuberosità molto penetranti.

In una prossima Nota riferirò su alcune proprietà chimiche delle radici, che possono contribuire a spiegare in qual modo avvenga una differente trasmissibilità dell'irritazione della puntura fillosserica nei varî strati cellulari della corteccia.

Fisiologia. — *Sugli scambii che avvengono nei ratti uniti in parabiosi* [1]. Nota di G. Amantea e P. Manetta, presentata dal Socio L. Luciani.

Nel 1908 Sauerbruch e Heyde rimisero in onore il metodo della parabiosi, già tentato (e con discreto successo) molti anni prima da P. Bert (1863), e consistente nell'unione di due animali (ratti, conigli) mediante ampia anastomosi delle cavità addominali.

Sauerbruch e Heyde poi, e altri autori assodarono che avvengono scambii tra gli animali così operati: infatti Sauerbruch e Heyde nei conigli in para-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. L. Luciani.

biosi dimostrarono il passaggio dall'uno all'altro animale, della stricnina, dell'iodio e dell'acido salicilico, iniettati sotto cute; Ranzi ed Ehrlich, servendosi pure della via sottocutanea per la somministrazione delle sostanze, provarono il passaggio dell'immunità attiva e passiva; Friedberger e Nassetti, servendosi di iniezioni endovenose nei conigli, dimostrarono anche il passaggio di antigeni; Forschbach provò il passaggio di quelle sostanze che impediscono l'insorgenza del diabete dopo l'estirpazione del pancreas nei cani; Heyde il passaggio dei prodotti tossici del ricambio, che si sviluppano dopo l'occlusione artificiale dell'intestino nei conigli.

Molto interessanti a questo proposito sono le ricerche del Morpurgo, il quale è riuscito a tenere in vita per più mesi coppie di topi in parabiosi, ad uno dei quali aveva praticato l'estirpazione completa dei reni. Nelle sue ricerche ha poi osservato, che, dopo l'estirpazione di un rene ad uno dei due topi della coppia, mentre il rene del lato opposto dello stesso animale andava rapidamente ipertrofizzandosi, nessuna modificazione macroscopica appariva nei reni dell'altro topo. Questa ultima osservazione apre alla discussione un importante quesito: gli scambii così attivi fra i due animali avvengono ugualmente, anche quando non si sian create nuove condizioni di necessità? (nel caso accennato il bisogno per parte del topo nefrectomizzato di eliminare i prodotti di regressione). Il fatto della mancata reazione dei reni del topo intatto, mentre il rene dell'altro si ipertrofizzava, deporrebbe in favore a che gli scambii avvengano soltanto o prevalentemente quando riesce impossibile all'animale di fare altrimenti, a meno di grave scapito per la vita sua.

Altre osservazioni poi del dott. U. Lombroso, dalle quali risultava che lo stato di gravidanza o di allattamento di una topa unita in parabiosi con un'altra, non esercita alcuna influenza sullo sviluppo e la portata lattea della seconda, potevano interpretarsi sia come un argomento contro la dottrina umorale dello sviluppo e portata lattea, sia come un argomento per dimostrare che negli animali così operati non avvengono scambii delle sostanze contenute nel sangue.

Per consiglio dello stesso dott. Lombroso, abbiamo intrapreso qualche ricerca sistematica, per dilucidare tale questione.

Noi ci siamo pertanto proposti di verificare: 1) come si comportino gli scambii in coppie di topi normali, e di topi a uno dei quali viene sottratto l'emuntorio renale; 2) come avvengano gli scambii, quando si somministrano le sostanze in esame per via gastrica (e non per iniezione, come è stato praticato dai precedenti autori nei ratti), e quando si adoperano coppie di animali di recente preparate.

Ritenemmo opportuno istituire ricerche, usando per la somministrazione la via gastrica, in quanto era da obbiettare alle ricerche fatte con iniezioni che la sostanza non giungesse da un animale all'altro per il circolo, ma che essa potesse diffondersi meccanicamente anche all'animale non iniettato.

Le ricerca poi sul comportamento di animali appena operati ci parve dovesse riuscire di un certo interesse per un'altra questione, e cioè per quale via avvenga lo scambio, se per via sanguigna o per via linfatica. (A questo proposito sono infatti molto disparati i pareri: per i conigli Heyde affermò che si formano vasi cospicui comunicanti; pei topi Morpurgo, Ranzi ed Ehrlich ritengono che gli scambii si verificano solo per via linfatica ecc.). Per quanto fosse ben nota la possibilità di una rapida formazione di vie sanguigne, pure un immediato passaggio di sostanze subito dopo l'operazione sarebbe stato un argomento per ammettere che la via linfatica è sufficiente a che si compiano tali scambii.

Epperò colla presente Nota ci limitiamo ad esporre i risultati che abbiamo ottenuto somministrando sostanze per via gastrica o per iniezione in coppie operate da diverso tempo, dando maggior diffusione a quelle in cui abbiamo somministrato le sostanze per via gastrica ad animali operati di recente, sembrandoci più dimostrative per lo scopo.

Abbiamo voluto ricercare il comportamento di sostanze per natura e diffusibilità molto diverse; e per ora abbiamo adoperato l'ioduro di potassio, il ferrocianuro di potassio, il bleu di metilene e la fluorizina, servendoci di topi (*Mus rattus*), bianchi o pezzati.

Mediante una piccola sonda, introdotta attraverso l'esofago fino nello stomaco, noi somministravamo da $^2/_{10}$ di cm.^{3} fino a 1-2 cm.^{3} delle diverse soluzioni (di concentrazione per solito piuttosto forte) ad uno dei topi della coppia. Poi con successivi tentativi, di ora in ora, cercavamo di ottenere urina dall'uno e dall'altro animale, servendoci di un semplicissimo espediente per provocare la minzione, cioè sollevando per la coda il treno posteriore dei due animali, e tenendolo così sollevato, fino a che non si fosse ottenuto l'effetto desiderato, che molto spesso però si vedeva anche mancare. Tuttavia, ad onta di questo inconveniente, per ottenere l'urina dei nostri topi siamo sempre ricorsi al suddetto metodo, sia per la sua semplicità e comodità estrema, sia perchè ci dava insieme la sicurezza di avere urine in niun modo alterate per influenze esterne.

Per la ricerca dell'ioduro di potassio ci siamo serviti della prova della colla di amido con aggiunta di qualche goccia di acido nitroso-nitrico; per la ricerca del ferrocianuro di potassio ci siamo serviti della prova del percloruro di ferro; per il bleu di metilene ci è bastata la semplice ispezione; e infine per la fluorizina abbiamo utilizzato la comparsa della glicosuria.

Abbiamo voluto controllare il passaggio di sostanze somministrate per via sottocutanea, servendoci specialmente dell'ioduro di potassio e del ferrocianuro di potassio, e vogliamo qui anche riferire due delle esperienze più evidenti in proposito:

Esperienza I.

16 marzo 1910. — Si uniscono in parabiosi due topi bianchi. Peso complessivo della coppia = gr. 170 circa.

21 marzo 1910, ore 10. — Si pratica al topo di destra una iniezione sottocutanea di 2 centigr. di *ioduro di potassio*. Nella giornata non si riesce ad ottenere urina dal topo di sinistra; nell'urina del topo di destra si trova positiva la reazione dell'iodio.

22 marzo 1910, ore 11. — Nell'urina del topo di sinistra si trova positiva la reazione colla salda d'amido, pel iodio.

Ore 12,40.— Reazione sempre positiva nell'urina del topo di sinistra.

Ore 15. — Reazione sempre positiva nell'urina del topo di sinistra.

Esperienza II.

21 marzo 1910. — Si uniscono in parabiosi due grossi topi bianchi, del peso di circa 150 gr. ciascuno.

2 aprile 1910, ore 9,40. — Si iniettano al topo di destra sotto cute $^{4}/_{10}$ di cm^{3} di una soluzione di *ferrocianuro potassico.*

Ore 11,15. — Nelle urine del topo di sinistra si trova intensa la reazione col percloruro di ferro.

Ore 14. — Reazione sempre positiva nelle urine del topo di sinistra.

Ore 16. — Idem.

Ore 18. — Idem.

3 aprile 1910, ore 10,30. — Reazione negativa nell'urina del topo di sinistra, mentre si ha ancora positiva, sebbene debole, in quella del topo di destra.

Delle esperienze eseguite somministrando le sostanze per via gastrica ad animali da molto tempo operati, ne riferiremo in succinto una sola, avendo avuto, in tutte le altre analoghe un comportamento affatto simile:

22 Gennaio 1909. — Si uniscono in parabiosi due topi bianchi del peso complessivo di gr. 140.

18 Novembre 1909. — Si somministra ad uno dei topi per via gastrica qualche centigrammo di *ioduro di potassio*; dopo $1^{1}/_{2}$ ore si ha netta la reazione del iodio nell'urina del topo dell'opposto lato.

Ed ecco ora le esperienze più evidenti eseguite somministrando le sostanze in esame per via gastrica a topi uniti in parabiosi da poco tempo soltanto:

Esperienza I.

21 marzo 1910. — Si uniscono in parabiosi due maschi bianchi adulti di *Mus rattus*; il peso della coppia è di circa 300 gr.

22 marzo 1910, ore 9,40. — Si somministrano per via gastrica $^{3}/_{10}$ di cm^{3} di una soluzione di *ferrocianuro potassico* al topo di destra.

Ore 10,45. — La reazione col percloruro di ferro dà risultato negativo nell'urina del topo di sinistra.

Ore 12,20. — Leggera reazione positiva nell'urina del topo di sinistra.

23 marzo 1910, ore 10,10. — Reazione negativa nell'urina del topo di sinistra.

24 marzo 1910, ore 10,50. — Si somministrano, sempre per via gastrica, al topo di destra $^{3}/_{10}$ di cm³ della stessa soluzione di *ferrocianuro potassico*.

Ore 16,30. — Si ha una lieve reazione positiva col percloruro di ferro nelle urine del topo di sinistra.

ESPERIENZA II.

27 marzo 1910. — Si uniscono in parabiosi due topi bianchi di medie dimensioni. Peso della coppia = gr. 180.

7 aprile 1910, ore 14,50. — Si somministra per via gastrica al topo di sinistra $1\,^{1}/_{2}$ cm³ di una soluzione satura di *ferrocianuro di potassio*.

Ore 17,15. — Reazione positiva evidente col percloruro di ferro nell'urina del topo di destra; reazione intensa nell'urina del topo di sinistra.

ESPERIENZA III.

27 marzo 1910. — Si uniscono in parabiosi due topi bianchi di medio peso (90 gr. circa ciascuno).

6 aprile 1910, ore 12,45. — Si somministrano per via gastrica al topo di destra 8-10 centgr. di *ioduro di potassio*.

Ore 15,15. — Reazione positiva nell'urina del topo di sinistra.

Ore 17. — Sempre positiva la reazione nell'urina del topo di sinistra.

7 aprile 1910, ore 10. — Reazione ancora positiva nell'urina del topo di sinistra.

ESPERIENZA IV.

9 aprile 1910. — Si uniscono in parabiosi due topi bianchi (di circa 100 gr.).

10 aprile 1910, ore 10. — Si somministrano al topo di destra per via gastrica 2 cm³ di una soluzione così composta: carbonato sodico gr. 2, fluorizina gr. 5, acqua gr. 100.

Ore 11,10. — Le urine del topo di sinistra non dànno la reazione del glucosio.

Ore 12,30. — Debole glicosuria nel topo di sinistra.

Ore 14. — È morto il topo di destra. Nelle urine di quello di sinistra si trova evidente la reazione del glucosio.

ESPERIENZA V.

26 marzo 1910. — Si uniscono in parabiosi due topi bianchi di 80 gr. ciascuno circa.

7 aprile 1910, ore 15,10. — Si somministra al topo di sinistra per via gastrica circa 1 cm³ di *bleu di metilene*. Fino alle ore 19 non si osserva una colorazione evidente nell'urina dei due topi.

8 aprile 1910, ore 11. — L'urina del topo al quale venne somministrato il bleu di metilene è intensamente colorata. Positiva pure la colorazione nell'urina dell'altro topo ma meno intensa.

ESPERIENZA VI.

13 aprile 1910, ore 18. — Si uniscono in parabiosi due topi di circa 50 gr. ciascuno.

14 aprile 1910, ore 11,30. — Si somministrano $^{3}/_{10}$ di cm³ di una soluzione satura di *bleu di metilene* per via gastrica al topo di destra.

Ore 14. — Lieve colorazione delle urine del topo di destra, nessuna in quelle del topo di sinistra.

Ore 16. — Idem.

Ore 18. — Leggera colorazione anche delle urine del topolino di sinistra.

15 aprile 1910, ore 11. — Nettamente colorate appaiono le urine del topo di sinistra.

Da queste nostre ricerche ci pare di poter concludere che sostanze di natura e diffusibilità diverse, come quelle da noi adoperate, passano dall'uno all'altro animale di ciascuna coppia sicuramente, anche se somministrate per via gastrica; e che il passaggio si verifica pure nelle coppie di recente operate.

Questi ci sembrano i risultati più sicuri delle nostre prime esperienze, che permettono ancora alcune altre considerazioni: così per es. ci è sembrato di poter notare una certa differenza nella rapidità con cui si ottiene la comparsa della sostanza somministrata, a seconda che si sia seguita la via sottocutanea o gastrica. Inoltre abbiamo potuto osservare che il ritardo nella comparsa della sostanza nell'urina, varia a seconda della natura della sostanza stessa. La comparsa — come era del resto, *a priori*, da prevedersi — è sempre più precoce nell'urina dell'animale cui la sostanza si è iniettata o fatta ingerire; mentre l'eliminazione si inizia più tardi e si mantiene sempre meno abbondante nel topo del lato opposto, specialmente per il bleu di metilene e per la fluorizina, mentre per l'ioduro di potassio pare giunga quasi ad equipararsi nei due animali.

BIBLIOGRAFIA

Sauerbruch und Heyde, « Ueber Parabiose Künstlich vereinigter Warmblütler ». Münchener med. Wochenschr. 1908, n. 4.

Morpurgo, « Ueber Parabiose bei weissen Ratten. ». Verb. d. deutschen pathol. Ges. XIII, Tagung. April 1909, Leipzig. S. 150; Giornale dell'Accademia medica di Torino, marzo 1909.

Ranzi e Ehrlich, « Ueber die Wirkung von Toxinen u. die Bildung von Antikörpern bei parabiotischen Tieren », Zeitschr. für Immunitaetsforschung, Ref. Bd. III, n. 1.

Friedberger und Nassetti, « Antikörperbildung bei Parabiose ». Freia Vereinig. f. Mikrobiologie in Wien, III, Tagung, Juni 1909, Ref. Zeitschr. f. Immunitaetsforschung, Ref. Bd. I, n. 8, S. 528.

Forschbach, « Parabiose u. Pankreasdiabetes ». Deutsche Kl. Wochenschr., 1908.

Heyde, « Ueber Parabiose ». Münchener med. Wochenschr., 1909, n. 44, S. 2084.

U. Lombroso, « Sullo sviluppo della glandola mammaria ». Bullettino dell'Associaz. fra cultori delle scienze mediche e naturali in Roma, Archiv. di Farmacol. e Scienze affini, vol. VIII, fasc. XI, 1909.

Lombroso e Bolaffio, « La parabiosi e la questione dei fattori che determinano la funzione mammaria e l'insorgenza del travaglio del parto ». Atti della Soc. Ital. di Ostetricia e Ginecologia, vol. XV, 1909.

Fisiologia — *Sulla secrezione di un segmento di pancreas completamente separato dai suoi normali rapporti nervosi* [1]. Nota del dott. Ugo Lombroso, presentata dal Socio L. Luciani.

Intendo nella presente Nota preventiva [2], esporre sommariamente i risultati di alcune osservazioni che interessano due fra i più importanti e fondamentali quesiti riguardanti la fisiologia del pancreas, il meccanismo cioè della secrezione pancreatica e la sua singolare adattabilità ai bisogni della digestione.

E' stato da Pawlow [3] e dai suoi allievi dimostrato che le secrezioni delle glandule digerenti si adattano in modo molto rapido e costante ai bisogni della digestione. Così ad esempio per il pancreas l'ingestione di pane determina una secrezione molto ricca di fermenti amidolitici, povera di fermenti lipolitici, e mediocremente proteolitica (quest'ultima attività però non è soltanto in rapporto con la secrezione pancreatica, ma pure con l'intestinale per l'intervento dell'enterochinasi). L'ingestione di grasso esalta la formazione dell'enzima lipasico, mentre diminuisce quella degli altri enzimi. La somministrazione poi di soluzioni di semplice acido cloridrico darebbe luogo ad una secrezione molto alcalina, ma pressochè sprovvista di attività enzimatica di qualsiasi genere.

Mentre sulle manifestazioni di questo interessante fenomeno, modificazioni delle attività enzimatiche in correlazione alle sostanze alimentari somministrate, furono portati molti contributi, poco è stato fino ad ora indagato il meccanismo ed i mezzi che l'organismo mette in opera per raggiungere tale adattamento. Che alcuni nervi, vaghi, splacnici, simpatico addominale, possano influire sulla secrezione pancreatica, era già stato intravisto da C. Bernard [4], Heidenhain [5] ed altri: e venne in seguito dimostrato da Pawlow [6], Mett [7], Kudrewetzkj [8]. A questi nervi si potrebbe ricorrere per spiegare il fenomeno dell'adattamento, ed il Pawlow tentò appunto una dot-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Roma diretto dal prof. L. Luciani.

[2] Nelle presenti ricerche sono aiutato dal dott. Orsini, che per tesi di laura ha scelto quale argomento lo studio del meccanismo della secrezione pancreatica.

[3] Pawlow, *Le travail de glandes digestives*, 1901.

[4] Cl. Bernard, *Physiologie Expérimentale*. T. II, p. 226 e sgg. 1856.

[5] Heidenhain, *Pflügers Archiv*. Bd. X, p. 608.

[6] Pawlow, *Archiv für (Anatomie) u. Physiologie 1893*. Suppl. Bd. § 176.

[7] Mett, *Archiv für (Anatomie) u. Physiologie 1894*, § 58.

[8] Kudrewetzky. *Archiv für (Anatomie) u. Physiologie*, 1894, § 83.

trina in questo senso. Secondo il Pawlow nella mucosa duodenale si troverebbero sparse numerose terminazioni nervose centripete, le quali non sarebbero tutte egualmente eccitabili dalle varie sostanze alimentari, ma soltanto dall'una o dall'altra sostanza, e corrispondentemente a questi eccitamenti specifici, si avrebbe una reazione appropriata nel senso che si determinerebbe una secrezione di enzimi atti alla digestione della sostanza eccitante. Questa ardita interpretazione del fenomeno dell'adattamento delle glandule digerenti venne però se non abbandonata dal Pawlow ritenuta bisognosa di una conferma sperimentale, dopo che, come vedremo, un altro concetto si fece strada riguardo al meccanismo della secrezione pancreatica opposta alla dottrina dei riflessi nervosi.

Non mi tratterrò qui a ricordare tutte le interessanti ricerche degli autori che successivamente studiarono la secrezione e le qualità enzimatiche di essa, ottenuta in seguito a stimoli artificiali del vago, degli splancnici ecc. ecc.

Da queste ricerche risulta solo, che con stimolazioni artificiali si può ottenere un secreto fornito delle varie attività enzimatiche, senza che si possa dimostrare una costante prevalenza di questa o quell'altra attività per la stimolazione di uno o di un altro nervo. Ricorderò soltanto le osservazioni di Buschstab (1) molto importanti per l'argomento in esame, e che sono, credo, le uniche. Questo autore studiò la secrezione pancreatica di un cane operato di fistola pancreatica alla Pawlow (nonchè di esofagotomia, e di gastrotomia) dopo la recisione degli splancnici e dei vaghi (praticata nel cavo addominale). Malgrado tutte queste operazioni fatte nel decorso di più mesi, ultima fra le quali quella interessante i vaghi, l'animale sopravvisse a quest'ultima più di un mese. Dalle osservazioni eseguite apparirebbe che ancora la secrezione del pancreas starebbe in rapporto coi varî momenti della digestione, e che il fenomeno dell'adattamento anche in simili condizioni si mantenesse. Come spiegare allora con l'intervento nervoso (in qualsiasi modo si voglia interpretare) sia il processo della secrezione sia quello dell'adattamento? Torna qui a proposito ricordare una nuova dottrina che riguarda non solo il meccanismo della secrezione pancreatica, ma in tesi generale anche le secrezioni delle altre glandule, colla quale si cerca pure di spiegare il fenomeno dello adattamento secretorio. Alludo cioè alla dottrina che dal 1902 viene sostenuta da Bayliis e Starling (2) e dai numerosissimi loro seguaci. Secondo questi autori le secrezioni delle glandule dipendono da stimoli *ormonici* e cioè da sostanze chimicamente definite elaborate da altre glandule, le quali giungerebbero per via sanguinea agli epiteli degli organi, sui quali agirebbero specificamente e direttamente, indipendentemente da

(1) Buschstab, *Maly's Jahresb.*, Bd. XXXV, p. 491.
(2) Bayliis e Starling, *Ergebnisse der Physiologie*, Bd. V, 1906, p. 665.

ogni intervento nervoso. A proposito poi della secrezione pancreatica gli autori inglesi hanno creduto di poter precisare meglio l'intimo suo meccanismo ed il luogo d'origine dei suoi *ormoni*. Durante il passaggio del contenuto gastrico acido nel duodeno, questa mucosa elaborerebbe una sostanza *la secretina*, la quale entrando in circolo sarebbe capace di eccitare direttamente le cellule pancreatiche. A sostegno di questa dottrina si adducono i risultati di alcune esperienze che non sono a mio parere molto dimostrative. Così ad esempio l'aver dimostrato (e ciò è stato unanimemente confermato) che l'introduzione nel circolo sanguineo di sostanze estratte dalla macerazione in acido cloridrico di mucosa duodenale, è capace di provocare la secrezione enterica, non mi pare sia sufficiente a giustificare la dottrina di Bayliis e Starling. Nulla prova che durante la digestione fisiologica siano effettivamente elaborate e messe in circolo sostanze simili a quelle che con così complesso artificio si preparano *in vitro*. Ma non mi trattengo per ora ad esporre più particolareggiatamente tutti gli argomenti che in favore a questa dottrina si sono successivamente escogitati, e tutte le obbiezioni che vennero loro opposte, per opera specialmente di Popielski [1] e dei suoi allievi. Su questo argomento già ho trattato in alcuni miei lavori precedenti [2]; e mi riservo di ritornare ampiamente nell'esposizione *in extenso* delle presenti ricerche; per ora mi basta l'aver ricordato questa dottrina, soltanto perchè si vuole estendere anche al fenomeno dell'adattamento, nel senso che ogni sostanza produrrebbe nel suo passaggio pel duodeno *ormoni specifici*, non solo per determinare la secrezione pancreatica, ma anche le varie qualità di detta secrezione.

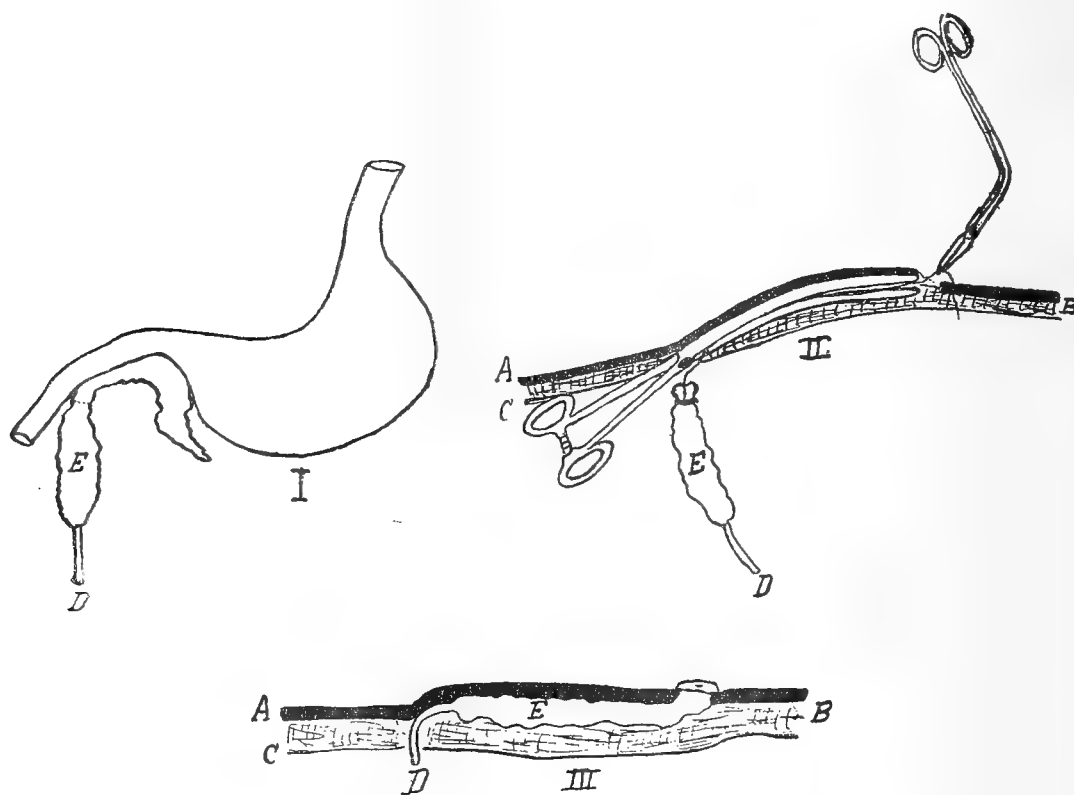
Il risultato di alcune ricerche che qui brevemente esporrò mi permette di contribuire a questi due interessanti problemi; quali sono cioè i fattori che entrano in gioco per determinare la secrezione pancreatica e quali quelli pel suo adattamento. Queste ricerche furono eseguite adoperando segmenti di pancreas e più precisamente il *processus uncinatus* trapiantato sotto cute col metodo di Minkowski.

Aperto l'addome e tratto fuori il duodeno col pancreas, si recide fra due robuste allacciature il pancreas prima della sua adesione col duodeno. Si delimita così un cospicuo segmento costituito dal *processus uncinatus*, che supera generalmente il terzo del complesso della glandula, e che per lo più è irrorato da una grossa arteria, la quale penetra al suo estremo, accompagnata dalle relative vene. Si isola il segmento di pancreas dai foglietti peritoneali, lasciandolo unito soltanto al peduncolo nerveo vascolare. Quindi con una pinza da intestino introdotta da un piccolo occhiello del pe-

[1] Popielski, Per i numerosi lavori di questi autori confrontisi i Pflüger's, *Archiv*, 1905-6-7-8, e i *Centrablat. f. Physiologie.* degli stessi autori.

[2] Lombroso, *Sulla teoria umoreale o degli ormoni. Lo Sperimentale*, 1908 p. 439.

ritoneo parietale, aprivo una specie di canale che comunicava da una parte col cavo addominale e dall'altra colla parete esterna dell'addome, dalla quale fuoriusciva per una apertura opportunamente preparata. Aprendo quindi la pinza allargavo in modo sufficiente questo canale, e con un'altra pinza comune introdotta in esso in senso inverso alla prima afferravo un laccio unito all'estremità del *processus uncinatus* che con una lenta trazione facevo fuoriuscire per qualche millimetro all'esterno.

Le seguenti figure schematiche illustrano sufficientemente l'atto operativo eseguito.

A) Cute, B) Strato muscolare, C) Peritoneo, D) Peduncolo nerveo vascolare, E) Processus uncinatus.

Il segmento di pancreas così trapiantato era perfettamente nutrito ed infatti ho potuto constatare la integrità dei suoi elementi, *isole di Langerhans ed acini*, anche dopo molto tempo. Inoltre esso era completamente separato dai suoi normali rapporti nervosi di qualunque origine, salvo che per quelle fibre nervose che si accompagnano al peduncolo nutritizio; epperò trascorso un tempo sufficiente per la formazione di nuovi vasi escludevo pure questi allacciando e recidendo il peduncolo nerveo vascolare, cosicchè la separazione riusciva completa.

Con ciò avverto subito, io non intendo affermare che la funzione di questo segmento di pancreas sia affatto indipendente da ogni influenza ner-

vosa. Nello spessore del pancreas stesso, come è noto, si trovano sparsi numerosi gangli nervosi simpatici sulla cui azione poco si sa, ma ai quali non si può certo negare qualsiasi influenza sulla funzione del pancreas, quando è stato dimostrato per analoghe formazioni che in altri organi si trovano, che possono esplicare una importantissima azione, capace di sostituirsi successivamente alle influenze esercitate dall'asse cerebrospinale o dal simpatico addominale. Oltre alle azioni nervose esercitate dal sistema intrinseco al pancreas, è possibile che anche dall'esterno si possa influire per vie nervose sulla funzione di tale segmento, in quanto colla formazione di nuovi vasi (ed io ho verificato la formazione di vasi di diametro assai cospicuo) si possano forse stabilire nuovi rapporti nervosi. Questo pertanto è certo, che col vago, cogli splancnici, col simpatico addominale più nessun rapporto sussiste col metodo da me adottato.

Riusciva pertanto interessante l'accertare se da un segmento di pancreas messo in simili condizioni si otteneva una secrezione, ed in tal caso in quale rapporto essa stesse colla secrezione fisiologica per modalità di decorso e quantità, e se finalmente osservavasi in essa il fenomeno dell'adattamento.

Per ciò che riguarda la secrezione pancreatica risulta dalle ricerche fatte:

Che a digiuno essa corrisponde pressochè perfettamente per quantità e per decorso a quella secrezione che, pure a digiuno, è stata osservata da Boldireff [1], nei cani operati di fistola pancreatica alla Pawlow, per quanto è possibile fare un paragone riferendoci a dati di fatto raccolti da un altro autore. Presenta cioè delle ritmiche oscillazioni, che compaiono fra loro più ravvicinate di quelle osservate da Boldireff; la quantità di secreto oscilla $^1/_4$ ed 1 $^1/_2$ cc. all'ora; rappresenta cioè appunto $^1/_3$ circa del secreto che fuoriesce durante il digiuno dall'intera glandola.

Sotto l'influenza della digestione si avverte un aumento della secrezione sia quando il peduncolo nerveo vascolare è ancora intatto sia quando è reciso. Questo aumento invero è molto lieve poichè quando anche l'alimentazione è abbondantissima, e tale che determinerebbe in un cane con fistola semplice la secrezione di parecchie diecine di cc. all'ora, dal segmento di pancreas isolato si raggiungono appena 1-3 cc. all'ora. Soltanto colla somministrazione per bocca in forte quantità (da 200 a 500 cc. di HCl al 5 per mille) ho potuto raccogliere nella sola prima ora da 3 a 4 cc. nella seconda ora la secrezione era già più piccola e subito dopo riassumeva il grado di secrezione che si ha nel digiuno.

Per ciò che riguarda il fenomeno *dell'adattamento immediato*, pel quale cioè ogni secrezione pancreatica è dotata di proprietà enzimatiche varie a

(1) Boldireff, *Archiv. de sciences biologiques*, Saint Petersbourg, 1905, pag. 1.

seconda dell'alimentazione e presenta pure profonde variazioni nel contenuto secco, nei sali ecc., dalle mie osservazioni emerge questo fatto di speciale importanza:

Il secreto del segmento di pancreas trasportato sotto cute, sia o no rimasto intatto il peduncolo nutritizio addominale, ottenuto dopo le più opposte alimentazioni e dopo l'introduzione di acido cloridrico, presenta sempre, e nello stesso grado, le stesse proprietà enzimatiche (amidolitica e lipolitica); queste corrispondono a quelle osservate nel secreto che defluisce a digiuno. Non ho fatto ricerche sulla proprietà proteolitica, perchè avrebbe necessitato l'intervento di un fattore nuovo, la chinasi, e ciò ho voluto evitare.

Le numerose osservazioni praticate sopra 5 cani operati nel modo descritto hanno dato tutte risultati molto concordanti. In un altro cane nel quale avevo però praticato anche l'estirpazione del pancreas addominale contemporaneamente al trapianto ebbi risultati alquanto varî ma non contraddittorî a quelli sopra riferiti. Scarseggiava nel secreto di questo cane l'attività amidolitica e l'attività lipolitica presentava in qualche caso variazioni saltuarie, le quali non erano però in rapporto coll'alimentazione nel modo avvertito dagli allievi di Pawlow, in quanto in alcune esperienze il secreto raccolto dopo somministrazioni di pane o di acido cloridrico appariva più lipolitico che dopo la somministrazione di latte o di carne e grasso. In questo animale, nei primi giorni che seguirono la operazione, si era formata una cospicua raccolta di *pus* nella sacca contenente il segmento di pancreas trapiantato, che dovetti spaccare e medicare per qualche tempo (lenta la guarigione forse per lo stato glicosurico nel quale l'animale si trovò in questi giorni). All'autopsia però il pancreas non presentava profonde alterazioni, salvo un certo grado di ipertrofia del connettivo, e la presenza di qualche focolaio di infiltrazione parvicellulare disseminato per tutto il parenchima glandulare.

Limitando per ora le mie conclusioni ai casi nei quali ho praticato soltanto il trapianto del segmento pancreatico, emerge dalle esperienze fatte che la secrezione di tale segmento non presenta più alcuna modificazione dei suoi poteri enzimatici anche variando il regime alimentare. Non pare quindi attendibile la dottrina che spiega l'adattamento come dovuto a stimoli *ormonici*, capaci volta a volta di produrre un secreto dotato di specifiche attività. Siccome poi dall'esperienza ricordata sopra del Buschstab, risulterebbe che sino ad un certo punto anche dopo la recisione dei vaghi e degli splancnici, si mantiene l'adattamento, così, volendo ammettere in questo fenomeno la necessità di un intervento nervoso, intervento al quale però non bastano, come abbiamo dimostrato ora, da soli i gangli simpatici sparsi nel parenchima grandulare o i filuzzi nervosi del peduncolo nutritizio, dobbiamo ricercare altre vie per le quali queste influenze si possano esercitare.

Per ciò che riguarda la teoria *ormonica* invocata per spiegare il meccanismo della secrezione pancreatica dagli autori inglesi, io non credo che il risultato delle mie ricerche si presti ad una conferma di essa, intesa nel senso nel quale venne formulata.

E' vero che abbiamo dimostrato una certa secrezione durante la digestione alimentare o dopo l'ingestione di acido cloridrico ma questa è senza confronto, pur fatte le debite proporzioni trattandosi di una parte sola del pancreas e non dell'intero organo, inferiore a quella che si ottiene dalla fistola pancreatica, mentre invece tale proporzione si mantiene nel periodo del digiuno.

Se, come *a priori* (per ragioni di corrispondenza con quanto in altri campi della fisiologia è stato dimostrato) si deve ritenere, che la secrezione del segmento trapiantato sia dovuta a quei plessi nervosi che si trovano nel parenchima glandulare, si dovrà tener conto delle condizioni nelle quali si trovano tali plessi. Perchè si potrebbe supporre che la somministrazione di acido cloridrico o il processo digestivo apportino nella crasi sanguigna modificazioni capaci di esercitare una certa influenza sulla soglia di eccitabilità dei gangli nervosi simpatici, e che da ciò conseguano quelle lievissime differenze osservate nella secrezione pancreatica. Che lo stato di eccitabilità dei centri nervosi abbia la massima importanza sull'effetto della loro reazione agli stimoli è un fatto di comune osservazione. Perciò mi pare strano che alcuni autori non tenendo conto di tale eventualità, abbiano creduto d'aver dimostrata l'esistenza di *ormoni* quando i fenomeni da loro osservati potevano forse rappresentare soltanto l'effetto d'una modificata soglia d'eccitabilità nervosa, dipendente dallo stato della crasi sanguigna. Un argomento poi, che si può già addurre in appoggio alla mia tesi, si trova nel fatto che questa secrezione è sempre di uguale natura. Se essa fosse l'esponente d'una secrezione che, sia pure in minor copia, corrispondesse alla secrezione normale, essa dovrebbe risentire gli effetti dei diversi stimoli che la provocano, come avviene per la normale secrezione.

Fisiologia. — *Contributo alla biologia degli enzimi. L'azione del calore sulla lipasi ed amilasi del succo pancreatico* [1]. Nota di Sabato Visco, presentata dal Socio L. Luciani.

Da qualche tempo, per consiglio del prof. Ugo Lombroso, ho intrapreso una serie di ricerche riguardanti il comportamento degli enzimi del tubo digerente, per determinare in vitro l'azione che esercitano su di essi i varî fattori che intervengono nelle condizioni fisiologiche. Nella presente Nota riferisco i risultati che ho ottenuto sottoponendo gli enzimi all'azione del calore.

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della R. Università di Roma, diretto dal prof. Luigi Luciani.

Tale questione non è nuova; altri autori prima di me se ne sono occupati ma, poichè i dati di fatto ch'essi hanno raccolti, o non sono concordanti, o sono stati ottenuti in condizioni di temperatura differenti, di molto, da quelle che normalmente si verificano nel tubo enterico, ho creduto opportuno riprenderne lo studio.

Dalle indicazioni bibliografiche che mi è stato possibile di raccogliere, rilevo, come fatto indiscusso, che un riscaldamento prolungato superiore ai 60 gradi, distrugge le attività enzimatiche dei succhi digerenti. Per temperature inferiori però gli autori non sono d'accordo; e, mentre alcuni credono che il tenere per un certo tempo i secreti in un ambiente caldo, ne esalti le attività enzimatiche, altri invece affermano recisamente il contrario.

Henri e Pozerski avrebbero osservato che un riscaldamento a 40 gradi aumenta il potere digerente degli enzimi, Beebe (¹) però che nel 1902 riprese lo studio dell'argomento sull'invertina, la saliva e la diastasi, non solo non confermò questo fatto, ma anzi qualche volta osservò una vera diminuzione d'attività delle sostanze prese in esame; cosa che avvenne pure ad Hanriot e Camus (²) che fecero oggetto dei loro studî la lipasi del siero di animali a sangue freddo.

Dastre e Stassano (³) in due lavori pubblicati nel 1903 riferiscono che la chinasi si altera alla temperatura ambiente e a quella della stufa, come pure il succo pancreatico, sia che questi due secreti siano separati, sia che siano mischiati, e che soltanto la presenza di albumina nel loro miscuglio riesce a difenderli dall'azione del calore.

Terroin (⁴) infine in una recentissima Nota, pubblicata quando già il mio lavoro era quasi compiuto, afferma che il potere lipolitico del succo pancreatico tenuto per alcune ore nella stufa a 40 gradi, non diminuisce visibilmente.

Ora io ho voluto studiare quale sia il comportamento degli enzimi del succo pancreatico sottoposto ad un riscaldamento prolungato di 39°-41°, — riscaldamento che rappresenta l'*optimum* di temperatura in cui s'esplicano le attività enzimatiche — tenendo, in modo particolare, nota del loro reciproco comportamento, come quello che più interessa per la conoscenza delle individuali proprietà degli stessi.

(¹) Beebe, *On the influence of heat on Enzynus.* American Journal of Physiology, 1902.

(²) Hanriot et Camus, *Action de la température sur la lipase du sérum d'animaux à sang froid.* Comptes rendus de la Société de Biologie, 1901.

(³) Dastre et Stassano, *Sur les facteurs de la digestion tripsique.* Comptes rendus de la Société de Biologie, 1903.

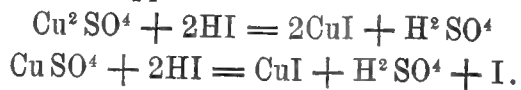
(⁴) Emile F. Terroin, *Zur kenntnis der Fettspaltung durch Pankreassaft.* Biochemische Zeitschrift, 1910.

METODI.

Lipolisi. — Nella determinazione del potere lipolitico mi son servito del seguente metodo: Mettevo in una provetta 4 cm.c. di olio di mandorle dolci e 1 cm.c. di succo pancreatico; poi agitavo fortemente per emulsionare, e lasciavo le sostanze in esame in termostato per il tempo voluto. Dopo con una soluzione $\frac{n}{10}$ (alcoolica) di NaOH in presenza di fenoftaleina, calcolavo l'acido oleico liberatosi, così che il potere lipolitico del succo pancreatico mi veniva espresso dalla quantità in cm.c. di NaOH $\frac{n}{10}$ occorrente per neutralizzare l'acido oleico libero.

Amilolisi. — Per determinare il potere amilolitico mescolavo una certa quantità di succo pancreatico (1 cm.c.) con un grammo di amido sciolto in 30 gr. di acqua e cotto mediante ebollizione. Dopo che il miscuglio era stato per il tempo voluto in termostato, aggiungevo l'acqua necessaria per portare il liquido alla quantità di 50 cm.c. ciò che mi serviva per facilitare i calcoli e per pulire bene la capsula nella quale erano state le sostanze di prova. Per dosare la quantità di zucchero sviluppatasi ho usato il seguente metodo ch'è una modificazione portata dall'Embeden a quello del Lhemann. Si mettono in un Erlenmeyr 40 o 50 cm.c. di acqua più 10 cm.c. di Fehling *A* più 10 cm.c. di Fehling B, e si pone il tutto a bollire. Appena iniziata l'ebollizione si aggiunge il liquido del quale si vuol cercare il contenuto in zucchero (5 cm.c. nel nostro caso perchè il liquido contiene meno dell' 1 % di zucchero, altrimenti 1 cm.c.) e si lascia bollire per 2 minuti. Si raffredda quindi rapidamente sotto il rubinetto; poi vi si versano dentro 20 cm.c. di soluzione al 20 % di KI e 20 cm.c. di H^2SO^4 al 25 %, più una piccola quantità di colla d'amido come indicatore. Si titola quindi con tiosolfato sodico fino a colorazione bianco-rosa (titolazione reversiva). La quantità di tiosolfato adoperata per ottenere la scolorazione, tolta al titolo del Fehling (27,7 cm. c.) ci fornisce una cifra che riportata ad apposite tavole ci dà in mmgr. il quantitativo dello zucchero contenuto nei 5 cm.c. di liquido, e questa cifra moltiplicata per 10 indica il potere di riduzione calcolato quale glicosio dell' intero miscuglio.

Il principio del metodo consiste nel fare agire lo zucchero con un eccesso di liquido di Fehling. Una parte vien ridotta ad ossido ramoso (Cu^2O); aggiungendo H^2SO^4 si ripristina il $CuSO^4$ del Fehling *A* (trasformato dal tartrato sodico in Na^2SO^4) mentre da Cu^2O si forma solfato ramoso. In presenza di HI (che si svolge da KI per reazione di H^2SO^4) si forma dai sali ramico e ramoso ($CuSO^4$ — Cu^2SO^4) esclusivamente ioduro ramoso (CuI), ma soltanto dal primo con sviluppo di I.

$$Cu^2SO^4 + 2HI = 2CuI + H^2SO^4$$
$$CuSO^4 + 2HI = CuI + H^2SO^4 + I.$$

È questo iodo sviluppantesi dal solfato non ridotto dallo zucchero che vien dosato col tiosolfato di sodio in presenza di colla d'amido come indicatore. Ond'è che per differenza e con l'aiuto della tavola si ricava la quantità di zucchero formatasi.

RISULTATI.

I succhi che ho esaminati nelle tabelle A e B mi furono forniti da un cane operato di trapianto sotto cute del *processus uncinatus* del pancreas [1] i rimanenti da un cane del peso di circa 12 Kg. al quale era stata fatta una fistola permanente alla Paulow.

Riporto le prime due tabelle semplicemente per dare un esempio dei risultati precedentemente ottenuti (un anno prima delle presenti ricerche) quando, studiando per altri scopi le proprietà enzimatiche del succo pancreatico, osservai che avvenivano modificazioni di esse, se adoperavo succo conservato (con iodoformio) da qualche tempo in ghiacciaia ove non sempre si metteva del ghiaccio e la cui temperatura variava tra i sette e dieci i gradi. Tanto più evidente risulta la depressione della attività lipolitica in questa esperienza, se si considera che io, quando mi accorsi del fatto, tenni maggior tempo in termostrato ad agire sulle sostanze di prova, il succo in esame. Non ho bisogno di dire che queste esperienze non essendo state fatte *ad hoc*, presentano il fianco a qualche obiezione; ciò non ostante però, per quanto intendo ora di dimostrare, esse sono utilizzabili e quindi le ricordo brevemente.

TABELLA A.

Succo I (raccolto dopo un pasto di pane e trippa).

Tenuto a temperatura variante tra i 7 e i 10 gradi per giorni:	Tenuto ad agire sull'olio e sull'amido in termostato a 40° per ore:	Potere lipotitico	Potere amilolitico
1	0,45′	7,5	215
2	0,45′	9,5	220
5	2	1,5	220
7	2	1	230
8	2	0,4	230

TABELLA B.

Succo II (raccolto dopo un pasto di sola carne).

Tenuto a temperatura variante tra i 7 e i 10 gradi per giorni:	Tenuto ad agire sull'olio e sull'amido in termostato a 40° per ore:	Potere lipolitico	Potere amilolitico
1	0,45′	15	225
2	1	8,5	222,5
3	1	4,5	239
4	2	2,5	299
6	2	1	289

[1] Ugo Lombroso, *Sulla funzione del pancreas non segregante nell'intestino, nell'assorbimento alimentare.* Archivio di Fisiologia, 1910.

Tabella C.

Succo III (raccolto dopo un pasto d'idrati di carbonio).

	Potere lipolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.	Potere amilolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.
Non riscaldato	11,5	286
Dopo averlo riscaldato a temperatura oscillante fra 39°-41° per ore:		
2	1,5	270
4	1,5	212
6	1	99,5

Tabella D.

Succo IV (raccolto dopo un pasto di latte, pane e grasso).

	Potere lipolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.	Potere amilolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.
Non riscaldato	19	262
Dopo averlo riscaldato a temperatura oscillante fra 39°-41° per ore:		
2	2,2	286
4	1,2	159

Tabella E.

Succo V (raccolto dopo un pasto di sola carne).

	Potere lipotitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.	Potere amilolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.
Non riscaldato	16	212
Dopo averlo riscaldato a temperatura oscillante fra 39°-41° per ore:		
0,30′	8	262
1	13	240
1,30′	13,5	206,5
2	9	189
2,30′	6,2	189,5
3	4,5	249
3,30′	1	240
4	—	232

TABELLA F.

Succo VI (raccolto dopo un pasto di grasso e pane).

	Potere lipolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.	Potere amilolitico in un'ora a temperatura oscillante fra 39°-41°.
Non riscaldato	12,5	295
Dopo averlo riscaldato a temperatura oscillante fra 39°-41° per ore:		
1	2,4	329
2	1,8	278
3	1,2	231

Prendendo le mosse dall'osservazione di Dastre e Stassano [1] i quali avevano notato che, mentre l'attività proteolitica del succo pancreatico chinasato, rapidamente scompare se tenuto ad una certa temperatura, mentre si conserva quando si mette in presenza di albumina sulla quale può esplicare la sua azione, ho voluto vedere come si comporta la lipasi pancreatica tenuta alla temperatura capace di distruggerla, quando può esercitare la sua attività sull'olio.

Riporto qui sotto due delle esperienze da me fatte.

Succo normale. — Tenuto 2 ore a 40° ad agire sull'olio (potere lipolitico) 20,4
Succo normale. — Tenuto 16 ore a 40° ad agire sull'olio (potere lipolitico) 60.0
Succo riscaldato a 40° per 2 ore. — Tenuto 14 ore a 40° ad agire sull'olio (potere lipolitico). 2,4
Acido oleico sviluppatosi in più nelle 14 ore . . . 39,6

Succo normale. — Tenuto 2 ore a 40° ad agire sull'olio (potere lipolitico) 18.0
Succo normale. — Tenuto 16 ore a 40° ad agire sull'olio (potere lipolitico) 56.0
Succo riscaldato a 40° per 2 ½ ore. — Tenuto 14 ore ad agire sull'olio (potere lipolitico) 4.0
Acido oleico sviluppatosi in più nelle 14 ore . . . 38,0

Emerge dalle mie ricerche:

1) Che a temperatura ambiente la lipasi pancreatica lentamente si altera; mentre in poche ore perde completamente la sua attività se è tenuta in termostato a 39°-41°.

[1] Dastre et Stassano, *Sur les facteurs de la digestion tripsique.* Comptes rendus de la Société de Biologie, 1903.

2) Che l'amilasi pancreatica tenuta in termostato a 39°-41° presenta invece una maggior resistenza e talora una certa accentuazione della sua attività nel periodo di tempo coincidente con la quasi totale scomparsa del potere lipolitico.

3) Che successivamente anche l'attività amilolitica va lentamente scomparendo, in maniera però molto più lenta di quanto ho osservato per l'attività lipolitica.

4) Che la lipasi tenuta in termostato a 39°-41° non subisce l'influenza deleteria della temperatura quando ha già incominciato ad esercitare la sua azione sull'olio.

Mi è grato ora ringraziare l'illustre prof. Luigi Luciani, che gentilmente mi ha permesso di praticare queste ricerche nel suo laboratorio.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna dà il triste annuncio della morte del Corrisp. dott. Salvatore Lo Bianco, avvenuta il 10 marzo 1910; apparteneva il defunto all'Accademia per la Zoologia e Morfologia, sino dal 15 luglio 1906. Annuncia anche la morte del Socio straniero prof. Alessandro Agassiz, mancato ai vivi il 27 marzo 1910; faceva parte l'estinto dell'Accademia, per la Zoologia e Morfologia, sino dal 7 settembre 1888.

Lo stesso Presidente legge la Commemorazione seguente, del defunto Socio straniero Federico Guglielmo Kohlrausch:

Kohlrausch nacque a Rinteln il 14 ottobre 1840, figlio del distinto fisico Rodolfo Kohlrausch, allora professore nel Liceo-Ginnasio di Rinteln. Nel 1857 il padre fu chiamato all'Università di Erlangen in qualità di professore ordinario di fisica, ma vi morì dopo un anno di cattedra. Il figlio proseguì gli studî, parte a Erlangen, parte a Gottinga, dove si laureò nel 1863. Nel 1875 fu nominato ordinario a Würtzburg, nel 1878 a Strassburg, e nel 1895 ebbe l'importante successione di Helmholtz nella Presidenza della *Physikalisch-technische Reichsanstalt* a Charlottenburg, ufficio che tenne fino al 1905. Morì a Marburg il 18 gennaio 1910.

Scientificamente egli fu in contatto specialmente con suo padre e con Wilhelm Weber, il quale a Gottinga, parte nella sua collaborazione con Gauss, parte nelle sue proprie indagini, aveva arricchito quell'Istituto di una serie di congegni ed istrumenti di grande efficacia per le misure magnetiche ed elettriche, che furono la guida nelle posteriori ricerche del giovane scienziato. Le sue misure, numerose ed esatte, sulla conducibilità degli elettroliti,

sui valori assoluti di resistenza e sugli equivalenti elettrochimici ne furono la importante conseguenza. Il suo metodo di misura della resistenza degli elettroliti prima col mezzo delle correnti alternanti e col telefono, è rimasto classico ed è ormai divenuto d'impiego generale nei laboratorî. Le sue determinazioni sul valore assoluto dell'unità di resistenza devono essere anche ricordate.

Egli si è costantemente aggirato in questo campo di misure di precisione, tornandovi sopra a varie riprese. Così si dica della determinazione dell'equivalente elettrochimico dell'argento; e nell'ultimo stadio della sua attività scientifica, quando egli si trasferì a Würtzburg e a Strasburgo succedendo sempre a Kundt, si può dire senza esagerazione che le ripetute e rinnovate e perfezionate sue misure costituiscono la pagina più gloriosa delle sue indagini, le quali servirono e serviranno ancora di modello per ricerche di tal natura. In questi studî la questione della conducibilità dell'acqua pura si presentava naturalmente, ed egli la risolvette con grande abilità, calcolando il grado di dissociazione dell'acqua.

Notevoli sono pure, in quest'ultimo periodo, le sue ricerche sulla variazione, colla temperatura, della velocità di trasporto degli joni. Egli si interessò molto dell'organizzazione pratica dei laboratorii e della sistemazione degli esercizî, pubblicando un libro da servire di guida, libro che ebbe molte edizioni e gode grande riputazione nel mondo scientifico.

Kohlrausch appartenne alla nostra Accademia, in qualità di Socio straniero, dall'agosto 1899 in poi. La sua morte ha creato una lacuna notevole, che non sarà facilmente colmata. Egli è stato per lungo tempo il maestro delle misure di precisione in materia magnetica ed elettrica. Le ricerche elettriche seguono ora un indirizzo diverso: si cercano fatti nuovi con forme più qualitative che quantitative, ma i metodi di Kohlrausch resteranno sempre un prezioso modello per le determinazioni di alta precisione.

Il Socio Somigliana legge la seguente Commemorazione del Socio nazionale prof. Giacinto Morera:

Il parlare oggi di Giacinto Morera e della sua opera scientifica, mentre rinnova in me il dolore grandissimo per la perdita prematura di un collega prezioso, di un amico affezionato, è pure accompagnato da un sentimento di conforto, poichè mi porge un mezzo di mettere in luce i molti meriti di lui, forse non tanto conosciuti quanto lo dovrebbero. Poichè Giacinto Morera appartenne a quella categoria di uomini, che, anzichè mettersi in vista, cercano quasi di nascondersi, poco curando che altri sappia quanto essi valgono. Nè ciò proveniva in lui da un insufficiente apprezzamento di se stesso; che anzi del proprio valore ebbe un concetto adeguato e dignitoso, ma proveniva da una concezione seria della vita, e da una profonda antipatia per tutto ciò che sapesse di vanità o di superficialità.

Nacque il Morera in Novara il 18 luglio 1856 da Giacomo e da Vittoria Unico. Fece i primi studî in patria e percorse poi in Torino gli studî di ingegneria, laureandosi nel 1878. L'anno dopo, seguendo la sua naturale inclinazione per gli studî teorici e non premuto da necessità economiche, chè la fortuna paterna nel commercio gli permetteva di attendere liberamente agli studî, si laureò anche in matematica. La sua tesi *Sul moto di un punto attratto da due centri fissi con la legge di Newton*, mostra come egli fosse già fin d'allora in possesso delle più elevate teorie della meccanica e dell'analisi. La predilezione per la Meccanica era stata suscitata in Lui dal Siacci, che allora in Torino ed in Italia primeggiava, come cultore sia della Meccanica teoretica, che delle sue applicazioni, specialmente alla Balistica, di cui fu celebrato maestro.

Ottenuto un posto di perfezionamento all'interno, il Morera fu a Pavia nel 1881-82, ove insegnavano Eugenio Beltrami, Felice Casorati, Eugenio Berbini e passò l'anno successivo a Pisa per seguire i corsi del Betti, del Dini, del De Paolis. Eravamo allora in un periodo spendido per gli studî matematici in Italia, ed in special modo per le Facoltà di Pavia e di Pisa; ed il Morera, già forte degli studî fatti in Torino, corroborò presso quelle Università quell'amore intenso, appassionato per le scienze matematiche, che non doveva più abbandonarlo per tutta la vita.

In questi anni egli si era dedicato specialmente alle ricerche relative alle equazioni fondamentali della Meccanica, ricerche allora in massimo onore pei trovati del Mathieu, del Mayer, del Lie. Allo scopo di meglio approfondirsi in questi argomenti nel 1884 si recò a Lipsia, ove, oltre il Mayer, insegnavano il Klein e Carlo Neumann. Nel 1885 seguì alcuni corsi anche all'Università di Berlino, ove ancora risplendeva il genio di Helmholtz, di Kirchhoff, di Weierstrass.

Tornato in patria, sulla fine del 1885 la Facoltà di Pavià lo chiamò ad un ufficio, da poco allora fondato, quello di professore interno per la scuola di magistero, ma l'anno successivo apertosi il concorso per la cattedra di ordinario di Meccanica razionale nella Università di Genova, il Morera lo vinceva appena trentenne.

Qui Egli trascorse il più lungo periodo della sua carriera universitaria, qui si formò una famiglia, sposando la sig.na Cesira Faà, sua concittadina; finchè, nel 1901, la Facoltà di Scienze di Torino lo volle successore al Volterra. Fu in Genova per due trienni (dal 1891-92 al 1896-97) Preside della Facoltà e nei due anni successivi Rettore dell'Università, portando anche in queste cariche quella dirittura di giudizio, quella semplicità di maniere, quella lealtà di carattere per cui fu stimato ed amato da tutti quelli che lo conobbero.

Di forte costituzione fisica si può dire non avesse mai avuto alcun male, quando sul principio dello scorso anno un violento attacco di polmonite quasi

improvvisamente lo spense, il giorno 8 di febbraio, ancora nel pieno vigore della virilità.

Apparteneva alla nostra Accademia dal 1896 ed all'Accademia delle Scienze di Torino dal 1902.

Lavoratore indefesso fu sempre al corrente delle più interessanti quistioni dibattute nel campo scientifico e la sua produzione, cominciata giovanissimo, si susseguì senza interruzione fino agli ultimi tempi, nessuna cosa avendo mai potuto distrarlo dagli studî prediletti.

Sarebbe assai lungo il parlare completamente di tutte le sue ricerche, svoltesi su argomenti assai varî e spesso intimamente collegate con lavori di altri studiosi, dei quali converrebbe pure parlare, per porre in giusta luce i lavori del Morera. Nelle matematiche è possibile ad una fantasia fortemente creatrice fondare e svolgere teorie che abbiano una base originale e vivano quasi staccate da ricerche precedenti. Questo carattere non prevale nell'opera scientifica del nostro matematico, che sentiva anzitutto il bisogno di approfondire l'opera altrui e vi riusciva mirabilmente, in virtù di una forza di penetrazione non comune, di una mente lucidissima, nella quale non trovavano mai posto idee vaghe od incomplete. Perciò quasi ogni sua ricerca si presenta come risultato di un profondo lavoro d'analisi su teorie che già hanno subìto un grado elevato di elaborazione.

Riassumerò come meglio mi è possibile i molti e svariati materiali, onde è costituita la sua poderosa opera scientifica.

Senza dubbio il gruppo più considerevole riguarda la teoria dell'integrazione delle equazioni fondamentali della dinamica, e la lunga serie di questioni d'analisi che, imperniate sui lavori classici di Lagrange, Hamilton, Jacobi hanno dato origine a quella vasta dottrina che, sebbene ora non sia più con tanta vivacità coltivata, conserva sempre un grande interesse per la sua virtù applicativa ai problemi della meccanica, e per il contributo che porta alla teoria generale dell'integrazione delle equazioni differenziali.

Il Morera esordì in questo campo con una diretta e ingegnosa dimostrazione di una formula trovata dal Mathieu nella sua *Dynamique analytique* con un lungo e complicato procedimento di calcolo. La formola si riferisce alla trasformazione di quelle formazioni analitiche che sono conosciute sotto il nome di *parentesi* di Poisson.

Nel 1882 Siacci aveva pubblicato un *Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto*, che non differisce sostanzialmente da un classico teorema di Lie sulle trasformazioni di contatto, e che al Siacci non era ancor noto. Il Morera ne diede tosto una nuova dimostrazione, deducendolo da alcune proprietà algebriche, date da Frobenius nella sua classica Memoria *Ueber das Pfaff'sche Problem.*

Egli si trovò così portato allo studio di questo famoso problema, le cui relazioni strettissime col problema della integrazione delle equazioni cano-

niche del moto erano state poste in luce da poco. Vi si dedicò con giovanile ardore ed in breve i profondi e non facili lavori di Frobenius, di Darboux di Sophus Lie sopra questo argomento non ebbero più segreti per Lui.

Nessuno certamente in Italia conobbe allora meglio questo genere di quistioni, che nelle matematiche hanno forse i maggiori caratteri di generalità e comprensione, e richiedono, per essere trattati, i più svariati sussidi dell'analisi. Egli vi portò poi un contributo notevole, sia dal punto di vista metodologico, sia per risultati originali, come la estensione del metodo di Pfaff ad un *sistema* jacobiano di equazioni a derivate parziali.

Ma i risultati più completi e maturi sopra questi argomenti il Morera li portò assai più tardi, quasi vent'anni dopo, quando assunse a Torino l'insegnamento della Meccanica superiore. È del 1903 infatti un bel gruppo di Memorie sulle equazioni canoniche del moto, sotto la forma di Lagrange e di Hamilton, e sulle trasformazioni di queste equazioni, pubblicate nei Rendiconti della nostra Accademia e negli atti della Accademia delle Scienze di Torino e dell'Istituto Lombardo. In esse si propone di stabilire con precisione le proprietà di relazione che esistono fra il problema fondamentale del moto, il problema di Pfaff ed il problema della trasformazione di un sistema canonico in un altro della stessa forma, mettendo in evidenza come il problema della determinazione degli integrali del movimento si possa sempre ridurre all'uno od all'altro di questi. Sebbene queste proprietà fossero sostanzialmente note, la loro portata non era però con precisione stabilita. Il Morera dimostra che esistono infinite forme differenziali di cui un dato sistema canonico può essere il primo sistema delle equazionidi Pfaff e determina quali possono essere queste forme diffenziali. Ne deduce che la trasformazione di un sistema canonico in un altro equivale a trasformare una certa forma differenziale in un altra della stessa natura, ma che ne differisce per un differenziale esatto e riesce quindi a determinare la forma generale di tali trasformazioni.

Trova inoltre alcune proprietà analitiche interessanti, sebbene meno strettamente collegate col problema dinamico. Così, generalizzando alcuni risultati di Clebsch, dimostra che qualsiasi sistema di un numero pari di equazioni differenziali è sempre riducibile a forma Hamiltoniana, e che qualunque trasformazione delle variabili, che converte un sistema canonico in un altro, è necessariamente di contatto.

È da deplorarsi che al Morera sia mancato il tempo di preparare una esposizione completa ed organica di tutte queste teorie, la quale riassumesse i risultati precedenti ed i proprî, ed usufruisse di tutte le semplificazioni e di tutti i perfezionamenti da Lui trovati. Egli ne possedeva, largamente i mezzi e la sua lucidità e precisione di esposizione era sicura garanzia di successo.

Passando ora a considerare lavori che hanno carattere meno strettamente analitico e possiedono più diretta applicazione a questioni fisiche, tro-

viamo anzi tutto una bella serie di ricerche intorno al classico problema dell'attrazione degli elissoidi.

Uno dei risultati più notevoli e suggestivi a cui sia arrivata la geodesia è l'aver dimostrata la possibilità di determinare teoricamente i valori della gravità superficiale terrestre, senza bisogno di fare alcuna ipotesi intorno alla distribuzione, a noi sconosciuta, della massa nell'interno della terra. Il nostro Pizzetti nel 1894 ha dato una formola definitiva esatta che rivolve tale problema e comprende, come caso speciale, una celebre formola approssimata di Clairaut, considerando poi anche il caso in cui lo sferoide terrestre si ammette di forma elissoidica non di rotazione.

Il problema risolto analiticamente dal Pizzetti si riduce alla determinazione della funzione armonica esterna ad un elissoide quando i valori ad essa assegnati sulla superficie sono rappresentati da una certa funzione di secondo grado delle coordinate.

Il Morera trovò facilmente l'origine analitica della soluzione del Pizzetti e risolvendo in generale il problema della determinazione di una funzione armonica nello spazio esterno ad un elissoide, la quale sulla supeficie di questo si riduce ad una funzione data qualsiasi omogenea di secondo grado potè estendere il risultato del Pizzetti, rendendolo applicabile ad un elissoide ruotante intorno ad un suo diametro qualunque.

Di qui il Morera si trovò portato allo studio della quistione più generale relativa al caso in cui la funzione rappresentante i valori dell'armonica cercata sull'elissoide è una funzione omogenea di grado qualsiasi. E poichè, partendo dagli sviluppi per funzioni sferiche, si può sempre rappresentare una funzione arbitrariamente data sull'elissoide mediante una serie di tali funzioni, egli ne dedusse una soluzione del problema di Dirichlet per lo spazio esterno mediante la serie delle soluzioni precedentemente trovate.

Questa soluzione che il Morera studiò con la solita acutezza in tutti i suoi non facili particolari algebrici ed analitici, offre, rispetto a quella classica di Lamé, il vantaggio che le soluzioni elementari, di cui si compone possono essere linearmente determinate. Esse però non godono della proprietà dell'ortogonalità e però riesce meno semplice la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in serie.

Nella indagine matematica ha spesso una importanza fondamentale non solo il fatto di arrivare alla soluzione di un dato problema, ma anche il modo col quale vi si arriva. Poichè può darsi che una soluzione, logicamente esatta, offra tali difficoltà di procedimento da renderla quasi inaccessibile e tavolta anche inapplicabile ai casi concreti a cui dovrebbe servire. Negli scritti del Morera la semplicità e correttezza del procedimento è determinata dalla sicura padronanza dell'analisi e l'ingegnosità dei mezzi di ricerca si traduce quasi sempre in una grande economia di ragionamento e di calcolo, e conferisce ad essi un carattere di perfezione quale si riscontra nei

migliori autori. Si può dire, sotto questo riguardo, che non inutilmente egli era stato allievo del Beltrami.

Per un tale desiderio di perfezione, anche formale, si intende come molte questioni di metodo lo abbiano spesso interessato, portandolo ad eleganti risultati.

Tipiche fra quelle sue numerose Note, brevi e concettose, sono alcune che riguardano la definizione di variabile complessa. Egli aveva fatta l'osservazione che alla definizione classica di Cauchy-Riemann, basata sul concetto della derivata della funzione, se ne può sostituire un'altra più comprensiva basata sulla condizione che sia nullo l'integrale esteso ad un contorno chiuso qualsiasi, nel quale essa sia regolare. Questo risultato lo portò a trovare un metodo di assai semplice applicazione, per riconoscere se espressioni infinite, come le serie od i prodotti infiniti, soddisfacciano alla condizione di rappresentare funzioni analitiche, mentre i criterî di solito usati sono generalmente di assai difficile e penosa applicazione.

Il modo di comportarsi dell'integrale di Cauchy per la rappresentazione delle funzioni di variabile complessa, le discontinuità delle derivate seconde delle funzioni potenziali di spazio e delle derivate nominali per quelle di superficie, oggetto spesso nei trattati di pesanti e non sempre soddisfacenti discussioni, furono da Lui studiate con un unico e semplicissimo artificio e con un rigore perfetto.

Desideroso di mantenersi al corrente di tutte le questioni del giorno, era spesso portato a fare sopra argomenti diversi osservazioni acute ed ingegnose, che hanno dato origine ad una lunga serie di Note staccate, che ora ci rivelano l'intimo e continuo lavorìo della sua mente.

Ricordiamo quella Memoria giovanile in cui l'equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile è rappresentato come l'equilibrio di un doppio sistema di fili isolati ed intrecciantisi, come i fili di un tessuto.

Ricordiamo quell' elegante Nota pubblicata nei *Mathematische Annalen* sull'integrazione delle espressioni differenziali, ottenuta con un procedimento, che è forse il più semplice possibile.

Ricordiamo infine l'ultimo suo lavoro del 1907 sull'equilibrio dei corpi elastici in cui una speciale singolarità, quella dell'esistenza di un centro di pressione, viene genialmente interpretata, come rappresentante analiticamente le condizioni instabili d'equilibrio di masse vetrose che per piccole deformazioni possono essere completamente disgregate.

Ingegno versatile Egli conosceva profondamente tutto il campo delle teorie analitiche e delle loro applicazioni a quistioni fisiche e meccaniche; nè cessò d'interessarsi delle quistioni tecniche, oggetto primo dei suoi studî. Egli aveva così acquistato nel suo lavoro scientifico quel senso speciale di metodo e di ragionamento, che solo proviene dalla conoscenza non superficiale di tante disparate dottrine. Senso di equilibrio tra i mezzi

e lo scopo, che mantiene l'analisi lontana da speculazioni troppo astratte e mette nelle mani dello studioso dei fenomeni naturali i mezzi più potenti per arrivare a rappresentarli in modo semplice e preciso.

Ad una così vasta coltura nel campo delle scienze fisiche e matematiche, ad un così intenso desiderio di sapere, non corrispondeva nel Morera che uno scarso interesse per le scienze che non fossero la sua. E ciò per un suo modo particolare di vedere che lo portava ad escludere, e quasi a temere, tutto ciò che non fosse coltura completa e strettamente scientifica. Nel suo Discorso inaugurale del 1889 all'Università di Genova dopo aver ricordato un detto curioso del Tait « Schivate la scienza popolare, essa è tanto più per« niciosa, quanto più pretenziosi sono quelli che la diffondono » soggiunge: « Nella scienza chi ha cognizioni salde e profonde, in un campo anche ri« stretto, possiede una vera forza e all'uopo sa giovarsene; chi invece ha « solo cognizioni superficiali, anche molto estese ed appariscenti, possiede « nulla, anzi spesso ha in sè un elemento di debolezza, che lo sospinge alla « vanità ».

Giudizio magnifico; che non deve però essere spinto all'eccesso, cioè fino a portarci ad una coltura esclusivista, che faccia trascurare tutto ciò che non è prodotto dal campo che noi coltiviamo. Oggi che la scienza domina e trasforma tutta la vita intellettuale e morale, è pur d'uopo che un cultore di scienza abbia un'idea, sia pure sommaria, ma chiara del movimento d'idee che anima i campi limitrofi al suo e dei risultati che in essi si raccolgono. E del resto il Morera aveva mente agile e versatile per afferrare ed apprezzare qualsiasi manifestazione intellettuale.

La sua vita dedicata per intero ad una alta idealità disinteressata, che ne assorbì ogni energia; le eccellenti qualità del suo carattere leale, rettissimo; la sua serenità nel giudicare uomini e cose; l'arguzia incisiva del suo conversare, la estrema coscienziosità in ogni contingenza, non meno che il suo alto valore scientifico, lasciano in tutti quelli che lo conobbero, o gli furono amici, un indimenticabile ricordo. L'Accademia, l'Università, il paese nostro, possono scrivere il nome di Giacinto Morera fra quelli dei loro uomini migliori.

Elenco delle pubblicazioni di G. MORERA.

I.

Giornale di Matematiche di G. BATTAGLINI

1. « Sul moto di un punto attratto da due centri fissi con la legge di Newton » (vol. XVIII, 1880).

II.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

1. « Sopra una nuova costruzione geometrica del teorema dell'addizione degli integrali ellittici » (vol. XV, 1880).

2. « Sulla separazione delle variabili nelle equazioni del moto di un punto materiale su di una superficie » (vol. XVI, 1881).
3. « Sulle proprietà invariantive del sistema di una forma lineare e di una forma bilineare alternata » (vol. XVIII, 1883).
4. « Sul problema di Pfaff » (vol. XVIII, 1883).
5. « Sulle equazioni generali per l'equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni » (vol. XX, 1884).
6. « Sulla rappresentazione delle funzioni di una variabile complessa per mezzo di espressioni analitiche infinite » (vol. XXI, 1886).
7. « Sul problema della corda vibrante » (vol. XXIII, 1888).
8. « Sulla definizione di funzione di variabile complessa » (vol. XXXVII, 1901).
9. « Sulle equazioni dinamiche di Lagrange » (vol. XXVIII, 1901).
10. « I sistemi canonici di equazioni ai differenziali totali nella teoria dei gruppi di trasformazioni » (vol. XXXVIII, 1903).
11. « Sull'attrazione di un ellissoide eterogeneo » (vol. XXXIX, 1904).
12. Complemento alla Nota precedente (id. id.).
13. « Sulle equazioni dinamiche di Hamilton » (vol. XXXIX, 1904).
14. « Sull'attrazione degli strati ellissoidali e sulle funzioni armoniche ellissoidali » (vol. XLI, 1906).
15. « Intorno all'equilibrio dei corpi elastici isotropi » (vol. XLII, 1907).
16. « Francesco Siacci » Commemorazione (vol. XLIII, 1908).

III.

Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino.

1. « Sulla integrazione delle equazioni ai differenziali totali del secondo ordine (s. II, t. XLII, 1902).
2. « Sulla attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali » (id., t. LV, 1905).

IV.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienza e Lettere.

1. « Sopra una formola fondamentale di Meccanica analitica » (s. II, vol. XV, 1882).
2. Il « Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni armoniche del moto » del prof. Siacci (id. id.).
3. « Il metodo di Pfaff per l'integrazion delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine » (id., vol. XVI, 1883).
4. « Intorno alla risoluzione di certe equazioni modulari » (id., vol. XVIII, 1885).
5. « Sui sistemi di superficie e le loro traiettorie ortogonali » (id., vol. XIX, 1886).
6. « Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa » (id., vol. XIX, 1886).
7. « Un piccolo contributo alla teoria delle forme quadratiche » (id., vol. XIX, 1886).
8. « Sulle derivate seconde della funzione potenziale di spazio » (id., vol. XX, 1887).
9. « Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie (id., id.).
10. « Intorno all'integrale di Cauchy » (id., vol. XXII, 1889).
11. « Intorno ai sistemi di equazioni a derivate parziali del 1° ordine in involuzione (id., vol. XXXVI, 1903).

V.

Atti della R. Accademia dei Lincei.

1. « Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili » (s. III, vol. VII, 1883).
2. « Sui moti elicoidali dei fluidi » (s. IV, vol. V, 1889).
3. « Sulle equazioni fondamentali della termodinamica » (id., vol. III, 1891).

4. « Sulla capacità termica dei vapori » (id., id.).
5. « Soluzione generale delle equazioni dell'equilibrio di un corpo continuo » (s. V, vol. V, 1892).
6. Appendice alla Nota precedente (id., id.).
7. « Un teorema fondamentale di meccanica » (id., vol. II, 1893).
8. Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti: « Sull'espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico » (id., vol. III, 1894).
9. « Stabilità delle configurazioni di equilibrio di un liquido in un tubo capillare di rotazione attorno ad un asse verticale » (id., vol. XI, 1902).
10. « Sulla trasformazione delle equazioni differenziali di Hamilton » (id., vol. XII, 1903).
11. « Alcune considerazioni sulle funzioni armoniche ellissoidali » (id., vol. XV, 1906).
12. « Sulla funzione potenziale di un doppio strato elissoidico » (id., vol. XVII, 1908).

VI.

Mathematische Annalen.

1. « Ueber einige Bildungsgesetze in der Theorie der Theilung und der Transformation der elliptischen Functionen » (Bd. XXV, 1885).
2. « Ueber die Integration der vollständige Differentiale » (Bd. XXVII, 1886).

VII.

Berichte über die Verhandlungen der K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

1. Zur Transformation und Theilung der elliptischen Functionen (Bd. XXXVII, 1885).

VIII.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

1. « Sui sistemi di forze che ammettono la funzione potenziale » (t. V, 1891).
2. « Alcune considerazioni relative all'equazione differenziale $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ » (t. VII, 1893).
3. « Sopra una formola di calcolo integrale » (t. X, 1896).
4. « Sui polinomi di Legendre » (t. XI, 1897).

IX.

Rivista di Matematica di G. Peano.

1. « Osservazione relativa al resto nello sviluppo di Taylor » (vol. II, 1892).
2. « Dimostrazione di una formola di calcolo integrale ».

X.

Il Nuovo Cimento.

1. « Sulla espressione analitica del principio di Huygens » (s. IV, vol. II, 1895).
2. « Intorno alle oscillazioni elettriche » (s. V, vol. III, 1902).
3. « Sulla teoria dell'ellissoide fluido in equilibrio di Jacobi » lettera al prof. Volterra (id., vol. XVI, 1908).

XI.

Giornale della Società di Letture e Conversazioni scientifiche di Genova.

1. « Sulla integrazione delle equazioni a derivate parziali del 1° ordine » (anno X, 1887).

XII.

1. « L'insegnamento delle Scienze matematiche nelle Università italiane ». Discorso inaugurale per l'anno accademico 1888-89 nella R. Università di Genova ».
2. « Lezioni di Meccanica razionale ». Litografia Paris, Torino, 1902.

La mente e l'opera di E. F. W. Pflüger.

Il Corrisp. Filippo Bottazzi legge la seguente Commemorazione del Socio straniero E. F. W. Pflüger.

Edoardo Federico Guglielmo Plueger nacque a dì 7 di giugno del 1829 in Hanau, presso Francoforte. Attese da prima allo studio del diritto, poi in Marburg e a Berlino si volse a quello della Medicina e della Fisiologia. Fu abilitato all'insegnamento di questa scienza nel 1858, e l'anno seguente, appena trentenne, coprì la cattedra di Fisiologia nell'Università di Bonn [1], succedendo a Helmholtz, già celebre per le due Memorie *Ueber die Erhaltung der Kraft* (1847) e *Ueber die Wechselwirkungen der Naturkräfte* (1854), cattedra che aveva già occupata il grande Giovanni Müller (dal 1826 al 1832), e che egli tenne, per oltre mezzo secolo, fino alla sua morte, avvenuta a dì 16 marzo di quest'anno.

Personalmente sconosciuto ai più fra i giovani fisiologi stranieri, perchè egli non usava recarsi a congressi o altre feste della scienza, nè il suo istituto era mèta di giovani perfezionandi; chiuso nella ridente città renana degli studii e sdegnoso di farsi conoscere altrimenti che per il tramite della stampa scientifica, e però non amante di popolarità ma di solitudine pensosa e operosa; spirito forte in corpo sanissimo, portante cospicuamente impressi i tratti caratteristici della stirpe germanica [2], e infaticabilmente rivolto alla ricerca del vero: tale fu l'uomo, più stimato che amato, che riempì del suo nome e dell'opera sua e di vivaci polemiche scientifiche la seconda metà del secolo passato e il primo decennio del presente, e che a me questa R. Accademia, di cui egli era Socio dal 1899, commise l'incarico di commemorare: uno dei più grandi fisiologi moderni, tempra adamantina di lavoratore e di lottatore, e insieme ingegno elettissimo fornito di naturale acume filosofico.

Arduo è il còmpito di dire degnamente di lui, a sì breve distanza dalla sua morte, tanto riempiono di sgomento il numero e la mole dei suoi scritti, e quando ancora non risoluti ci stanno innanzi i gravi problemi biologici che formarono oggetto delle sue ricerche e delle sue polemiche. Ma io tenterò di estrarre dalla abbondante produzione scientifica l'essenza del pensier

(1) Queste notizie biografiche ho trovato in Mayer's Grosses Konversations-Lexikon, VIe Aufl., Bd. XV, S. 748, 1906.

(2) Mi riferisco all'incisione che vedesi nell'opuscolo di M. Nussbaum, *E. F. W. Pflüger als Naturforscher*, Bonn, 1909, che è un arido elenco delle pubblicazioni di Pflüger fino a quell'anno, aggiuntavi una brevissima incompleta e ineguale esposizione del loro contenuto.

suo, indugiandomi più sugli scritti giovanili e su quelli d'indole generale, che sugli altri in gran parte polemici e tecnici, che non accade di ricordare particolarmente.

Chi meravigliasse che in un paese ferace d'uomini di scienza un giovane trentenne abbia potuto ascendere una cattedra per tradizioni gloriosa in uno dei più celebrati Atenei, consideri i tempi, e legga i lavori da lui pubblicati nel precedente quinquennio. Quella produzione giovanile che va dal 1853 al 1859, cioè dal 24mo al 30mo anno d'età, porta con sè infatti una cospicua impronta di originalità. Dopo, egli farà opera più critica e tecnicamente più perfetta, ma non, salvo un caso che dirò, più originale [1].

[1] In Fisiologia, come in Geografia, l'epoca delle grandi scoperte ha avuto una durata relativamente breve. Inauguratasi quando il libero spirito dell'uomo si piegò all'esperimento dei fenomeni biologici, non può dirsi nemmeno oggi del tutto chiusa; ma le grandi scoperte si sono fatte sempre più rare. Per « scoperta » s'intende ordinariamente l'osservazione e la descrizione di un fatto fisiologico prima ignorato, esempii: l'azione inibitrice dei vaghi sul cuore e degli splancnici sull'intestino, il glicogeno nel fegato, le localizzazioni cerebrali ecc. La grandezza della scoperta, però, non è una misura del merito dello scopritore, che generalmente vi è stato condotto per intuizione o per caso, e l'ha menata a termine con poco lavoro, ma è in ragione della sua portata, cioè dell'importanza obbiettiva dell'organo o della funzione cui si riferisce. All'epoca delle scoperte è seguito il periodo del lavoro di dettaglio, difficile complesso e indaginoso, che tende a chiarire il meccanismo intimo e profondo, il recondito determinismo dei fatti, la cui osservazione bruta e descrizione costituiscono la « scoperta ». Questo lavoro è eseguito da diecine e centinaia di assidui e talora poco apprezzati operai della scienza; la scoperta ha carattere essenzialmente personale. Quel lavoro ha per oggetto il centro dei fenomeni vitali, la cellula o il protoplasma, e per strumenti i metodi precisi che forniscono le scienze sorelle: la fisica, la chimica, la microscopia, la matematica ecc.; la scoperta, invece, generalmente riguarda l'organo o l'apparecchio, o il succo o l'umore, e le basta spesso una tecnica sperimentale magari complicata, ma non fine nè scrupolosa nè basata su metodi e strumenti di precisione. Il « fatto nuovo » si scopre con lo sguardo acuto e l'attenta osservazione, e l'ossessione dell'esattezza, piuttosto che agevolare, intralcia o fa mancare una scoperta.

La scoperta si annunzia con poche parole; il lavoro di dettaglio ha bisogno di abbondante e minuta documentazione; per ciò e per essere questo molteplice e copioso, la produzione e la stampa scientifica sono aumentate di molto ai nostri tempi, in confronto col passato. Erra chi crede che la piena della produzione fisiologica odierna sia superflua anzi dannosa. La ragione della abbondanza della produzione di questo genere di lavori scientifici sta nella natura di essi. Si confronti la scoperta dell'azione inibitrice del vago, coll'infinito numero di lavori cui essa die' origine; la scoperta del glicogeno di Cl. Bernard, coll'enorme massa di lavoro sperimentale sul glicogeno fatto da Pflüger e da tanti altri. Chi considera lo sviluppo storico della scienza non può maravigliare di fronte al moltiplicarsi delle riviste scientifiche e delle monografie, e dei trattati che tentano di ordinare e classificare i resultati dell'immane lavoro.

Non è tanto la natura dell'uomo, quanto l'epoca in cui egli svolge la sua attività, che dà l'impronta alla sua produzione scientifica. Vi sono fisiologi che contano nel loro attivo principalmente « grandi scoperte », altri solamente « lavori di dettaglio », altri, in fine, che ne hanno dell'una e dell'altra specie. Tale fu Pflüger, principalmente perchè

I lavori: *Sulle funzioni sensorie della midolla spinale, Sui nervi splancnici e sull'innervazione inibitoria dell'intestino, Sulle variazioni dell'eccitabilità dei nervi prodotte dalla corrente elettrica ossia sulla fisiologia dell'elettrotono* appariscono come freschi fiori sbocciati al primo bacio del sole primaverile, come felici opere d'arte create al tocco dell'ala del genio.

Il primo lavoro (¹) del 1853, dedicato ad E. Dubois-Reymond, contiene niente meno che le regole, in grande parte riconosciute di poi esatte, che governano la propagazione delle azioni riflesse nella midolla spinale; con esso Pflüger scoprì l'ordine e la legge (²), dove pareva che dominasse l'arbitrio e il caos; e per trovare nella letteratura fisiologica opera degna di essergli paragonata bisogna giungere prima alla memoria di Goltz (³) del 1869, e poi a quella recente e magistrale di Sherrington (⁴), che però non è opera giovanile, ma della piena maturità. Ma la nuova localizzazione dell'anima nella midolla spinale parve e fu un giovanile ardimento, sconcertò

---

egli visse su due periodi, su quello delle grandi scoperte fisiologiche e su questo presente del minuto lavoro di dettaglio.

Cosa singolare, agli occhi dei semi-profani hanno carattere di originalità soprattutto le « scoperte » o le « grandi teorie », mentre il lavoro di dettaglio è tenuto in minor conto. Le « scoperte » e le « grandi teorie » sono i veri titoli nobileschi dello scienziato; chi lavora indefessamente per tutta la sua vita intorno a particolari riguardanti quelle scoperte e teorie, ha il merito dell'operaio, del bracciante. Quanta ingiustizia sia contenuta in tale apprezzamento non è chi non veda. Si confronti la teoria di Pflüger sull' « albumina vivente » (ved. appresso) con gl'innumerevoli lavori di Fischer e della sua scuola sulla costituzione della molecola proteica, e si giudichi chi ha contribuito più ad approfondire la conoscenza del componente principale del protoplasma.

Senza dubbio le scoperte dànno la materia al lavoro di dettaglio, e le ipotesi e le teorie sono i più potenti fattori del lavoro sperimentale; ma, se vogliamo esser giusti, diciamo che al progresso della scienza e alla conquista della verità contribuisce tanto chi scopre un fatto nuovo, quanto chi lavora indefessamente per metterne in chiaro l'intimo determinismo, quanto chi, amalgamando in una sintesi geniale il prodotto spicciolo e molteplice del lavoro di dettaglio, formula une legge nuova.

Pflüger fece varie grandi scoperte, eseguì una massa enorme di lavoro sperimentale di dettaglio, e potè formulare leggi fisiologiche che ancòra oggi conservano il loro valore.

(¹) E. Pflüger, *Die sensorischen Functionen des Rückenmarks der Wirbelthiere nebst einer neuen Lehre über die Leitungsgesetze der Reflexionen*. Berlin, A. Hirschwald, 1853.

(²) A pag. 68 del cit. lav., Pflüger scrive: « Der bisher formlos erschienene Reflex, welcher sein Wesen stets hinter der willkürlichen Bewegung versteckt hatte, zeigte nunmehr seine Grenzen und Gesetze ».

(³) Fr. Goltz, *Beiträge zur Lehre von den Functionen der Nervencentren des Frosches*. Berlin, 1869.

(⁴) Ch. S. Sherrington, *The integrative action of the nervous system*. New-Jork, 1906.

molti, e fu subito finemente criticata da Lotze (1), che già nella sua *Psicologia medica*, pubblicata l'anno avanti, aveva espresso idee diverse (2), e respinta poi da tutti coloro che in seguito si occuparono della questione, da Auerbach, Schiff, Sanders-Ezn e finalmente da Goltz stesso (3), il quale conchiude il suo scritto affermando che la « rana scerebrata altro non è che un complesso di semplici meccanismi riflessi » (4).

Il merito principale di Pflüger non sta però in questa parte speculativa del suo lavoro, ma, oltre che, come ho detto, nell'aver formulato le leggi dei riflessi, anche nell'aver messo per il primo in rilievo la relativa indipendenza funzionale della midolla (5) e le sue proprietà integrative e coordinative. Singolare è il fatto che codeste « leggi dei riflessi » furono da Pflüger prima formulate in base allo studio e al diligente confronto di numerosi casi clinici pazientemente cercati nella letteratura medica, e poi verificate, in parte, sulle rane, le anguille e alcuni mammiferi; e ciò fece, perchè persuaso che solo nell'uomo fosse possibile sceverare l'atto riflesso dal volontario e cosciente, e che i movimenti degli animali scerebrati, ordinariamente tenuti in conto di reazioni meccaniche, tali in realtà non sono, ma sono, secondo lui, moti volontarii (6).

Il lavoro riguardante l'azione dei nervi splancnici sui movimenti dell'intestino è del 1856 (7) e fu inspirato da un esperimento, fatto in iscuola dal Du Bois-Reymond, sull'azione inibitrice del vago.

(1) Göttingische gelehrte Anzeigen, 1853. Stück 174-177, S. 1748 e 1759. (Cit. da Goltz).

(2) R. H. Lotze, *Medicinische Psychologie oder Physiologie der Seele*. Leipzig, 1852. Ved. particolarmente pag. 115: *Von dem Sitze der Seele*; e anche l'articolo: *Instinct*, in Wagner's Handwört., II, S. 191, 1844.

(3) L. c., pag. 52: « Ueber den Sitz der Seele des Frosches » etc.

(4) L. c., pag. 130. L'idea fondamentale di Goltz è espressa in queste parole: « das was wir gewöhnlich Seele nennen, ist theilbar wie das Organ, durch dessen Thätigkeit sie sich äussert » (l. c., S. 80).

(5) Un giudice competente, L. Edinger, scrive a questo proposito: « Es ist wesentlich das Verdienst von Pflüger und Goltz, wenn wir heute erkennen, dass das Rückenmark ein selbständiges Organ ist, das für sich zu bestehen und in früher ungeahnt weitgehender Weise zu fungiren vermag ». Queste parole sono riportate dal Nussbaum (l. c., pag. 17), ma evidentemente la citazione è errata, perchè a pag. 72 della VII^a edizione dell'opera di Edinger, nè nel 1° nè nel 2° volume, nè altrove mi è stato possibile ritrovarle.

(6) A pag. 67 del suo lavoro Pflüger scrive: « Klar musste es bald sein, dass an Enthaupteten keine Reflexstudien gemacht werden können, weil die Behauptung, dass diese Bewegungen sogenannt rein mechanische seien, wie wir sahen, eine leere Theorie ist. Darum auch hat man bis jetzt Nichts erfahren können über diese Gesetze, weil man sie da suchte, wo sie nicht zu finden sind, d. h. wo willkürliche Bewegung, aber kein Reflex ist ».

(7) E. Pflüger, *Ueber das Hemmungsnervensystem für die peristaltische Bewegun-*

Con indagini accuratissime, stabilì esistere un parallelismo perfetto fra questa e l'azione inibitrice dello splancnico sull'intestino. E per avere una idea dell'indipendenza del suo spirito nella ricerca scientifica, giova ricordare che un'autorità come quella di C. Ludwig, dopo avere nel suo Trattato [1] fatto un fugace accenno a quella funzione inibitrice, in seguito ai resultati negativi del suo discepolo Haffter, aveva finito poi per negare che lo splancnico si comportasse rispetto all'intestino come il vago rispetto al cuore.

Nel 1859, vide la luce il volume sulla *Fisiologia dell'elettrotono* [2], che gli schiuse la via alla cattedra di Bonn. In questo lavoro poderoso, dopo avere citato e criticato tutti gli scritti precedenti di Ritter, Valentin, Nobili, Eckhard, Du Bois-Reymond, riferisce minutamente i moltissimi esperimenti da lui fatti con i metodi più perfetti del tempo, quelli creati da Du Bois-Reymond, stabilisce definitivamente le variazioni elettrotoniche dell'eccitabilità del nervo, e formula la « legge della contrazione » [3] e il principio generale che « un dato tratto di nervo é eccitato dall'insorgere del catelettrotono e dallo sparire dell'anelettrotono, non dallo sparire del catelettrotono e dall'insorgere dell'anelettrotono » [4].

Questi tre lavori capitali di Pflüger portano già nettamente impressi i caratteri distintivi di tutte le sue opere: vasta conoscenza, precisa citazione e sapiente utilizzazione di tutta la letteratura che si riferisce all'argomento, con scrupolosa osservanza del merito spettante a ciascuno dei predecessori; abbondante e coscienziosa documentazione sperimentale e statistica; chiara e corretta, ma non sempre sobria, anzi talora prolissa esposizione della materia; aspra e talora aggressiva critica dei lavori altrui non concordanti con le sue idee [5]. Questi lavori sono il portato della corrente scientifica, domi-

---

gen der Gedärme. Berlin, 1857. (La data della Prefazione è 1856. I resultati delle ricerche furono comunicati all'Accademia delle Scienze di Berlino nella seduta del 12 luglio 1855. Questo lavoro fu la sua dissertazione inaugurale).

[1] C. Ludwig, *Lehrbuch der Physiol. des Menschen*. Bd. I, 179, 1852 (1ª edizione); Bd. II, 398-399, 1856 (1ª edizione).

Nella 2ª edizione del suo Trattato, però, Ludwig cita la scoperta di Pflüger: Bd. II, pag. 616, 1861.

[2] E. Pflüger, *Untersuchungen über die Physiologie des Elektrotonus*. Berlin, 1859.

[3] L. c., pag. 454.

[4] L. c., pag. 456.

[5] Nel lavoro sulla midolla spinale fu Marshall Hall l'oggetto contro cui Pflüger appuntò i suoi strali (basta leggere la sola Prefazione, per vedere come lo demolisce); nel lavoro sull'Elettrotono, il bersaglio fu Eckhard ecc. In questi primi lavori già si sente, dunque, l'artiglio con cui più tardi rasperà, sì nell'opera immortale di C. von Voit, come in quella modesta di altri minori, per cercarvi un calcolo sbagliato, una citazione

nante in tutta la prima metà del secolo passato, che trascinava allo studio della fisica biologica e particolarmente alla fisica dei nervi e dei muscoli: corrente salutare, in cui annegò il vecchio vitalismo, per risorgere dopo che gli occhi si furono assuefatti alla luce abbacinante di quelle classiche scoperte dei grandi fondatori (1) della fisiologia moderna, e quando essa non potè più celare la nostra completa ignoranza dei meccanismi intimi e profondi della vita (2).

---

non precisa di qualche sua parola o frase, e simili minuzie, alle quali dedica articoli speciali, e talora lunghissimi, del suo Archivio. Egli non seppe mai mitigare questo suo spirito acre, che gli tolse (ma probabilmente egli non ci tenne) l'amore pur di qualcuno dei suoi discepoli migliori, e che fa di lui agli occhi nostri una figura tanto diversa da quelle quasi paterne di C. Ludwig, di Schmiedeberg, di M. Foster e di altri sommi.

Pflüger ha scritto (*Untersuchungen über den Pankreasdiabetes*. Pflüger's Arch., CXVIII, 267, 1907): « Die Kritik ist das wichtigste Motiv jeden Fortschrittes. Desshalb übe ich sie » (pag. 271). E l'ultimo suo lavoro (*Nachschrift*. Pflüger's Arch., CXXXI, 302, 1910) incomincia con queste parole: « Jeder gewissenhafte Forscher wird mir beipflichten, dass in verwickelten Gebieten die strengste Kritik allein den Fortschritt verbürgt. Ich habe deshalb bis jetzt diesem Gebote getreu bei Prüfung aller Thatsachen den Satz vertreten, dass ein Beweis für die Entstehung von Zucker oder Kohlehydrat aus Eiweiss nicht erbracht sei ».

Nella necrologia di Pflüger, scritta da E. von Cyon (*Eduard Pflüger. Ein Nachruf*. Pflüger's Arch., CXXXII, 1, 1910), che leggo in questo momento, dopo avere scritto queste linee, Cyon dice: « Strenge Kritik übte Pflüger in der That an den Untersuchungen anderer Forscher; die *strengste* aber richtete er gegen seine eigenen, ehe er zu deren definitiven Verwertung zu schreiten pflegte. Seine Kritik war auch ganz eigenthümlicher Art: sie war fast immer experimenteller Natur, namentlich wenn es sich darum handelte, die Beweiskraft von Versuchsergebnissen zu prüfen. Daher waren die Pflüger'schen Kritiken auch immer schöpferisch; ja man kann behaupten, dass in seinen Kritiken zum Theil das Geheimniss seines ganz ausserordentlich schöpferischen Geistes liegt ». Questo che dice Cyon è giusto: ma non è giusto nè imparziale il non rilevare l'acredine degli scritti critici e polemici di Pflüger.

(1) Nel primo trentennio del secolo XIX nacquero, a pochi anni di distanza l'uno dall'altro, i luminari della fisiologia europea: Giovanni Müller nel 1801, Cl. Bernard nel 1813, C. Ludwig nel 1816, E. Du Bois-Reymond nel 1818, E. Brücke nel 1819, H. von Helmholtz nel 1821, E. Pflüger nel 1829. Tutti si occuparono principalmente o per buona parte della loro vita di anatomia e fisica fisiologica (meno degli altri, Cl. Bernard); e fu tale e tanta la messe raccolta dai fisiologi tedeschi sul campo quasi vergine e non percorso da altri (se ne togli Cl. Bernard), che non è da meravigliare se la fisiologia del secolo XIX sia stata una scienza quasi esclusivamente germanica. In quel tempo, la nostra stirpe, che già aveva parlato per la bocca di uno Spallanzani, esauriva le sue forze nelle congiure politiche contro lo straniero oppressore e nei moti rivoluzionarii. Quando, stanca, ebbe pace nella libertà, il campo era stato in massima parte mietuto, e i frutti più facili a raccogliere erano stati raccolti.

(2) Il « vitalismo » è sopraffatto, finchè lo spirito umano percorre trionfalmente la via della ricerca biologica armato di nuovi metodi e principii scientifici; risorge, non appena questi metodi e principii, esaurito il còmpito loro, riconducono lo spirito umano di fronte al problema sempre insoluto e divenuto più complesso e intricato della vita, e pare che

Spettava alla Chimica fisiologica l'ufizio di rinvigorire lo spirito alla ricerca e la fede nel valore del metodo scientifico. Pflüger si segnalò fra i primi nella nuova via additata da Liebig e che Cl. Bernard già percorreva trionfalmente. Ma prima di mettervisi dentro, egli sostò, come sospeso fra il vecchio e il nuovo indirizzo; e frutto di questo periodo della sua attività furono, da una parte, le ricerche morfologiche sugli ovarii (1863) (1), colle quali, prima di Waldeyer (1870) (2), scoprì i rapporti dell'epitelio ovarico col peritoneo, descrisse i tubi cellulari che portano il suo nome, affermò non potersi dubitare che il peritoneo sia la matrice onde traggono origine le ghiandole sessuali (3), l'uovo una cellula peritonale e il follicolo di Graaf una formazione vescicolare connessa per il tubo con l'epitelio ovarico, e le

abbia il sopravvento finchè lo spirito vi rimane perplesso e non abbia trovato nuovi principii e metodi d'indagine che lo armino di nuovo potere contro la sfinge dell'ignoto. Non si può predire se e quando sia per cessare tale vicenda. Ma se la triste profezia che E. Du Bois-Reymond racchiuse nella parola *Ignorabimus* non sarà mai per verificarsi, la vittoria d'ogni corrente vitalistica del pensiero non potrà essere se non precaria e transitoria. Presentemente abbiamo nuovi metodi e principii da sfruttare, e per ciò noi percorriamo un periodo di trionfale cammino della fisiologia, mentre il neovitalismo se ne rimane depresso e annidato nella mente stanca o nello spirito accidioso di alcuni pochi. Niuno può predire che, esaurito il còmpito di questi metodi, lo spirito umano non possa trovarne altri nuovi e sospingere oltre la barriera dell'ignoto.

(1) E. F. W. Pflüger, *Die Eierstöcke der Säugethiere und des Menschen*. Leipzig, 1863.

(2) W. Waldeyer, *Eierstock und Ei. Ein Beitrag zur Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Sexualorgane*. Leipzig, 1870.

(3) Pflüger ammise erroneamente che il peritoneo, sebbene in forma modificata, ricopra l'ovario. Invece Waldeyer dice (l. c., pag. 5): « Die Serosa des Abdomens geht über den Eierstock mit keinem ihrer Bestandtheile hinweg ». Il giudizio di Waldeyer sul lavoro di Pflüger si trova espresso principalmente nelle seguenti proposizioni:

« Der erste, welcher die Eigenthümlichkeit des Eierstocks-Epithels erkannt hat, ist unstreitig Pflüger. Er hat dieselbe aber nicht richtig aufgefasst. Statt das Epithel des Ovariums mit dem der Tuben in genetischen und anatomischen Zusammenhang zu bringen und vom Endothel zu trennen, versucht er an der Hand der Besonderheiten des Ovarialepithels grade den umgekehrten Weg einzuschlagen und sämmtlichen serösen Häuten und Höhlen einen drüsigen Character beizugeben » (l. c., pag. 10). Questa ultima fu certamente una troppo ardita generalizzazione di Pflüger, che però non è da rigettarsi in modo sasoluto.

E altrove, Waldeyer scrive: « In den Schläuchen, und zwar meist in der Mitte derselben, wie es Pflüger beschrieben hat, liegen stets Eizellen,... » (l. c., pag. 25).

Non ostante il valore indiscutibile di questa opera di Pflüger, A. Russo, nel suo recente lavoro (*Modificazioni sperimentali dell'elemento epiteliale dell'ovaia dei Mammiferi*. Mem. d. R. Accad. d. Lincei, Cl. d. Sc. fis. mat. e natur., ann. CCCIV [5a], vol. IV, fasc. XII, pag. 315, 1907), non ricorda nemmeno il nome di lui, al proposito (pag. 329 e segg.) della « Struttura e funzione di assorbimento dell'epitelio germinativo »; lo ricorda solamente al proposito della « Struttura e funzione della zona pellucida ».

ricerche sulle terminazioni nervee nelle cellule delle ghiandole salivari [1], del pancreas e del fegato, confermate poi nei resultati essenziali dalle moderne indagini istologiche; e dall'altra, le numerose indagini sui gas del sangue, dei secreti e degli organi, che vanno dal 1865, quando per la prima volta descrisse la sua *Gaspumpe* [2], fino al 1872, e sulla respirazione polmonare, colle quali arricchì la nostra scienza non solo di nuove osservazioni e dati numerici, ma anche di svariati apparecchi e metodi, divenuti poi classici [3].

Queste ricerche sui gas del sangue e sulla respirazione furono l'anello di passaggio a quelle di pura fisiologia chimica, che riguardano quasi tutti i capitoli della fisiologia del ricambio materiale, la termogenesi e la regolazione della temperatura del corpo, la sorgente della forza muscolare ecc.; lavori che s'iniziano, essenzialmente, con uno scritto monumentale, apparso nel 1875, e si protraggono per oltre trentacinque anni, vale a dire fino alla sua morte, interrotti solamente di quando in quando da brevi e non rilevanti ritorni alla fisiologia del sistema nervoso [4] e ad altri problemi di cui s'era occupato nella giovinezza; oltre che da un complesso di ricerche, d'ordine veramente superiore, su questioni attinenti alla determinazione del sesso, ai principii della generazione e a quella branca della biologia che, dopo Roux, porta il nome di « Meccanica dello sviluppo ».

Il valore dell'opera di Pflüger in questo campo particolare; opera, di cui non sono riescito a rintracciare nei suoi scritti precedenti il germe, nè il motivo o l'agente liberatore nel suo intelletto già plasmato dagli studii di fisica fisiologica e che s'era appena volto a quelli di chimica; opera che per

(1) E. F. W. Pflüger, *Die Endigungen der Absonderungsnerven in den Speicheldrüsen*. Bonn, 1866. (Le altre pubblicazioni su tale argomento sono del 1868, 1869 e 1871).

(2) E. Pflüger, *Beschreibung meiner Gaspumpe*. Untersuch. aus d. physiol. Labor. zu Bonn. Berlin, 1865, pag. 182.

(3) Veggasi in ogni Trattato di Fisiologia quanto riguarda i metodi e resultati scientifici dell'Autore.

(4) Una magistrale rivista critica e sintetica di tutti i recenti lavori morfologici e fisiologici riguardanti il sistema nervoso ha pubblicato recentemente Pflüger (*Ueber den elementaren Bau des Nervensystems*. Pflüger's Arch., CXII, 1, 1906). In essa egli si schiera decisamente contro la teoria del neurone, sia dal punto di vista morfologico che da quello fisiologico. La conclusione generale alla quale giunge è la seguente:

« Das gesamte Nervensystem mit den unter seiner unmittelbaren Herrschaft stehenden Organen stellt ein untheilbares System dar: ein Individuum - und besteht nicht aus einer Vielheit getrennter Einzelwesen. Will man das hier Wesentliche durch ein Bild veranschaulichen, so ist das Nervensystem mit Einschluss seiner Endorgane einer Stahlglocke vergleichbar und nicht einem Haufen Stahlstaub, der durch Pulverisation der Glocke hergestellt werden ist ». Il 'paragone, in verità, non è felice, non è degno di Pflüger.

ciò apparisce occasionale ancorchè sommamente originale; il suo valore, dico, è tanto grande, sì per i resultati importantissimi ai quali l'Autore pervenne, e sì perchè fu la splendida aurora di una nuova scienza, della moderna « Meccanica » o meglio « Fisiologia dello sviluppo », che io non posso sorvolarvi, come me ne farebbe obbligo la ristrettezza del tempo a me concesso e il molto che ancòra mi rimane da dire.

Le ricerche, di cui parlo, sono eseguite nel giro di circa tre anni, dal 1882 al 1885; ma già nel 1877 Pflüger aveva avuto occasione di intrattenersi sulla « sopravvivenza del feto umano » (1), e anche dopo, in quest'ultimo decennio, tornò sull'argomento fortunato (2). Con queste ricerche, egli per il primo applicò seriamente, dopo Lazzaro Spallanzani (3), il metodo sperimentale alla fisiologia della generazione (4). In primo luogo, egli fece un numero grandissimo di esperimenti e di osservazioni sulla determinazione del sesso e sulla produzione di bastardi nei Batraci (5), giungendo alle importanti conclusioni (6):

1) Che nei vertebrati non si dà partenogenesi (7);

2) Che la natura dei genitori, diversa secondo la razza (di genitori, s'intende, che maturino in sè uova e seme), determina il carattere dello sviluppo degli organi sessuali negli esseri giovanissimi già dopo la fecondazione, così che le influenze più abnormi (8), che colpiscano l'uovo fecondato sono

(1) E. Pflüger, *Die Lebenszähigkeit des menschlichen Foetus.* Pflüger's Arch., XIV, 628, 1877.

(2) E. Pflüger, *Ueber die jungfräuliche Zeugung der Bienen.* Pflüger's Arch. XCIX, 243, 1903; Idem. *Ob die Entwick. d. sekund. Geschlechtscharaktere vom Nervensysteme abhängt?* Pflüger's Arch., CXVI, 375, 1907.

(3) L. Spallanzani, *Opuscoli di fisica animale e vegetabile,* Modena, MDCCLXXVI. Vol. II, Opusc. II: *Osservazioni e sperienze intorno ai Vermicelli spermatici,* ecc., pp. 3-124. L'opera del Nostro grande fisiologo fu perfettamente conosciuta da Pflüger, e da lui frequentemente citata e debitamente lodata.

(4) In uno dei primi lavori di questa serie, Pflüger scrisse: « Es ist aber gewiss, dass, wenn die Physiologie der Zeugung der Sphäre leerer Phrasen entrückt werden soll, zunächst durch treue Arbeit ein sicherer Boden von Thatsachen geschaffen werden muss ». Ved. E. Pflüger, *Hat die Concentration des Samens einen Einfluss auf das Geschlecht?* Pflüger's Arch., XXIX, 1, 1882. In questo breve lavoro egli stabilì che « die Concentration des Samens hat keinen Einfluss auf das Geschlecht ».

(5) E. Pflüger. *Ueber die das Geschlecht bestimmenden Ursachen und die Geschlechtsverhältnisse der Frösche.* Pflüger's Arch., XXIX, 13, 1882.

(6) È singolare che A. Russo, nella Memoria sopra citata, non ricorda nemmeno il nome di Pflüger, a questo proposito, sebbene esso sia, per giudizio concorde dei più competenti (ved. appresso), indissolubilmente legato alla questione del determinismo del sesso.

(7) E. Pflüger, *Ueber die parthenogenetische Furchung der Eier der Amphibien.* Pflüger's Arch., XXIX, 40, 1882. In questo lavoro l'A. giunge alla conclusione: « kein Batrachierei furcht sich ohne Befruchtung » (pag. 44).

(8) E. Pflüger, *Ueber die das Geschlecht bestimmenden Ursachen und die Geschlechtsverhältnisse der Frösche.* Pflüger's Arch. XXIX, 13, 1882. Fra l'altro, l'A. scrive:

incapaci di modificare i rapporti fra i sessi, quali sono trasmessi dagli antenati, e quindi minima è la speranza di determinare con qualsiasi mezzo il sesso (1) d'un uovo fecondato, o di esercitare un'azione determinante sopra l'uovo e il seme maturi, prima della fecondazione (2). Per quanto riguarda i Batraci, sui quali Pflüger sperimentò, ciò dipende, secondo lui, dal fatto che gli esseri giovanissimi sono veri ermafroditi e che da questi lo sviluppo di maschi o di femmine avviene prima o poi conforme all'origine loro. Egli vide che i numeri dei sessi della stessa specie di rane, caratteristici per i giovani animali nei diversi luoghi abituali, rimangono invariati anche quando tutti i nati di diversa origine sono allevati in uno stesso luogo.

3) Per quanto riguarda la produzione di bastardi (3), Pflüger osservò che nei Batraci essa è possibile, ma non sempre è reciproca fra due specie diverse (4). « Se si pensa — egli dice, inoltre — che i germi derivanti dallo

---

« Künstliche Befruchtung mit allen ihren abnormen Einwirkungen auf Ei und Same, Aenderung des Klima's, des Wassers, der Nahrung u. s. w. hat keinen Einfluss auf die relative Beziehung der beiden Geschlechter zu einander gehabt. Das Geschlecht dieser junger Frösche war schon bestimmt, ehe die Eier, aus denen sie entstanden, nach Bonn kamen, um hier befruchtet zu werden ».

(1) Giustamente a questo proposito Th. H. Morgan (*Experimental Zoology*. New York, 1907, pag. 382) osserva: « It is true that this not in itself shows that the sex may not be determined by the external conditions; but if the natural disproportion of males to females is very great, error may easily creep into the experimental results ».

(2) I recenti lavori sui cromosmi determinanti il sesso (E. B. Wilson, *Studies on chromosomes*. Journ. of exper. Zool., III, 1, 1906; Ch. L. Edwards, *The sex-determining chromosomes in Ascaris*. Science, April 1, 1910, p. 514; Boveri, Arch. f. Zellforsch. V, 4 ecc.), sono tutti a sostegno della idea di Pflüger, che deriva da queste sue parole, che cioè il sesso è già determinato al momento della fecondazione. Wilson dice infatti (p. 2): « ... fertilization by spermatozoa that posses this (additional) chromosome produces females, while males are produced upon fertilization by spermatozoa that do not posses it ». Ved. anche: Th. H. Morgan, *Experimental Zoology*, New York 1907, p. 401 e segg.

(3) E. Pflüger, *Die Bastarderzeugung bei der Batrachiern*. Pflüger's Arch., XXIX, 48, 1882. E. Pflüger und W. Smith, *Untersuch. über Bastardirung der anuren Batrachier und die Principien der Zeugung. I. Experimente über Bastardirung der anuren Batrachier;* Ibidem, XXXII, 519, 1883; E. Pflüger, *II. Zusammenstellung der Ergebnisse und Erörterung der Principien der Zeugung*, Ibidem, 542, 1883; A. v. Griesheim, W. Kochs und E. Pflüger, *Beiträge zur Physiologie der Zeugung. I. Ueber die Zahlenverhältnisse der Geschlechten bei Rana fusca von* A. v. Griesheim. Ibidem, XXVII, 237, 1881.

(4) Th. H. Morgan (l. c., pag. 174) scrive a questo proposito: « Pflüger concluded from his results that cross-fertilization depends less on the similarity of the adults than on the peculiarities of the spermatozoa. Thus the spermatozoa of *Rana fusca* and *Rana arvalis* are very different, and while cross-fertilization takes place in one direction it does not in the other. On the other hand the spermatozoa of *Bufo cinereus* and *B. variabilis* are much alike, and reciprocal cross-fertilization is successfull. In support of his view Pflüger points out that the spermatozoa are most successfull in crossing that have

spermatozoo mantengono una certa individualità specifica, rispetto a quelli che derivano dall'ovo, anche dopo la fecondazione, ne segue che, durante lo sviluppo degli organi sessuali nell'embrione, due specie di germi si svilupperanno: quelli discendenti dallo spermatozoo, cioè dal padre, e quelli discendenti dall'ovo, cioè dalla madre. Di conseguenza, ogni organismo è in origine ermafrodito ». Qui trovasi già abbastanza chiaramente espresso quel che van Beneden affermò nel 1885 intorno alla massa ereditaria d'origine mista, paterna e materna, basandosi sui rapporti fra i cromosomi nell'*Ascaris megalocephala*. D'intonazione Mendeliana sono poi le seguenti parole: « I figli degli stessi genitori somigliano spesso in parte quasi interamente al padre, in parte quasi interamente alla madre. Evidentemente in uno stesso uovo i germi sono fra loro somiglianti, ma non del tutto identici: ve ne saranno, come di solito fra gli esseri naturali, di più forti e più deboli ». « Lo stesso vale per lo spermatozoo. Dopo la fecondazione, l'uovo conterrà germi più prossimi alla costituzione paterna ed altri più prossimi alla materna. Poichè questi germi si trasmettono di generazione in generazione, facilmente intelligibile diviene il ritorno atavico ».

Ma dove Pflüger aprì un nuovo orizzonte all'indagine biologica fu nelle sue ricerche sull'influenza della gravità e di altre condizioni sopra la segmentazione dell'uovo di rana e lo sviluppo dell'embrione ([1]); nè si comprende come mai egli abbandonasse, dopo i primi ed efficacissimi assaggi, la nuova terra scoperta. Io non posso però indugiarmi a riassumere gli stupendi resultati da lui ottenuti ([2]). Mi basti riportare il giudizio di due fra i più

---

the thinnest or most pointed heads ecc. ». « Pflüger found that the eggs of the frog have the greatest power of being cross-fertilized at the height of the breeding season ». (Ved. a questo proposito anche: E. Pflüger, *Wirkt der Saft der Hoden nicht brünstiger Männchen befruchtend?* Pflüger's Arch., XXIX, 44, 1882; Idem, *Versuche der Befruchtung überreifen Eier*, Ibidem, pag. 76).

([1]) E. Pflüger, *Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Theilung der Zellen.* Pflüger's Arch., XXXI, 311, 1883; *Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Theilung der Zellen und auf die Entwicklung des Embryo*, Ibid., XXXII, 1, 1883; *Ueber die Einwirkung der Schwerkraft und Banderer edingungen auf die Richtung der Zelltheilung*, Ibid., XXXIV, 607, 1884.

([2]) Non credo di poter io riassumere i resultati di queste ricerche di Pflüger meglio che con le parole del Morgan, il quale riferisce i lavori del Nostro, più diffusamente nella monografia: *Die Entwickelung des Froscheies*, Leipzig, 1904, pp. 35-38, 56, 67-70, 73, 105-111, 111-114, 121, 136; più succintamente nell'opera: *Regeneration*, New York, 1901, pp. 216, 242-243, 246, 252, 256, 264, 265, 288. Fra i varî luoghi di questa seconda opera del Morgan io scelgo, ora, e riporto quelli che riguardano particolarmente la Meccanica dello sviluppo dell'uovo di rana.

(Pag. 242) « Pflüger found that in whatever position the frog's egg is turned before it begins to divide, the first two planes come in vertically, and the third orizontally, and that later the smallest cells are always formed in the upper hemisphere. Ho concluded, therefore, that gravity has some sort of influence in determining the position of the planes of cleavage.

competenti sperimentatori moderni nel campo della meccanica dello sviluppo.

Pflüger observed that the position of the medium plane of the body of embryos that have developed from eggs turned into unusual positions does not, as a rule, correspond to the plane of the first cleavage, but that the embryo generally lies on the meridian of the egg that passes through the primary egg axis and the highest point of the egg in its new position. Since any meridian may happen to be placed uppermost, the embryo may, therefore, develop upon any one of the primary meridians, and hence the material must be isotropous around the primary axis. Furthermore, since the embryo appears always below the middle of the egg, in whatever position the egg may lie, we must conclude that in each meridian the material is also isotropic.

It may be pointed out that while more recent work has substantiated, on the whole, the latter conclusions af Pflüger (not, however, the supposed action of gravity on the egg, M.; ved. appresso), just stated, still the results of studies of regenerative phenomena of organisms show that the conclusions are not necessarily the only ones deducible from the experiments; for, although it may be true that any possible primary meridian of the egg may become the median plane of the body of the embryo, it does not follow that there is no one organized plane always present in the normal egg, *i. e.* the egg may not be entirely isotropic. That this may be the case is shown in the regeneration of pieces of adult animals in which a piece cut to one side of the old median plane may develop a new plane of symmetry of its own. This possibility must be also admitted for the egg. If we substitute the term « totipotence », meaning that any meridian of the egg has the possibility of becoming the median plane of the embryo, in place of Pflüger's term « isotropy », we remove this element of possible error from his statement ».

Nell'altro libro del Morgan (*Die Entwickelung* ecc., pp. 113-114) così sono riassunte le tre più importanti conclusioni di Pflüger:

« Die drei wichtigsten Schlüsse, zu denen Pflüger gelangte, waren: 1. der vorausgesetze Zusammenhang zwischen der Wirkung der Schwerkraft auf das Ei und seine Furchung, 2. dass es mit Bezug auf die Bildung des Embryo keinen Unterschied ausmacht, auf welchem Wege sich das Ei teilte, und 3. das Eimaterial, da ja der Embryo auf jedem Teil des Eies auftreten kann, als isotropisch anzusehen ist. Von diesen drei Schlüssen ist der erste ... falsch ... », perchè « Roux and Born have shown that the only action that gravity has on the frog's egg is to bring about a rearrangement of the contents of the egg, a phenomenon that Pflüger has not observed. The lighter parts flow to the highest region of the egg, and the heaviest to the bottom of the egg, hence the change in the position of the cleavage planes observed by Pflüger that begin in the upper, more protoplasmic part of the egg » (*Regeneration*, pag. 243). « Der zweite ist wahrscheinlich zutreffend, und bei allen späteren Diskussionen über die Bedeutung des Furchungsprozesses spielte er eine wichtige Rolle. Der dritte Schluss ist wahrscheinlich ... unzutreffend, allein er enthält ein wichtiges Stück Wahrheit. Wenn wir statt zu behaupten, die Zellen seien alle gleich, vielmehr angeben, dass sie, wenn sie auch different sind, doch potentiell fähig sind, dasselbe zu leisten, kommen wir der Wahrheit näher ».

« Another series of experiments, that we also owe, in the first place, to Pflüger ('84) consist in compressing the egg before and during its cleavage. The position of several of the cleavage planes may be altered, yet a normal embryo developes from the egg. The same experiment has been repeated by Hertwig ('93), and by Born ('93), on the frog's egg, and by Driesch ('92), Ziegler ('94), myself ('93), and others, on the egg of the sea-urchin, with substantially the same result. The value of the experiment lies not so much in showing that the coincidence between the first cleavage planes and the orienting pla-

Il Morgan scrisse [1] che « il lavoro sperimentale di Pflüger del 1883 intorno all'influenza della gravità sulla segmentazione dell'uovo di rana, e le conclusioni che egli trasse dai suoi sperimenti, segnano il punto di partenza per lo studio moderno dell'embriologia sperimentale ». E più di recente, Hans Driesch, dopo avere ricordato His, Goette e Rauber, quali restauratori della morfologia razionale, aggiunge [2]: « col nobilissimo istrumento d'ogni scienza normativa, però, vale a dire coll'esperimento, Pflüger e Roux furono i primi ad affrontare i problemi dello sviluppo delle forme organiche » [3].

Gli scritti di Pflüger sul ricambio materiale sono di due specie: alcuni sono d'indole generale, critico-filosofici; altri d'indole speciale, tecnici e sperimentali. Ciò che io debbo subito rilevare è che i primi precedono gli altri; il che dimostra che questi, contrariamente ai lavori di Voit, caratterizzati da grande originalità, sono piuttosto il prodotto del pensiero riflesso dell'Autore, e furono eseguiti in grande parte per il bisogno di fornire prove sperimentali ai concetti teorici già formulati in precedenza.

Ciò non toglie che gli scritti d'indole generale, ai quali accenno, principalmente quelli del '75 sui « processi di combustione organica e di fosforescenza » [4] e l'altro del '77 sulla « meccanica teleologica » [5], imprimessero fin dal loro apparire un'orma profonda nella nostra scienza, e additassero una nuova via all'indagine fisiologica, e dessero il motivo a un numero straordinariamente grande e svariato di lavori sperimentali. Con quegli scritti Pflüger costrinse l'attività dei fisiologi a concentrarsi nello studio delle proprietà fondamentali della cellula vivente, del protoplasma, quale centro dello

---

nes of the body may be lost, as in showing that under these circumstances the nuclei have a different distribution in the protoplasm from that which they hold in the normal egg ».

(1) Th. H. Morgan, *Regeneration*, New York, 1901, pag. 242.

(2) H. Driesch, *Die Physiologie der tierischen Form.* Ergebn. d. Physiol., V. Jahrg., 13, 1906.

(3) Ecco come si esprime ancora il Morgan (l. c., pag. 242) intorno al lavoro di Pflüger: « ... one of the conclusions reached by Pflüger, namely, that the material of the egg may be divided by the cleavage planes in any way whatsoever without thereby altering the position of the embryo on the egg, is, I think, one of the most important results that has yet been reached in connection with the experimental work on the egg. Pflüger's analysis of the factors that direct the development has also an important bearing on the interpretation of the development of a whole embryo from a part of an egg ».

(4) E. Pflüger, *Beiträge zur Lehre von der Respiration. I. Ueber die physiologische Verbrennung in den lebendigen Organismen.* Pflüger's Arch., X, 251, 1875. Ved. anche: *Ueber die Phosphorescenz verwesender Organismen,* Ibidem, XI, 222, 1875; *Ueber die Diffusion des Sauerstoffs, den Ort und die Gesetze der Oxydationsprocesse im thierischen Organismus.* Ibidem, VI, 43, 1872.

(5) E Pflüger, *Die teleologische Mechanik der lebendigen Natur.* Pflüger's Arch., XV, 75, 1877.

svolgimento dei processi metabolici, quale vero ed essenziale focolare della vita; onde ben a ragione può dirsi che con essi s'iniziò la moderna fisiologia cellulare, intesa come dottrina delle proprietà fisiologiche generali dei protoplasmi differenziati.

Senza dubbio, egli aveva avuto dei precursori. Già Virchow (1), creando la patologia cellulare, ne aveva implicitamente creato anche la fisiologia. E poi Voit (2) aveva stabilito il principio fondamentale, che non la circolazione dei materiali nutritivi o la quantità dell'ossigeno disponibile determina il consumo e l'ossidazione dei medesimi, ma che questo è regolato dalle cellule stesse conforme ai loro bisogni funzionali. Anche Hoppe-Seyler (3) ed altri avevano espresso idee consimili.

Spetta però a Pflüger il merito di avere dato al principio del metabolismo cellulare uno sviluppo così ampio e profondo, come niuno prima di lui aveva fatto, confortandolo inoltre di numerosissime e svariate prove sperimentali tratte principalmente dai fenomeni della respirazione e da quelli di fosforescenza, oltre che di argomenti d'indole puramente chimica, e di morfologia e fisiologia comparata: « Qui — egli dice (4) — nel meraviglioso spet-

(1) R. Virchow, *Die Zellularpathologie in ihrer Begründung auf phisiologische und pathologische Gewebelehre*. Berlin, 1858 (prima edizione). Giustamente, a questo proposito, Verworn (*Allgemeine Physiologie*, 5. Aufl., Jena 1909, pag. 56) osserva: « Es könnte paradox aussehen, dass erst dreissig bis vierzig Jahre, nachdem Rudolph Virchow in seiner « Zellularpathologie » das zellulare Prinzip als die Grundlage der gesamten organischen Forschung erklärt hat, eine Grundlage, auf der sich jetzt in der That alle unsere medizinischen Vorstellungen aufbauen, dass erst soviel später die Physiologie begonnen hat, neben einer, *Organphysiologie* auch eine *Zellphysiologie* zu entwickeln ». Ma questo è il corso naturale degli eventi. La fisiologia cellulare, preconizzata da Virchow, da Pflüger ecc., non potette incominciare a divenire argomento attuale di lavoro scientifico se non dopo che l'organofisiologia ebbe raggiunto il suo apogeo, quando i fisiologi s'accorsero che l'andare avanti coll'organofisiologia non poteva più condurre a nulla di veramente nuovo ed importante riguardo alla spiegazione dei fenomeni vitali.

(2) C. Voit, Zeitschr. f. Biol., II, 535, 1866; V, 169, 1869.

(3) F. Hoppe-Seyler, *Beiträge zur Kenntniss der Constitution des Blutes. I. Ueber die Oxydation im lebeden Blute*. Med. chem. Unters., I, 133, 1866. In questo lavoro si leggono le seguenti parole degne di nota: « ... es ist jetzt kein Grund vorhanden zur Annahme, dass im normalen Zustande im Blute der Wirbelthiere Oxydationsprocesse vor sich gehen.

Im Gegentheil weisen die Eigenschaften des Hämoglobins, sowie die Ergebnisse obiger Versuche bestimmt darauf hin, dass das Oxyhämoglobin und durch dieses das arterielle Blut nur Sauerstoffträger sind, dass sie an die Gefässwandungen Sauerstoff abgeben, dass in der Haut der Arterien sowie in den Muskeln Oxydationsprocesse erfolgen, welche diese Organe stets frei von Sauerstoff erhalten, nur so ist es denkbar dass vom Oxyhaemoglobin eine Abgabe von Sauerstoff an diese Organe erfolgt » (pag. 139).

È singolare che Pflüger nel suo lavoro principale del '75 non tenga alcun conto di queste parole di Hoppe-Seyler, nè citi mai una volta il nome di Voit.

(4) Queste parole sono riportate dal Verworn (*Allgem. Physiol.*, V^e Aufl., Jena 1909, pag. 300) testualmente; ma io non sono riescito finora a ritrovarle negli scritti originali di Pflüger che si riferiscono a questo argomento.

tacolo della fosforescenza animale, la natura ci ha dato un esempio, mostrandoci dove arde la fiaccola, che noi chiamiamo vita ». « E questa non è un'eccezione, ma una espressione particolare della legge, che tutte le cellule continuamente bruciano, ancorchè la luce non sia percettibile dai nostri sensi ».

È la cellula vivente che regola il consumo dell'ossigeno, e il processo di combustione in essa avviene indipendentemente non solo da uno stato particolare di attività dell'ossigeno, ma anche, entro certi limiti, dalla pressione parziale del gas (pag. 251) (¹). Tutte le funzioni specifiche: generazione, assimilazione, accrescimento, moltiplicazione, sensazione, pensiero, volontà, movimento ecc., sono lavoro della sostanza cellulare, non dei succhi (pag. 301). Nel tentar di spiegare i fenomeni di combustione organica, però, noi ci troviamo di fronte a una grave difficoltà. Mentre vediamo che l'assoluta necessità dell'assorbimento di ossigeno e della formazione di acido carbonico nella materia vivente, cioè nella cellula, è una proprietà fondamentale di tutti gli organismi (pag. 270), ci è anche nota l'indifferenza della massima parte delle nostre sostanze nutritive verso l'ossigeno neutro a temperatura mediocre (pag. 300). Come spiegare dunque le ossidazioni cellulari? Si possono fare più ipotesi: per es., che l'ossigeno diventi in qualche modo attivo e ossidi le sostanze organiche; ma Pflüger respinge l'ipotesi dell'ozono, e conchiude che non l'ossigeno, ma l'albumina si modifica quando diviene parte integrale della cellula vivente (pag. 300), e in modo tale da rendere ragione sia del consumo di ossigeno e della formazione di acido carbonico, come della sua stessa scomposizione.

Pflüger distingue, infatti, l'albumina morta dall'albumina vivente. « Solo la cellula porta i segni specifici della vita; solo essa è vivente nel vero senso della parola. L'albumina del sangue è, per così dire, una materia morta in un organismo vivente, finchè non sia divenuta sostanza cellulare ». L'« albumina morta » è, dunque, l'albumina del sangue e però corrisponde all'« albumina circolante » di Voit, come l'« albumina vivente » corrisponde all'« albumina organizzata » dello stesso. E Pflüger ammette, dunque, che l'albumina del sangue tale quale è, cioè morta, si vivifica quando diviene componente cellulare; allora essa contribuisce nella corteccia cerebrale alla formazione del pensiero, nei muscoli alla produzione di lavoro; e si trasforma nei testicoli in seme, nel cervello in sostanza del pensiero (Denksubstanz), nel muscolo in materia contrattile. È sempre la stessa albumina, in origine; ma nelle cellule diviene qualche cosa di diverso; e non sì tosto l'assunzione dell'albumina nelle cellule è avvenuta, che la sua indifferenza verso l'ossigeno cessa, cioè incomincia a respirare, a vivere (pag. 301). In che consiste

(¹) Le pagine qui e appresso citate si riferiscono al lavoro del '75, Pflüger's Arch., X.

essenzialmente la differenza fra albumina morta e albumina vivente? Per quale miracolo la prima si trasforma nella seconda? Come avviene la formazione di nuova sostanza vivente?

Le differenze fondamentali sono queste. La prima è che « l'albumina organica, cioè la sostanza cellulare si scompone sempre da sè » (p. 308). mentre l'albumina morta à stabilissima. « Nella formazione dei tessuti, dice Pflüger, viene eseguito un lavoro, per il quale la coesione della molecola proteica rimane straordinariamente diminuita ». « Questo è un fatto! » esclama l'Autore (p. 308). Questo non è invece altro che una debolissima ipotesi, il punto più debole di tutta la costruzione teorica. Questa estrema labilità e autodisintegrabilità della sostanza vivente sarebbe dovuta, secondo Pflüger, al formarsi di gruppi cianogeni, mancanti all'albumina morta, e all'ingresso di ossigeno. Il gruppo CN è caratterizzato da grande labilità, ed è per esso che nell'albumina vivente esiste un vivissimo movimento intramolecolare.

« Come nell'albumina vivente — dice Pflüger (p. 338) — si forma un radicale cianogeno, i cui atomi si trovano in uno stato di fortissima vibrazione, quell'atomo di carbonio che è più prossimo all'azoto, o forse quello che è più prossimo al radicale CN, si avvicina anche periodicamente allo stato nascente e, data l'occasione opportuna, e la vicinanza di due atomi di ossigeno, con questi si unisce ed esce sotto forma di acido carbonico; e io penso che la catena di nuovo subito si chiude, in guisa che un nuovo atomo di carbonio s'accosta all'azoto o al radicale cianogeno ». Come si vede, sono le vibrazioni degli atomi dei radicali cianogeni, in ultima istanza, la causa delle combustioni organiche, starei per dire di tutto il metabolismo cellulare, della vita; l'acido carbonico apparisce come un prodotto di dissociazione della molecola della sostanza vivente, non come prodotto di ossidazione di carbonio per opera di ossigeno libero, non organizzato; anche l'ossigeno infatti fa parte dell'albumina vivente al momento in cui si combina col carbonio (e con l'idrogeno), opinione questa che gli fu suggerita dalle ricerche sia di Spallanzani, Hermann ecc., sia dalle proprie intorno alla possibilità della vita, per un tempo considerevole, in atmosfera assolatamente priva di ossigeno. Se non che Pflüger ha tralasciato di dire chi fornisce il lavoro necessario alla formazione dei radicali cianogeni, onde deriva l'energia delle vibrazioni atomiche in questi, non potendo ritenersi seriamente che essa derivi dal calore che si sviluppa nell'atto della formazione dell'acido carbonico, come pensa l'Autore (p. 339), il quale introdusse il concetto erroneo che nei fenomeni fisiologici si svolgano reazioni esplosive. « Nelle molecole d'albumina vivente — egli dice (p. 339) — si deve compiere una continua serie di piccole esplosioni, i cui urti rinforzano le vibrazioni intramolecolari... » Le reazioni che si svolgono negli organismi, invece, non sono adiabatiche, ma isotermiche, ogni processo esplosivo è da escludersi, e quindi

anche ogni aumento di temperatura tale quale sarebbe necessario alla formazione di radicali cianogeni.

Portando la sua idea alle estreme conseguenze, Pflüger vede l'origine della sostanza vivente sulla terra dipendere dal formarsi dei radicali cianogeni degl'idrocarburi e dei radicali alcoolici sotto l'influenza del calore terrestre, e dall'unirsi di questi corpi in albumina durante il successivo raffreddamento del globo. La vita nacque dunque dal fuoco. Di necessità, la prima albumina che apparve sulla terra fu sostanza vivente [1]; e da

[1] Recentemente Pflüger ha voluto attenuare gli entusiasmi di coloro che, in base alle ricerche di E. Fischer e dei discepoli di lui, credono sia prossimo il giorno in cui potrà darsi una completa definizione chimica dell'albumina. Egli scrive (*Ueber das Wesen der Eiweissstoffe*, Pflüger's Arch., CXXIX, 100, 1909): « Es ist zuerst zu beachten, dass das Molekül der Eiweisskörper *im engeren Sinne* noch nicht einmal bis zu 50 % aufgeklärt ist, also eine grosse Zahl ganz unbekannter Atomgruppen enthält. Ja, es ist erlaubt zu behaupten, dass nicht ein einziger Repräsentant von allen jenen vier « Eiweissgruppen » mit *allen* seinen Spaltungsprodukten aufgeschlossen ist. Wie ist es möglich von Molekülen, die viele unbekannte und veränderliche Bestandtheile enthalten, zu behaupten, dass man ihre chemische Constitution unter ein bestimmtes Schema bringen könne? Demnach ist es ganz gewiss, dass heutigen Tages keine chemische Definition von Eiweiss möglich ist.

Deshalb gibt es nur eine mögliche Begriffsbestimmung, d. i. die physiologische, welche sehr scharf ist. *Denn es gibt nur einen Stoff in der Welt, welcher alle thierischen Zellen — bei Gegenwart von Wasser und den nöthigen Mineralbestandtheilen — zu ernähren vermag. Das ist das Eiweiss* ». E più oltre aggiunge: « Wenn man erwägt, dass das Eiweiss allein jede Leistung der Zelle ermöglicht; also auch bei der psychischen Arbeit betheiligt ist, dann sind wir verpflichtet, scharf zu untersuchen, welches die wahre Constitution dieses absoluten Nahrungsmittel sei. Denn das Verständniss der Constitution des lebendigen Eiweiss enthält die Lösung der Räthsel der Welt ».

Io oso far seguire due osservazioni alle parole del grande Maestro.

In primo luogo, non credo che possa destar meraviglia il fatto che i grassi soli o i soli idrati di carbonio non siano in grado d'intrattenere la vita delle cellule, là dove l'albumina è capace da sola di far ciò, data l'enorme differenza di composizione chimica dell'albumina da una parte e di quelle altre sostanze dall'altra, e considerato il fatto indiscutibile che dall'albumina l'organismo vivente può far derivare grassi e idrati di carbonio, per cui albumina sali e acqua costituiscono, come ben dice Pflüger, un alimento completo.

In secondo luogo, ho ricevuto sempre l'impressione, leggendo gli scritti di Pflüger, che per lui albumina vivente e protoplasma o sostanza vivente siano la stessa cosa. Se per « albumina vivente » egli intende il « protoplasma », allora non c'è nulla da obiettare o solamente questo: che l'espressione è superflua e da abbandonarsi, perchè può dar luogo ad equivoco. Ma se invece per « albumina vivente » s'intende l'insieme dei costituenti proteici del protoplasma, ossia le proteine in quanto fanno parte del protoplasma, allora non si può identificare questo con l'« albumina vivente » di Pflüger. Il protoplasma è qualche cosa di più dell'albumina protoplasmatica, sia chimicamente, sia, soprattutto, chimico-fisicamente. Il protoplasma è un sistema complesso, e a ciò deve le sue proprietà di *sostanza vivente*; le proteine sono un componente del sistema, ed il più importante verosimilmente perchè esse conferiscono al protoplasma lo stato colloidale che lo carat-

quella prima sostanza vivente deriva tutta la materia organizzata che oggi si trova sulla terra [1], perchè essa è caratterizzata dalla proprietà congenita di assimilarsi albumina morta vivificandola e di costruire nuova sostanza vivente da materie non viventi e di crescere all'infinito, per polimerizzazione, formando molecole gigantesche, che non hanno riscontro nelle altre specie molecolari.

Ma quali prove abbiamo dell'esistenza di radicali cianogeni nella sostanza vivente? Prove dirette non possiamo avere, risponde l'Autore, perchè le albumine che noi analizziamo sono tutte morte, sono i detriti di quelle immani molecole di sostanza vivente, che spesso sono grandi quanto un intero organismo, e nelle albumine morte gruppi cianogeni non esistono più. Pflüger dice (pag. 338) che « la trasformazione dell'albumina vivente nella ordinaria consisterebbe in un processo d'assunzione di acqua », e il fenomeno inverso, nella formazione dei tessuti, in un processo di disidratazione e ni-

---

terizza e dal quale dipende grande parte di quelle che chiamiamo sue proprietà vitali. Oltre a ciò, il protoplasma con tutte le sue differenziazioni e inclusioni, cioè il citoplasma, la cellula, ha una struttura, e da questa dipende un'altra grande parte delle proprietà vitali.

Di tutta questa complessità, l'espressione « albumina vivente » mal rende (ripeto, salvo che per convenzione si voglia chiamare così il citoplasma vivente) l'idea; anzi, ripeto, induce nella mente nostra il sospetto che « vivente » sia o possa essere la sola albumina, che la vita dipenda dalla sola composizione chimica dell'« albumina vivente », come più volte dice l'Autore.

[1] Creatasi la prima « albumina vivente », nel modo detto, « in der Pflanze — aggiunge l'Autore (p. 343) — fährt also das lebendige Eiweiss nur fort zu thun, was es immer seit seinem ersten Entstehen that, d. h. sich fortwährend in allen seine Theilen durch Anziehung von Gleichartigem zu regeneriren oder zu wachsen, weshalb ich glaube, dass alles hente in der Welt vorhandene Eiweiss direct von jenem ersten abstammt ».

Passa poi egli a sostenere l'opinione che le differenze fondamentali generalmente ammesse fra piante ed animali non esistono, o sono solamente di grado. Particolarmente egli insiste ripetutamente (l. c., pag. 345) sul punto che: « Chemische Synthesen kommen im Körper des Thieres ebenso gut als in dem der Pflanzen vor ». E altrove (*Wesen und Aufgaben der Physiologie*, 1878, pag. 7) dice: « Man glaubte früher, dass nur die Pflanzen die Fähigkeit besässen, aus kleinen Molekülen grosse zusammenzusetzen, etc. Es ist aber seitdem... bewiesen worden, dass der thierische und menschliche Organismus dennoch nach einem sehr einfachen und wie es scheint immer demselben Verfahren aus kleinen Molekülen grössere chemisch zusammensetzt ».

Ma non si tratta di molecole piccole e grandi. La differenza fra piante e organismi unicellulari, da una parte, e animali, dall'altra, sta essenzialmente in ciò, che questi non sono capaci di costruire, a simiglianza di quelli, sostanze organiche semplici (zuccheri, grassi, aminoacidi) da elementi minerali.

Tanto il protoplasma vegetale quanto l'animale costruiscono albumina da corpi che albumina non sono, ma il primo può costruirla da corpi minerali, mentre il secondo ha assolutamente bisogno per il detto lavoro costruttivo di corpi non più semplici degli aminoacidi e polipeptidi, per quanto riguarda p. es. il componente azotato dell'albumina.

trilizzazione (pag. 337): ma su questo punto, che è poi il fondamentale, egli non s'indugia affatto, così che tutta la costruzione teorica è veramente un colosso d'oro dai piedi d'argilla. Egli desume piuttosto l'esistenza dei radicali cianogeni nell'albumina vivente dalla differenza fra i prodotti della scomposizione artificiale dell'albumina *in vitro* e quelli del ricambio materiale azotato degli organismi, in quanto che fra i secondi si trovano, sebbene in piccolissima quantità, corpi — quali l'acido urico, la creatina e i corpi xantinici ecc. — caratterizzati dal radicale cianogeno, che non si trovano fra i primi; e anche l'urea, egli dice, che è un'amide, non è verosimile che derivi direttamente dai gruppi aminici dell'albumina, bensì indirettemente da gruppi cianogeni passando per lo stadio di cianato ammonico. Questa è certamente un'esagerazione. Oggi sappiamo che urea può ottenersi anche dall'albumina morta (Hofmeister) [1], e che nell'organismo può derivare da carbonato ammonico e dal gruppo guanidinico dell'arginina; sappiamo che nell'organismo probabilmente la maggior parte delle proteine ingerite subisce un processo di scissione idrolitica in cui, forse sotto l'influenza di enzimi disamidanti [2], dagli aminoacidi si staccano i gruppi NH_2, che possono poi dar origine all'urea. Inoltre, fra i prodotti di scissione *in vitro* delle proteine si trovano corpi, quali l'istidina la prolina ecc., che contengono veri gruppi cianogeni. Rimane tuttavia il fatto segnalato da Pflüger, che una parte dell'azoto abbandona il corpo sotto forma di quei composti dianzi ricordati che non sono stati finora ottenuti per scissione artificiale dell'albumina. Ma questo non ci obbliga assolutamente ad ammettere che essi derivino direttamente dall'albumina, anzi è molto verosimile che siano il prodotto di reazioni sintetiche secondarie che si svolgono nei tessuti a spese dei prodotti di scissione primarii delle proteine o degli aminoacidi, nel qual caso le combinazioni del C coll' N che ricordano i gruppi cianogeni potrebbero anche non preesistere nell'albumina organizzata; o preesisterebbero in questa e nell'albumina morta di Pflüger, ma apparirebbero solo fra i prodotti del metabolismo organico e non fra quelli di scissione artificiale, perchè l'una e l'altra scomposizione delle proteine non decorrono nell'identico modo. Vi sarebbe finalmente da ricordare che la differenza segnalata da Pflüger non può tenersi come assoluta e definitiva, finchè noi non si acquisti la perfetta conoscenza e non si venga in possesso dei catalizzatori che verosimilmente

(1) Fr. Hofmeister, *Ueber Bildung des Harnstoffs durch Oxydation.* Arch. f. exper. Path. u. Pharmak., XXXVII, 426, 1896.

(2) Finora non abbiamo prove sicure di un processo di disamidazione degli aminoacidi nei tessuti; nè si è riesciti con esperimenti diretti, fatti con estratti di organi o con succhi spremuti da tessuti, a separare ammoniaca dagli aminoacidi e dimostrare la formazione di urea; ma è verosimile che i resultati negativi siano dovuti alla difficoltà di riprodurre le condizioni naturali del processo di disamidazione (E. Abderhalden, *Lehrb. d. physiol. Chem.*, 2 Aufl., Berlin-Wien, 1909, pag. 322).

operano nei tessuti quelle scissioni dalle quali nascono le sostanze che, secondo Pflüger, caratterizzebbero in modo singolare l'albumina vivente. Niuno dubita che le vie che batte ed i mezzi con cui opera la sostanza vivente siano diversi da quelli del chimico; ma ciò non giustifica la distinzione fra albumina morta e vivente.

Un punto sul quale la fisiologia odierna diverge ancora dal modo di vedere di Pflüger è che l'albumina morta per essere metabolizzata debba divenire prima albumina vivente, cioè entrare a far parte integrale della sostanza vivente. Ma l'albumina del sangue è una proteina altrettanto differenziata che quella del muscolo, del fegato, delle cellule nervose ecc., essa non può quindi trasformarsi in nessuna di queste. Ciascun tessuto fabbrica la sua proteina specifica durante l'accrescimento e rigenera quella poca che si distrugge nell'esercizio quotidiano della sua funzione, utilizzando forse materiali indifferenti, quali sono i peptidi e gli aminoacidi che fornisce la digestione intestinale (o l'autolisi di organi meno nobili, nel digiuno), insieme con gruppi idrati di carbonio, con grassi, con sali minerali, acqua ecc. Come avvenga questa sintesi di materia proteica, noi non sappiamo; ma non certamente nei modi immaginati da Pflüger. Una quantità di osservazioni recenti tendono a consolidare l'opinione che nella parete intestinale non avvenga sintesi di un'albumina totipotente, che poi passando nel sangue costituisca il *pabulum* dei varii tessuti [1]; ma piuttosto gli stessi prodotti del-

[1] Questo pregiudizio si basa sopra antiche ricerche (Salvioli, Hofmeister, Neumeister), i cui resultati non reggono più alla critica, e sopra quelle più recenti di alcuni fisiologi russi, con a capo Danilewskỳ, i quali hanno voluto vedere nella formazione della così detta « plasteina » un processo di sintesi dell'« albumina » nella parete del tubo digerente. Ma io ho dimostrato che questo modo di vedere è insostenibile (Fil. Bottazzi, *Proprietà chimiche e fisiologiche delle cellule epiteliali del tubo gastro-enterico*. Arch. di Fisiol., V, 317, 1908). Ciò non toglie che il pregiudizio si perpetui e si trovi riprodotto e ingenuamente sostenuto nelle più moderne opere di Fisiologia.

M. Verworn p. es. scrive (*Allgem. Physiol.*, 5te Aufl., Jena, 1909, pag. 193): « Wir werden uns also wohl vorstellen müssen, dass die Spaltungsprodukte des Nahrungseiweisses auf dem Wege durch die Darmwand nach der Resorption von den Darmepithelzellen wieder zu nativem Eiweiss zusammengesetzt werden, jetzt aber zu den charakteristischen Eiweisskörpern des Blutes, vor allem zu Globulinen (? B.), die dann an das Blut abgegeben werden. Hier, mit dem Blutstrom, zirkuliert dieses gelöste Eiweiss im ganzen Körper, umspült die Zellen aller Gewebe und wird von den Zellen dem Blute entnommen. In den Zellen schliesslich wird das Eiweiss zum Aufbau der lebendigen Substanz werbraucht etc. ».

Disgraziatamente, perfino dalla lunga discussione che a questo proposito fa Abderhalden (*Physiol. Chem.*, 2te Aufl., 1909, pag. 294 e seg.) si potrebbero trarre argomenti a sostegno del modo di vedere così schematicamente formulato dal Verworn. Ma bisogna leggere bene e interamente ciò che dice Abderhalden. A pag. 298 p. es. è scritto; « Die Plasmaeiweisskörper stellen ein grosses Gemisch dar. Ihre Menge schwankt nur innerhalb sehr enger Grenzen. *Es ist wohl möglich, dass das Plasma Proteine enthält, die beständig vorhanden sind, eine ganz besondere Zusammensetzung besitzen und eine ganz spe-*

l'idrolisi intestinale delle proteine alimentari siano assorbiti tali e quali, e

---

zifische Funktion haben. Hiervon zu unterscheiden wären die während der Verdauung hinzukommenden Proteïne. Diese werden von den Körperzellen dem Blute entzogen. Es ist möglich, ja sogar sehr wahrscheinlich, dass die von den Darmzellen aufgebauten Eiweissstoffe anders geartet sind als die eigentlichen Plasmaproteïne ». E più oltre (pag. 299) aggiunge queste parole significanti: « *Selbstverständlich stehen wir hier nicht experimentell genügend erhärteten Tatsachen gegenüber. Die gegebene Darstellung der Umwandlung der Nahrungseiweissstoffe in körpereigene in der Darmwand ist eine Hypothese* ». Dunque, non le plasmaproteine specifiche, ma una proteina indifferente che si troverebbe nel plasma durante la digestione, sarebbe presa dai tessuti. Ma questa proteina indifferente supposta da Abderhalden come prodotto dell'attività sintetica dell'epitelio intestinale bisognerebbe dimostrarla nel sangue, prima di ammetterne l'esistenza. In secondo luogo, dire *proteina* e chiamarla *indifferente*, per me è una contraddizione in termini. Una proteina, se è tale, è sempre chimicamente differenziata o specifica.

Abderhalden sente la necessità che il *pabulum* azotato delle cellule sia indifferente; ma volendo sostenere la sintesi di proteina nella parete intestinale cade in questa contraddizione. E perchè si fa egli sostenitore di essa? Non perchè aminoacidi non siano stati trovati in quantità apprezzabile nel sangue, come Verworn dice, già che si sa che vi passerebbero in quantità così piccola e sarebbero così rapidamente fissati, che sarebbe impossibile scoprirli, data anche l'insufficienza dei metodi di loro determinazione quantitativa. D'altro canto i suoi stessi esperimenti sul cavallo e sui cani dimostrano (pp. 295-297) che la composizione delle proteine del sangue rimane costante (appunto come quella d'un qualsiasi altro tessuto) anche quando si alimenta l'animale con una specie d'albumina di composizione diversissima da quella delle plasmaproteine. Vi sarà una specie di cellule, che rigenerano le proteine del plasma dopo abbondanti emorragie, e non sappiamo quali sono (le cellule intestinali, o le epatiche o le stesse cellule sanguigne o le cellule dell'endotelio vasale: ciò non importa, nel caso presente): esse rigenerano sempre le proteine specifiche del plasma, utilizzando i materiali elementari indifferenti assorbiti dall'intestino. Perchè non ammettere che così facciano anche tutte le altre cellule dei tessuti? Che bisogno c'è dell'ipotesi di Abderhalden, che non è sostenuta da niuna prova, poichè, come ho detto, la supposta « proteina indifferente » non è stata dimostrata nel plasma? Egli dice della sua ipotesi: « Sie muss sofort fallen, sobald eine Beobachtung vorliegt, die gegen sie spricht. Das ist bis jetzt nicht der Fall » (pag. 299). Ma io dico che non è lecito proporre una ipotesi superflua, per giunta priva di qualsiasi appoggio.

Lo zucchero non è sintetizzato nella parete intestinale. Ma in questa ha luogo la sintesi del grasso. A questo proposito dice Abderhalden (pag. 299): « Auch das Fett wird sicher nicht einfach vom Blute abgegeben und dann als solches in den Zellwerband aufgenommen. Das eigentliche Zellfett ist gewiss auch dem Bau und der Funktion der Einzelzelle angepasst. Auch hier muss ein Umbau stattfinden ». Ciò non è esatto. Il grasso che si riforma nella parete intestinale ha una composizione dipendente da quella del grasso alimentare; e la sintesi verosimilmente è una azione difensiva, data la grandissima tossicità dei saponi e degli acidi grassi superiori. Il fatto che la composizione del grasso corporeo è diversa secondo i vari organi non implica, come parrebbe volesse far credere Adberhalden, un « Umbau » *chimico* dei grassi assorbiti o di quelli depositati, ma solamente una differente proporzione dei varii trigliceridi che compongono il grasso neutro misto. La cosa è ben differente. Se, invece, le cellule dovessero di nuovo idrolizzare la supposta « proteina indifferente » di Abderhalden per fabbricare la *propria* proteina dai prodotti della se-

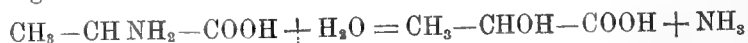
siano poi nei tessuti, compreso l'intestino, o ulteriormente scissi [1] o utilizzati per la sintesi generativa o rigenerativa delle proteine cellulari. Nè è necessario che questi corpi siano di nuovo sintetizzati e divengano sostanza vivente, nel senso di Pflüger, perchè possano essere definitivamente scissi e trasformati nelle ultime sostanze escrementizie [2]; ma basta che essi entrino nell'orbita delle cellule viventi, e che contraggano col protoplasma o con gli enzimi endocellulari rapporti del genere di quelli che anche *in vitro* i catalizzatori organici contraggono con le sostanze idrolizzabili e ossidabili. Si noti che quel che Pflüger dice dell'albumina, dovrebbe anche ammettersi dei grassi e dello zucchero. Questi dovrebbero pure essere incorporati nella molecola gigantesca della sostanza vivente per poter essere ossidati. Ma il protoplasma così raffigurato, come una divinità mitologica che s'incorpora l'« albumina morta » vivificandola per poi esplodere, che incessantemente in parte si distrugge e si rigenera, oggi a noi apparisce una concezione poco scientifica.

---

conda scissione idrolitica, si tratterebbe veramente di una doppia scissione e ricomposizione delle proteine alimentari, la quale io mi rifiuto di ammettere, come superflua, finchè non sia data almeno una prova a sostegno di essa.

(1) Folin (Amer. Journ. of Physiol., XIII, 117, 1905) sostiene essere poco verosimile la ricostruzione di tutte le proteine ingerite. Dagli esperimenti di Nencki e Zaleski (Zeitschr. f. physiol. Chem., XXXIII, 206, 1901) resulta che il sangue portale durante la digestione contiene quattro volte più ammoniaca del sangue arterioso, e che anche la mucosa dello stomaeo e dell'intestino dà grandi quantità di ammoniaca, che deriva in parte dall'intestino, in parte da disamidazione degli aminoacidi nella stessa parete intestinale.

Questo processo di disamidazione è reso molto verosimile dagli esperimenti di Neuberg e Langstein (Arch. f. Physiol., Suppl.-Bd., 1903, pag. 514), i quali trovarono glicogeno nel fegato e acido lattico nell'urina in conseguenza di somministrazione di alanina ai conigli. La trasformazione dell'alanina avverrebbe nel seguente modo:

$$CH_3-CH\,NH_2-COOH + H_2O = CH_3-CHOH-COOH + NH_3$$

Analogamente, Abderhalden e Terunchi (Zeitschr. f. physiol. Chem., XLVII, 159, 1906) trovarono che l'azoto degli aminoacidi è in massima parte trasformato in urea nell'organismo, e anche quello di peptidi artificiali (glicil-glicina).

(2) Anche di recente, M. Rubner (*Das Problem der Lebensdauer und seine Beziehungen zu Wachstum und Ernährung.* München und Berlin, 1908) si è espresso, a questo proposito, così: (p. 36) « Ob bei der Aktivierung des Nahrungseiweisses eine unmittelbare Angliederung an das Lebende der primäre Akt ist oder ob dieselben Fernkräfte, welche die Anziehung vermitteln können, im benachbarten Eiweiss bereits Aenderungen in der Stellung der Atomgruppe, wie sie zur Eingliederung in die lebende Substanz notwendig sind, hervorufen können, entzieht sich vorläufig der Erkenntnis ». E a p. 42: « Meine Auschauung scheidet sich durchaus von jener, die auch manche Autoren ausgesprochen haben, dass alles in den Blutstrom und Lymphstrom kommende Eiweiss erst Zellbestandteil wird, um dann seine weitere Verwendung zu finden ».

La corrente moderna del pensiero tende ad abbandonare questa raffigurazione poetica, e anche tutte le ingegnose filiazioni che ha avute nelle teorie di Hering [1] e di Verworn [2], e le esagerazioni del genere di quella di Loew [3] e di Kassowitz [4], per tornare alle semplici idee di Voit, rinfrescate e illuminate dai resultati delle ricerche odierne sulla chimica dei colloidi, sulle proprietà degli enzimi e degl' ioni, sulla ossidabilità di alcuni prodotti d'idrolisi enzimatica sotto l' influenza di sistemi ossidanti del genere di quello perossido-perossidasi, e sulle reazioni accoppiate. L'efflorescenza delle ipotesi « geniali » nella fisiologia cellulare ora finalmente declina; sorge il periodo sperimentale, basato sull'applicazione dei principii e dei metodi della meccanica chimica ai fenomeni fisiologici elementari. Non bisogna però dimenticare che quelle ipotesi, specie quelle di Pflüger e di Hering, furono il punto di partenza di un numero grandissimo di svariate ricerche.

Voit sostenne per tutta la sua vita che l'albumina organizzata, non che essere labilissima, è caratterizzata da estrema stabilità, e che l'albumina circolante, non che essere stabilissima e inerte, è tanto labile che si distrugge nel giro di poche ore. Ciò è indiscutibilmente vero, se per albumina circolante s'intende, non l'albumina del sangue, ma il complesso dei corpi azotati assorbiti durante la digestione (la « Nahrungseiweiss »), e se la maggior parte dell'azoto che viene eliminato nell'orina entro le 24 ore deriva non da scissione di albumina organizzata, ma dalla definitiva scissione e ossidazione dei detti corpi azotati assorbiti, operate o dal protoplasma o dagli enzimi che esso fabbrica, alla superficie di esso e particolarmente negli strati d'acqua d'imbibizione che avvolgono le micelle di protoplasma, il quale non può essere ritenuto come una sola molecola gigantesca [5].

(1) E. Hering. *Zur Theorie der Vorgänge in der lebendigen Substanz.* Lotos, IX, 1888.

(2) M. Verworn. *Die Biogenhypothese. Eine kritisch-experimentelle Studie über die Vorgänge in der lebendigen Substanz.* Jena, 1903.

(3) O. Loew, *The energy of living protoplasm.* London, 1896.

(4) M. Kassowitz, *Allgemeine Biologie.* Bd. III: *Stoff-und Kraftwechsel des Tierorganismus.* Wien, 1904.

(5) Solamente per quella piccola parte del metabolismo proteico, che Rubner ha chiamato « Abnutzungsquote » potrebbe invocarsi il concetto di Pflüger della estrema labilità dell' « albumina organizzata ». Ma se si analizza bene questa « Abnutzungsquote », si trova, pur seguendo Rubner (*Das Problem der Lebensdauer* etc., p. 37 e segg.), che essa resulta, innanzi tutto delle perdite « durch Haare, Speichel, durch die Abschieferung des Epithels des Verdauungstraktus, der Bildung von Schweiss und anderer Sekrete (Verdauungsdrüsen) ». Questo però non è azoto metabolizzato nel vero senso della parola, ma perduto in forma di proteine e di elementi morfologici. C'è, però, secondo Rubner (loc. cit.), ancòra un'altra parte dell'« Abnutzungsquote », cioè una parte di azoto veramento metabolizzato, che dipende dall'attività propria delle cellule viventi, e che sarebbe « eine Funktion der Lebensintensität ». Le cellule, tanto degli organismi unicellulari q uanto dei metazoi, hanno, secondo Rubner, « *das Gemeinsame, dass sie bei ihrer Tä-*

Quali siano le idee che Pflüger svolse nell'altro scritto, con questo suo capitale intimamente congiunto, sulla *meccanica teleologica*, facilmente può intendersi. Prima di Hering e di Biedermann rilevò il fatto che « l'intenso e durevole uso di un organo ne determina l'aumento in massa e in capacità di lavoro »; formulò la seguente « legge morfologica dell'adattamento funzionale », che « ogni organo, quando intensifica la sua attività, s'ingrossa solo in quelle dimensioni che effettuano l'intensificazione dell'attività funzionale », legge che poi Roux [1] disse dell'« ipertrofia dimensionale »; e anche la « legge teleologica di causalità », che « la causa di ogni bisogno » [2] di un essere vivente è nel tempo medesimo la causa della soddisfazione del bisogno. Si comprende benissimo che le idee svolte in questo lavoro si ricongiungono da una parte colle grandi dottrine Darwinistiche e Lamarkistiche, e dall'altra coi fenomeni di rigenerazione [3].

Per quanto riguarda i lavori speciali di chimica e di fisiologia del ricambio materiale, mi sarebbe assolutamente impossibile riferirne pur in conclusiva brevità il contenuto. Essi vanno dai metodi per la determinazione quantitativa dell'urea e dell'azoto, del grasso e del glicogeno negli organi, dello zucchero ecc., alle questioni riguardanti la possibilità dell'origine di grasso e d'idrati di carbonio dall'albumina e di zucchero dal grasso, la sorgente della forza muscolare, la termogenesi e la regolazione del calore animale, l'assorbimento dei grassi dell'intestino [4], il metabolismo degli idrati

---

tigkeit einen bestimmten Prozentsatz an N einbüssen ». Pare, infatti, che la funzione, per es. muscolare, specie se tonica (C. A. Pekelharing und C. J. C. van Hoogenhuyze, *Die Bildung des Kreatins im Muskel beim Tonus und bei der Starre*. Zeitschr. f. physiol. Chem., LXIV, 262, 1910), vada indissolubilmente legata a un aumento della formazione di creatina nel muscolo. A questa piccola parte, dunque, e forse anche a quella che corrisponde alla formazione dei corpi purinici endogeni ecc., si ridurrebbe la disintegrazione inevitabile di proteina organizzata; vale a dire a una parte di molto inferiore a quella ammessa dal Pflüger e dai suoi seguaci.

[1] W. Roux, *Der Kampf der Theile im Organismus*. Leipzig, 1881, pag. 16.

[2] Le parole dell'A. vanno riferite testualmente (*Die teleolog. Mechan.*, Pflüger's Arch., XV, 1877): « Die Ursache jeden Bedürfnisses eines lebendigen Wesens ist zugleich die Ursache der Befriedigung des Bedürfnisses ».

L'esperienza permette poi di formulare queste altre due leggi (pag. 77):

« I. Wenn das Bedürfniss nur einem bestimmten Organe zukommt, dann veranlasst dieses Organ allein die Befriedigung.

« II. Wenn dasselbe Bedürfniss vielen Organen gleichzeitig zukommt, dann veranlasst sehr häufig nur ein Organ die Befriedigung aller ».

[3] Th. H. Morgan, *Regeneration*. New York, 1901. Ved. pag. 288 e segg. per la esposizione della teoria di Pflüger e la critica di essa.

[4] I lavori di Pflüger sull'assorbimento dei grassi dall'intestino si iniziano col 1900: *Ueber die Resorption künstlich gefärbter Fette*, Pflüger's Arch., LXXXI, 375, 1900; *Der gegenwärtige Zustand der Lehre von der Verdauung und Resorption der Fette* ecc., ibidem, LXXXII, 303, 1900; *Nachschrift zu der vorhergehenden Abhandlung* ecc., ibidem, 351;

di carbonio [1] in condizioni normali e patologiche, il diabete pancreatico e duodenale [2] ecc. Questa è però una parte troppo nota dell'opera di Pflüger, sia perchè più vicina a noi, sia perchè le polemiche con cui andò sempre intrecciato il lavoro sperimentale l'hanno diffusa oltre il campo dei fisiologi specialisti. La sua critica, però, spesso fu salutare. Egli dimostrò la debolezza

---

Fortegesezte Untersuchungen über die Resorption der künstlich gefärbten Fette, ibidem, LXXXV, 1, 1901; *Die Resorption der Fette vollzieht sich dadurch dass sie in wässerige Lösung gebracht werden*, ibidem, LXXXVI, 1, 1901, ecc. Ora, l'idea fondamentale, che i grassi siano assorbiti in soluzione acquosa mediante il concorso dei costituenti biliari, appartiene a Moore e Rockwood (Proc. Roy. Soc., LX, 438, 1897; Journal of Physiol., XXI, 58, 1897 ecc.), che l'avevano espressa fin dal 1897 e sostenuta con numerose ricerche sperimentali. È doloroso vedere, quindi, che in un'opera sotto ogni aspetto pregevolissima, qual'è quella di Abderhalden (*Physiol. Chemie*, 1909), il merito della scoperta sia attribuito solamente a Pflüger, e i nomi di Moore e Rockwood non siano nemmeno ricordati. Pflüger confermò ed estese le osservazioni degli autori inglesi, e, al solito, formulò subito una legge generale, secondo la quale non si dà assorbimento se non di sostanze sciolte. Non infrequentemente accade nella scienza che un autore faccia sua l'idea modestamente espressa da un altro e, tanto la elabori e tanto vi scriva o polemizzi su, che finisca per credere e far credere che quell'idea sia sorta nel cervello di lui. Ma il trattatista imparziale deve ricordare il motto: *unicuique suum*.

[1] Vedi per tutto ciò E. Pflüger, *Das Glykogen* ecc. 2te Aufl, Bonn, 1905.

[2] La questione del « diabete duodenale » è tuttora insoluta. Pflüger iniziò le sue ricerche nel 1907 (Pflüger's Arch., CXVIII, 267, 1907). Estirpato tutto il duodeno nelle rane, osservò una glicosuria più rilevante di quella che negli stessi animali segue alla estirpazione totale del pancreas. Osservò pure che una glicosuria dello stesso grado segue alla legatura di tutte le connessioni vasali e nervose fra pancreas e duodeno: gli animali muoiono dopo pochi giorni. Pflüger spiegò tali fatti ammettendo che il duodeno contenga nella sua parete uno speciale centro nervoso che regola la funzione glicolitica, o meglio la « forza antidiabetica », come l'A. si esprime, del pancreas (ibidem, CXIX, 227, 1907). Interrotte le sole connessioni nervose, mediante uno speciale artifizio tecnico, fra duodeno e pancreas, la glicosuria avviene egualmente. L'esperimento ripetuto nei cani dà pure glicosuria, ma lieve e transitoria. Gli animali, per altro, sopravvissero sì poco alla grave operazione, che non può dirsi se un vero e proprio diabete si sarebbe stabilito col tempo. Glicosuria seguente a duodenectomia era stata osservata nei cani parecchi anni prima da De Renzi e Reale (X Congr. di Medic. int., sed. del 7 agosto 1890, pag. 97), e, contrariamente alle osservazioni di Pflüger, uno dei cani da loro operati sopravvisse per 28 giorni, eliminando circa 15 gr. di glicosio nelle 24 ore; dopo i 28 giorni fu sacrificato, e all'autopsia si trovarono molteplici aderenze fra le anse intestinali. Esperimenti analoghi sono stati fatti da Minkowsky (Arch. f. exp. Path. u. Pharm., LVIII, 271, a. 1908), che ha osservato glicosurie lievi e intermittenti, dall'A. attribuite a inevitabili lesioni del pancreas; opinione questa che Pflüger non ammette, sostenendo egli sempre l'esistenza di un vero diabete duodenale (Pflüger's Arch., CXXII, 267, 1908), che recentemente è stato confermato anche da Zack (Wien. klin. Woch., 16 Jan. 1908) e da R. Gaultier, (Compt. rend. Soc. d. Biol., LXIV, n. 16, 9 mai 1908), secondo i quali la glicosuria è causata da lesione della mucosa duodenale. Finalmente Pflüger ha voluto ripetere gli esperimenti di De Renzi e Reale, seguendo l'identica tecnica loro, ma non è riuscito ad ottenere glicosurie gravi

delle prove su cui soleva fondersi l'origine del grasso dall'albumina (¹) e del glicogeno dall'albumina e dal grasso, il che non toglieva per altro che tali derivazioni fossero possibili. Recentemente infatti Lüthje dimostrava che nei cani diabetici l'alimentazione con carne priva di idrati di carbonio produce un grande aumento dello zucchero nell'orina; e lo stesso Pflüger conclude il suo lavoro, apparso nel gennaio di quest'anno, dando la prova rigorosa dell'origine del glicogeno dall'albumina (²).

Inspirandosi alle idee già espresse da Liebig (³) e poi da Hermann (⁴), e basandosi sopra esperimenti proprii (⁵), sostenne per molto tempo che il lavoro

---

e durevoli (Pflüger's Arch. CXXIV, 1, a. 1908), nemmeno causticando la sierosa intestinale gravemente (Pflüger's Arch. CXXVIII, 125, a. 1909). In conclusione, una glicosuria o un diabete « duodenale » pare che esista realmente, almeno nelle rane; ma la sua origine e natura rimane altrettanto dubbia quanto quella del diabete pancreatico.

(¹) E. Pflüger, *Ueber Entstehung von Fett aus Eiweiss im Körper der Thiere.* Pflüger's Arch., LI, 229, 1891; *Ernährung mit Kohlehydraten und Fleisch, oder auch mit Kohlehydraten allein,* ibidem, LII, 239, 1891. *Ueber Fleisch- und Fettmästung,* ibidem, LII, 1, 1892; *Neue Versuche zur Begründung der Lehre von der Entstehung des Fettes aus Eiweiss,* ibidem, LXVIII, 176, 1897; *Die Entstehung von Fett aus Eiweiss im neuesten Licht der Schule von Carl von Voit,* ibidem, LXXVII, 321, 1889 ecc.

Pflüger dimostrò che le prove dell'origine del grasso dall'albumina erano basate sopra un erroneo apprezzamento del rapporto C:N, e che l'origine di idrati di carbonio da proteine non coniugate (glicoproteine) non è sostenuta da prove convincenti. Altri errori in questo genere di ricerche egli dimostrò che derivavano dall'insufficienza dei metodi d'estrazione dei grassi e del glicogeno dai tessuti e dagli organi, metodi che egli perfezionò con ricerche numerose e pazienti.

(²) E. Pflüger und P. Junkersdorf, *Ueber die Muttersubstanzen des Glykogens.* Pflüger's Arch., CXXXI, 201, 1910.

Ved. qui la citazione delle pubblicazioni di H. Lüthje.

In questo stesso lavoro,, Pflüger dimostra che, nelle condizioni sperimentali da lui stabilite, glicogeno nel fegato non si forma dal grasso, contrariamente a quanto aveva cercato di stabilire nella sua *Monografia sul glicogeno.*

In una « Nachschrift » contenuta nello stesso fascicolo del suo Archivio (pag. 302), a proposito del modo in cui lo zucchero si formerebbe dall'albumina, dice: « Man wird also dazu gedrängt, zuzugeben, dass der Zucker des Diabetikers in diesem Falle nicht im Eiweiss präexistirt, sondern erst aus dessen Alkoholradicalen entsteht » (pag. 304).

Ma allora, egli stesso aggiunge, non si capisce « warum die in den Fetten reichlicher vorhandenen Alkoholradikale hierzu nicht befähigt sein sollten ».

L'origine dello zucchero dall'albumina finalmente è dimostrata anche dal fatto che si può provocare un diabete florizinico nell'animale digiuno da molti giorni, oltre che da altri esperimenti (ved. a questo proposito: Gr. Lusk, *The elements of the Science of Nutrition,* Philadelphia and London, 1906, p. 71).

(³) J. von Liebig, *Ueber die Gährung, über die Quelle der Muskelkraft und über Ernährung.* Sitz.-ber. d. königl. baier. Akad. d. Wiss., II, 4, 1869.

(⁴) L. Hermann, *Untersuchungen über den Stoffwechsel der Muskeln, ausgehend vom Gaswechsel derselben.* Berlin, 1867.

(⁵) E. Pflüger. *Die Quelle der Muskelkraft.* Pflüger's Arch., L, 98, 1891; *Einige*

muscolare deriva da scissione della sola albumina; ma negli ultimi anni abbandonò questa opinione esclusiva, di fronte alle prove indiscutibili che sorgente mediata della forza muscolare possono essere tanto l'albumina, quanto i grassi o gli idrati di carbonio. Dalle importanti ricerche sul calore animale [1], resultò che, abolita l'azione dei nervi motorii, e quindi il tono muscolare, i processi di ossidazione e quindi la produzione di calore diminuiscono, onde Pflüger sostenne che il paradosso, consistente nel fatto che l'abbassamento della temperatura esteriore intensifica e l'innalzamento deprime la termogenesi, deve spiegarsi ammettendo un'influenza non diretta della temperatura sui tessuti, ma per il tramite del sistema nervoso, in via riflessa. D'altro canto, però, se nello elevare la temperatura esterna si va oltre i limiti dei poteri regolatori del sistema nervoso, anche negli omeotermi i processi di combustione aumentano nei tessuti, il che dimostra — e questo è un resultato importante delle ricerche di Pflüger — che in fondo la sostanza vivente reagisce in modo identico nei pecilotermi e negli omeotermi agli aumenti della temperatura [2], cioè con una intensificazione dei processi metabolici, e quindi che l'aumento della termogenesi determinato nei secondi dal freddo è una proprietà acquisita che permette di mantenere costante la temperatura del corpo.

Erklärungen betreffend meinen Aufsatz « Die Quelle der Muskelkraft » etc. ibidem, L, 330, 1891; ibidem, 396; *Unsere Kenntnisse über den Kraftwerth des Fleisches und der Eiweissstoffe,* ibidem, LXXIX, 537, 1900.

(1) E. Pflüger, *Ueber Temperatur und Stoffwechsel der Säugethiere.* Pflüger's Arch., XII, 282, 1876; *Ueber Wärmeregulation der Säugethiere,* ibidem, 333; *Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Respiration der Kaltblüter,* ibidem, XIV, 73, 1877 ecc.

Lavori fatti da altri nell'Istituto fisiologico di Bonn su questo argomento sono: H. Schulz, *Ueber das Abhängigkeitsverhältniss zwischen Stoffwechsel un Körpertemperatur bei den Amphibien.* Pflüger's Arch., XIV, 78, 1877; G. Colasanti, *Ueber den Einfluss der umgebenden Temperatur auf den Stoffwechsel der Warmblüter,* ibidem, pag. 92.

(2) Sebbene nel celebre lavoro del 1875 avesse giustamente notato che le sostanze organiche rimangono inalterate alla temperatura del corpo (loc. cit., pag. 300), nel discorso: « *Wesen und Aufgaben der Physiologie* » (Bonn, 1878) scrisse (pag. 5): « Die Wärme, welche der Chemismus in uns erzeugt, ist die Ursache der inneren Zersetzung, die Zersetzung veranlasst die Entstehung von Wärme, und diese bedingt wieder die Zersetzung und sofort in endlosem Reigen ». E più oltre aggiunge (pag. 6): « Weil nun fortwährend die Wärme die labile Substanz unseres Leibes zerlegt etc. ». Non si capisce come Pflüger potesse credere che il calore alla temperatura del corpo dei pecilotermi e anche degli omeotermi operasse per sè solo scissioni, pur ammettendo l'estrema labilità della sua « albumina vivente ». Non si capisce nemmeno come mai alla sua mente non balenasse l'idea dell'azione di fermenti non organizzati nei tessuti e nelle cellule. Ma egli era tutto preso dall'idea di una sostanza vivente spontaneamente disgregantesi e reintegrantesi, e agli enzimi non pensò affatto.

Nel lavoro del 1875, a pag. 328, si legge ancora: « Wo desshalb der Lebensprocess energisch ablaufen soll, ist wie bei den Warmblütern eine hohe Temperatur notwendig,

Sparsi per la lunga vita scientifica del fisiologo di Bonn, s'incontrano varii scritti d'indole filosofica, quali quello sull'« avvenire della filosofia » (1) del 1877, il discorso con cui nel 1878 inaugurò il nuovo istituto fisiologico (2), i due discorsi rettorali del 1889 e del 1890 sulle « manifestazioni generali della vita » (3) e sull'« arte di prolungare la vita dell'uomo » (4); ma ve ne sono poi molti altri, come i già citati sulle « ossidazioni organiche » e sulla « meccanica teleologica », dove la parte filosofica prevale sulla sperimentale; e in generale può dirsi di Pflüger, come dei più grandi scienziati, che il suo lavoro sperimentale è sempre guidato da un concetto filosofico e quasi sempre determinato da geniali intuizioni, e costantemente si trova inquadrato su uno sfondo di idee generali direttive. Giovanni Müller, di cui si vantava egli d'essere discepolo, ci ha insegnato, infatti, che la parte può essere compresa solo mediante il tutto, e che il generale vale assai più del particolare: come il Maestro, rimase egli sempre, nell'indagine speciale, a contatto con l'intera natura vivente (5).

In una (6) delle tante polemiche, che egli sostenne sempre con fervore tale da far credere che egli si sentisse quasi investito della missione di scendere in campo a difesa della verità conculcata, affermò, contro Hoppe-Seyler (7), il concetto unitario della Fisiologia, di questa scienza della materia vivente, che egli disse l'anima della medicina scientifica (8), e di cui proclamò l'in-

---

welcher die Zersetungen proportional sind. Die Wärme ist also die Ursache des Lebens und nicht, wie man gewöhnlich die Sache ansieht, nur die Folge. Es ist ganz vergleichbar der brennenden Kohle, deren Wärme durch den Brand zwar erzeugt wird, ihn aber auch erst ermöglicht ». Questi concetti oggi sono riconosciuti come inesatti.

Nel lavoro: *Ueber die Phosphorescenz verwesender Organismen* (Pflüger's Arch. XI, 230), accenna ai « fermenti viventi », e avendo veduto che le sostanze « welche Gährungen und Fäulniss vernichten durch Tödtung der lebendigen Fermente » annientavano anche la fosforescenza, conchiude: « So liegt die Vermuthung nahe, dass das Leuchtende lebendige Materie sei, wie ich das bereits früher ausgesprochen habe ».

Infatti egli aveva detto (Pflüger's Arch. X, 289): « Da es sich aber um reizbares Eiweiss handelt, um lebendiges Eiweiss, so werden wir nicht fehlgehen, wenn wir die Leuchtmaterie für *Protoplasma* halten, was ja für einzelne Fälle sicher bewiesen ist ».

Come si vede, quindi, egli non faceva distinzione fra protoplasma e fermenti nei tessuti viventi; il concetto di enzima endocellulare distinto da sostanza vivente non era ancor sorto.

(1) E. Pflüger, *Die Physiologie und ihre Zukunft.* Pflüger's Arch, XV, 361, 1877.

(2) E. Pflüger, *Wesen und Aufgaben der Physiologie. Rede.* Bonn, 1878 (Pflüger's Arch, XVIII, 427, 1878).

(3) E. Pflüger, *Die allgemeine Lebenserscheinungen. Rectoratsrede.* Bonn, 1889.

(4) E. Pflüger, *Ueber die Kunst der Verlängerung des menschlichen Lebens. Rectoratsrede.* Bonn, 1890.

(5) E. Pflüger, *Wesen und Aufgaben* etc. pag. 15.

(6) E. Pflüger, *Die Physiologie und ihre Zukunft.* Pflüger's Arch., XV, 361, 1887.

(7) F. Hoppe-Seyler, *Vorwort.* Zeitschr. f. physiol. Chem., I, S. I-III, 1877-78.

(8) Meritano di essere riportate le parole con le quali Pflüger conchiudeva il « Pro-

dipendenza accanto alla fisica e alla chimica; e dimostrò che una divisione di essa in fisica e in chimica (¹) fisiologica, non solo è filosoficamente inammissibile e praticamente inattuabile, ma anzi che il fisiologo per intraprendere lo studio del processo vitale, che è il suo còmpito, deve essere nel tempo stesso versato nella fisica, nella chimica e nella morfologia, e inoltre possedere coltura matematica e mente filosofica, tali e tante sono le discipline con le quali la fisiologia deve entrare in intimi rapporti.

E tale fu Pflüger. La sua mente fu capace delle più sottili abilità tecniche e delle più vaste concezioni teoriche; e nei suoi scritti, mentre l'acume della critica e il rigore del ragionamento logico svelano il suo intelletto matematico, le geniali intuizioni e la disposizione dello spirito a un teleologismo castigato, e, contrariamente a quello di tanti altri, operoso, ci mostrano l'ammiratore e lo studioso di Aristotele.

Dall'anno 1853, in cui egli pubblicò la prima sua Memoria, a questo scorso mese di gennaio, in cui, più che ottantenne, dette alla stampa l'ultimo lavoro *Sulle sostanze madri del glicogeno*, in quel suo Archivio che, fondato nel 1868, è ora al 131° volume, il suo cervello e le sue braccia furono infaticabilmente applicate a un lavoro durato per quasi sessant'anni: esempio raro nella storia delle scienze, e però degno d'essere additato come

---

spectus » con cui inaugurava il suo *Archiv für die gesammte Physiologie des Menschen und der Thiere* (vol. I, 1868): « Die Physiologie ist in der That die Seele und die fruchtbringende Zukunft der wissenschaftlichen ausübenden Heilkunde. Denn sie ermittelt die Bedingungen für den Ablauf der tausendfältigen in den Organen unseres Körpers geschehenden Processe. Je genauer diese Bedingungen gekannt sind, desto sicherer wird die Rechnung des wissenschaftliches Arztes, desto erfolgreicher sein Handeln sein. Die nahen Beziehungen, in denen die Physiologie zu den Naturwissenschaften steht, müssen endlich noch das Interesse der Physiker, Chemiker, Zoologen und Botaniker in Ansspruch nehmen und ich bin überzeugt, dass auch die reinen Philosophen der Wissenschaft des Lebendigen ihre Theilnahme immer mehr und eingehender zuwenden werden. Bonn den 1. Mai 1868 ».

I 131 volumi dell'Archivio, fino ad oggi pubblicati, stanno a dimostrare quanto i desiderii e i voti espressi dal benemerito suo fondatore siansi realizzati.

(¹) « Die Physiologie — egli scrisse (*Wesen und Aufgaben* etc., pag. 10) — ist in Wahrheit:

die Chemie und Physik der lebendigen Materie ».

Ma vi sono poi problemi, egli aggiunge, a risolvere i quali « keine chemische oder physikalische Untersuchung » è sufficiente. Per essi, « nur die Descendenztheorie liefert uns an der Stand der vergleichende Anatomie den Schlüssel des Verständnisses ». È necessaria, dunque, anche l'indagine morfologica comparata. Ma non basta. « Damit ich endlich — prosegue — unter den Aufgaben der Physiologie die schwerste und höchste nicht vergesse, liegt ihr ob, Rechenschaft abzulegen über die materiellen Voraussetzungen der Seelenthätigkeit, wodurch sie mit der Philosophie in die innigste Beziehungen tritt » (loc. cit., pag. 11).

modello alla gioventù presente, di una vita operosa consacrata, con fervore religioso, al culto della Fisiologia [1].

MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

Bernini A. *Contributo allo studio delle velocità degli joni di fiamma.* Pres. a nome del Socio Righi.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. Viola, relatore, a nome anche del Socio Struever, legge una Relazione sulla Memoria del dott. A. Rosati, avente per titolo: *Contributo allo studio cristallografico dell'Idocrasio del Vesuvio*; la Relazione conclude col proporre la inserzione di questo lavoro nei volumi accademici.

Le conclusioni della Commissione esaminatrice sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Grassi presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando fra queste un lavoro del Corrisp. Silvestri: *Contribuzioni alla conoscenza degli insetti dannosi o dei loro simbionti. I. Galerucella dell'olmo;*

[1] Nella Necrologia di Pflüger scritta da Cyon (loc. cit.), trovo un particolare della vita intima del grande Fisiologo, che merita di essere ricordato. Pflüger credeva in Dio, anzi « machte auch aus seinem Gottesglauben kein Hehl » (pag. 17): credeva in Dio come il grande fisico Hertz, come Helmholtz e tanti altri sommi.

Cyon riproduce poi (pag. 18) quel che della religiosità di Pflüger a lui scriveva « eine ihm (a Pflüger) nahestehende Persönlichkeit von hoher Bildung und Intelligenz », e che anch'io voglio riferire: « Er hatte ein festes Gottvertrauen, einen starken Glauben an eine höchste Intelligenz. Er war begeistert für den strengen Monotheismus und achtete hoch die Lehren der christlichen Kirche, ohne sich an Dogma zu klammern, oder den Kirchenbesuch für unentbehrlich zu halten. Gegen Andersgläubige zeigte er eine edle Toleranz, achtete ihre religiösen Gefühle und nahm Rücksicht darauf. Gott hat ihn lieb gehabt, denn er hat Ihm, der ewigen Wahrheit, in Treue gedient. Sein Leben in seiner sittlichen Reinheit, nur ausgefüllt von Arbeit und Nächstenliebe, war ein Gottesdienst ».

Considerata la teoria di Pflüger sulla creazione spontanea della sostanza vivente, e quindi della vita, sulla terra, sotto l'influenza di forze esclusivamente fisiche e chimiche, per conciliare con queste idee i sentimenti religiosi di lui, bisogna ammettere per lo meno che il concetto che egli ebbe di Dio fosse molto diverso da quello inerente a qualsiasi religione positiva.

il vol. 3° degli *Annali* della R. Stazione chimico-agraria sperimentale di Roma, diretta dal prof. AMPOLA; e l'opuscolo: *Le prix Nobel en 1907.*

Il Presidente BLASERNA annuncia che il Comandante RONCAGLI fa omaggio alla R. Accademia dei Lincei del suo recente studio sul *Premio di traffico*, in due fascicoli sui quali quello studio è stato svolto. Nel primo (*N. Antologia*) l'autore ha trattato l'argomento in modo da renderlo accessibile al pubblico in generale, escludendo quindi la trattazione analitica di alcune parti; il secondo (*Riv. Maritt.*) è invece dedicato ai tecnici e in generale a coloro che sono in grado d'intendere il linguaggio simbolico dell'analisi matematica. Quest'ultimo è anche più completo, perchè contiene la dimostrazione della possibilità pratica di applicare i principi adottati, ed anche qualche esempio di applicazione.

Il PRESIDENTE richiama l'attenzione dell'Accademia su questi due opuscoli che trattano con molta competenza argomenti di grande interesse ed attualità.

Il Socio VOLTERRA fa omaggio, a nome dell'autore ing. LUIGGI, di varie pubblicazioni che trattano di studî teorici e tecnici di matematica, o di costruzioni marittime, rilevandone i pregi.

E. M.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

RELAZIONI DI COMMISSIONI

PRESENTAZIONI DI LIBRI

ERRATA-CORRIGE

A pag. 443 linea 1ª, invece di « *Se il corpo ruota intorno* ecc. » legg.: *Se il corpo ruota con velocità angolare costante intorno* ecc. ».

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 1º maggio 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

Segue in terza pagina.

(*) Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*
(**) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 22 maggio 1910.* **N. 10.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 maggio 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 10°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz' altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto, è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 maggio 1910.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Chimica. — *Azioni chimiche della luce*. Nota XVII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

Anche questa Nota, come la XV, tratta di esperienze che avevamo incominciato molti anni addietro e che ora abbiamo ripreso. Già nella nostra prima Nota [1] avevamo accennato che il *benzofenone*, come il chinone, è un composto che per azione della luce subisce con la massima facilità un processo di riduzione e che non è solamente l'alcool ma molte altre sostanze organiche che lo trasformano in benzopinacone. Più tardi, nella nostra quinta comunicazione [2], riprendendo la ricerca, l'abbiamo estesa anche agli idrocarburi ed abbiamo trovato che col cimolo il benzofenone si trasforma del pari in benzopinacone, aggiungendo che per scoprire l'alterazione patita dal cimolo era necessario ripetere l'esperienza su più larga scala. Recentemente di questi studî si è occupato anche il prof. Paternò ed in quanto segue metteremo in evidenza i suoi risultati comparandoli coi nostri.

Benzofenone e Cimolo. — Alla luce venne esposta una soluzione di 50 gr. di benzofenone in 50 di *p*-cimolo, durante il periodo estivo autunnale. Si ritrova il tubo riempito di cristalli. Questi che sono formati, come era da aspettarsi dalla nostra prima esperienza, da *benzopinacone*, furono

[1] Questi Rendiconti, vol. 10, I, pag. 98 (1901).
[2] Ibid. vol. 12, I, pag. 238.

raccolti su filtro e lavati con etere petrolico; se ne ebbero 33 gr. Il liquido filtrato (64 gr.), alquanto viscoso, venne distillato in corrente di vapore: da principio passa un olio formato prevalentemente dal cimolo, ma poi le goccioletta oleose si cominciano a solidificarsi. Raccolto su filtro, liberato dall'olio aderente su piastra assorbente e poi cristallizzato dall'alcool, questo prodotto si presenta in pagliette fondenti a 159° che hanno la composizione

$$C_{20} H_{26}.$$

Esso sarà un *diciminile*. Cannizzaro e Rossi (1) ottennero un diciminile dall'alcool cuminico, che naturalmente non possiamo dire se identico al nostro.

Ma la parte maggiore di questo idrocarburo è contenuta nel residuo della distillazione con vapore, che ha l'aspetto resinoso.

Distillando a sua volta questa massa (35 gr.) alla pressione di 12 mm., passa prima intorno a 173° una materia oleosa, ma poi una parte che si solidifica. Questa, liberata dall'olio e purificata dall'alcool, si mostrò identica al prodotto già descritto.

Dalla parte oleosa, non ci fu possibile ottenere altre sostanze all'infuori del benzofenone, che venne separato per mezzo del semicarbazone. Il prof. Paternò (2), che ripetè anche egli la nostra vecchia esperienza non ebbe il diciminile forse perchè operò su di una troppo piccola quantità di materia prima, ma poi che egli si ripromette di ritornare sull'argomento gli abbandoniamo volentieri l'ulteriore studio dei prodotti che si formano in questa reazione.

Resta stabilito per ora soltanto che il cimolo agendo alla luce col benzofenone lo riduce in parte a benzopinacone, trasformandosi in diciminile.

Benzofenone e toluolo. — Il miscuglio esposto alla luce conteneva 30 gr. di benzofenone sciolti in 45 gr. di toluolo. Durante l'esposizione nei mesi di estate-autunno, si erano depositati in grande quantità i cristalli del *benzopinacone*, che vennero separati per filtrazione e trattamento con etere petrolico (15 gr.). Il filtrato alquanto viscoso, fu distillato a vapore, raccogliendo separatamente le prime porzioni, che sono formate prevalentemente dal toluolo rimasto inalterato; le ultime invece si solidificano in parte. Raccolte su filtro e liberate su piastra porosa dall'olio aderente costituivano una materia solida, che fondeva a circa 28°. Essa conteneva però del benzofenone trascinato anche esso dal vapore. Per eliminarlo lo abbiamo trasformato nel suo semicarbazone: la parte solida venne trattata a questo scopo in soluzione acetica con cloridrato di semicarbazide ed acetato sodico; versando poi il tutto nell'acqua, si separò una sostanza oleosa, che dopo qualche

(1) L. Annalen, vol. 121; pag. 251.
(2) Paternò e Chieffi, Gazz. chimica, 39, II, pag. 429.

tempo divenne cristallina; seccata nel vuoto ed estratta ripetutamente a freddo con etere, rimase indietro una polvere che purificata dall'alcool venne riconosciuta pel semicarbazone del benzofenone (p. f. 168°). La parte asportata dall'etere e purificata dall'alcool fondeva a 52°. Essa aveva la composizione

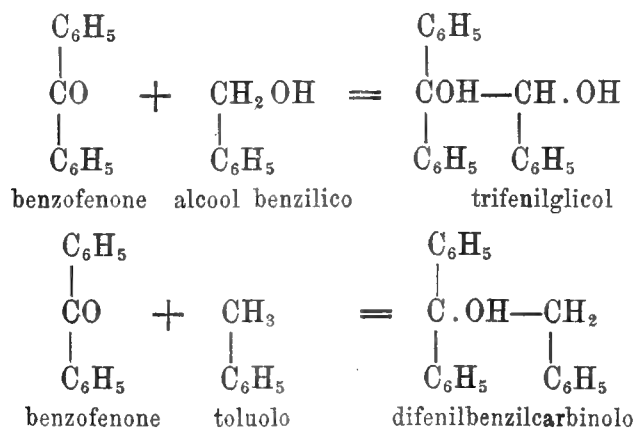
$$C_{14}H_{14}$$

È assai probabile che questo idrocarburo sia identico al *dibenzile* scoperto pure da Cannizzaro e Rossi [1], pel quale questi autori dànno il punto di fusione 51,5-52°,5.

Il residuo della distillazione è una materia resinosa (20 gr.) che ripresa con etere e, dopo eliminato questo, umettata con alcool metilico a poco a poco cristallizza. Essa venne digerita a freddo con etere petrolico, che ne asportò la parte resinosa, ed il residuo (10 gr.) purificato dall'etere petrolico bollente. Si ottennero così prismetti raggruppati, che fondevano a 88-89°; a 11 mm. la sostanza bolle senza scomporsi a 222°. Essa è il *difenilbenzilcarbinolo* [2] che in questa reazione è stato ottenuto anche dal prof. Paternò [3] col punto di fusione 79-82°.

Come si vede l'azione del toluolo sul benzofenone corrisponde a quella di quest'ultimo sull'alcool benzilico da noi descritta nella nostra quinta Nota [4]. Anche in questo caso il benzofenone viene in parte ridotto a benzopinacone, ma si forma inoltre un prodotto di addizione: il trifenilglicol di Gardeur.

$$\underset{\text{benzofenone}}{\begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{array}} + \underset{\text{alcool benzilico}}{\begin{array}{c} CH_2OH \\ | \\ C_6H_5 \end{array}} = \underset{\text{trifenilglicol}}{\begin{array}{cc} C_6H_5 & \\ | & \\ COH— & CH.OH \\ | & | \\ C_6H_5 & C_6H_5 \end{array}}$$

$$\underset{\text{benzofenone}}{\begin{array}{c} C_6H_5 \\ | \\ CO \\ | \\ C_6H_5 \end{array}} + \underset{\text{toluolo}}{\begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ C_6H_5 \end{array}} = \underset{\text{difenilbenzilcarbinolo}}{\begin{array}{cc} C_6H_5 & \\ | & \\ C.OH— & CH_2 \\ | & | \\ C_6H_5 & C_6H_5 \end{array}}$$

A questo tipo appartengono anche le altre reazioni studiate dal prof. Paternò, di alcune delle quali diremo più avanti, e cioè la formazione dei prodotti che si ottengono dal benzofenone rispettivamente coll'etilbenzolo,

(1) L. Annalen, vol. 121, pag. 250 e Beilstein II, 232 e Ergängüns band II, 112.

(2) Vedi C. Hell e Fr. Wiegandt, che danno il p. f. 88-89° corrispondente al nostro. Berichte, 37, pag. 1430.

(3) loc. cit.

(4) Questi Rendiconte, vol. 12, II, pag. 235 e Gazzetta chimica 34, II, pag. 132.

col propilbensolo, colpa raxilolo, col difenilmetano, coll'acido α-toluico [1], che nel caso più semplice corrispondono all'azione dell'acetone sull'alcool metilico da noi recentemente descritta [2]. Anche il prodotto di addizione ottenuto dal Benrath [3] dalla chinaldina e l'aldeide benzoica si forma per un simile processo. Non ci sembra però giustificato il concetto che più o meno chiaramente traspare dalle recenti pubblicazioni del prof. Paternò, che cioè le reazioni fotochimiche da lui descritte siano essenzialmente diverse dalle nostre.

Benzofenone ed etilbenzolo. — Alla luce venne esposta una soluzione formata da 45 gr. di benzofenone e 70 di etilbenzolo, che fu elaborata in modo analogo al caso precedente. Si separarono 22 gr. di benzopinacone. La parte liquida distillata con vapore acqueo dette oltre all'etilbenzolo inalterato, un prodotto solido, che purificato dall'alcool si presentò in grossi cristalli fondenti a 128-129°. Esso è l'idrocarburo.

$$C_{16}H_{18}$$

ottenuto dal prof. Paternò [4] pel quale dà il punto di fusione 124-125°.

Della parte che resta indietro, col trattamento già descritto, abbiamo separato il prodotto d'addizione

$$C_{13}H_{10}O + C_8H_{10} = C_{21}H_{20}O\,,$$

che è stato pure osservato dal prof. Paternò. Egli dà per questo corpo il punto di fusione 87-90°; il nostro prodotto fonde a 88-90°, e bolle, alla pressione di 11 mm. a 226°. Si presenta, purificato dall'etere petrolico, in cristalli bene sviluppati, che furono misurati del prof. G. Boeris. Egli ci comunica gentilmente i risultati di cui diamo qui le costanti e gli angoli fondamentali:

Sistema cristallino: monoclino

$$a : b : c = 1,8207 : 1 : 0,6671 \qquad \beta = 86^\circ\, 11'$$

Forme osservate: {110} {001} {011} {211} {$\bar{2}$11}

(110) : ($\bar{1}$10)	57° 15′-57° 44′	57° 33′	32
(011) : (011)	33 22 -33 55	33 39	12
(001) : (110)	87 41 -88 27	88 10	14

Anche noi riteniamo che questo corpo sia un carbinolo, di cui però in considerazione delle ricerche del prof. Paternò non abbiano studiato ulteriormente la costituzione; diremo soltanto che per riscaldamento in tubo a 300°

[1] loc. cit. e Rendiconti Soc. chimica italiana, II, vol. 1, pag. 301.

[2] Questi Rendiconti, vol. 19, II, pag. 364.

[3] Journal für practische Chemie N. F. vol. 73, pag. 384.

[4] loc. cit.

esso si scinde in parte nei componenti, ma dà inoltre un idrocarburo cristallizzato in tavole rombiche, dal punto di fusione 88°, che ha la composizione

$$C_{21}H_{20}O - H_2O = C_{21}H_{18}.$$

Benzofenone e paraxilolo. — La soluzione di 70 gr. di benzofenone in 100 di paraxilolo esposta durante i mesi estivo-autunnali, si comporta come la precedente. Abbiamo anche qui separato in notevole quantità (61 gr.) il benzopinacone. La parte liquida dà in corrente di vapore un distillato, in cui è contenuto un idrocarburo della formola

$$C_{16}H_{18},$$

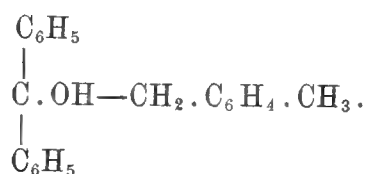
che, purificato dall'alcool metilico, si presenta in squamette fusibili a 82-83°; prodotto pure ottenuto dal prof. Paternò col punto di fusione 85-86°. Esso è identico, come egli fa giustamente osservare, al *dimetildibenzile* di Moritz e Wolffenstein [1].

Il residuo della distillazione con vapore acqueo, d'aspetto resinoso, subì lo stesso trattamento quale venne descritto pel prodotto che si ha col toluolo, cioè prima con alcune goccie di alcool metilico e poi, sempre a freddo, coll'etere petrolico. La resina si scioglie in parte in quest'ultimo e resta indietro una polvere bianca, che, purificata ripetutamente dall'etere petrolico bollente, si trasforma in una sostanza cristallizzata in rosette, fusibili a 113°. Distillata alla pressione di 24 mm., bolle a 258-260° e fonde a 113°.

La sua composizione corrisponde anche in questo caso a quella di un prodotto d'addizione

$$C_{13}H_{10}O + C_8H_{10} = C_{21}H_{20}O.$$

La sua costituzione dovrebbe esser la seguente, in analogia coi fatti finora accertati:

$$\begin{array}{l} C_6H_5 \\ | \\ C.OH-CH_2.C_6H_4.CH_3. \\ | \\ C_6H_5 \end{array}$$

Ma noi non intendiamo insistere ulteriormente su questo argomento.

Acetone e toluolo. — Per ultimo accenneremo che anche l'acetone agisce alla luce col toluolo, lo studio in proposito non è però esaurito. Abbiamo esposto una soluzione di 58 gr. di acetone in 92 di toluolo durante i mesi di estate ed autunno. Il prodotto venne distillato prima a b. m. e poi a

[1] Questi autori dànno per il loro prodotto il punto di fusione 82°. Vedi Berichte 32, 2532.

pressione ridotta. Resta indietro un residuo che dopo qualche tempo in parte cristallizza.

La parte volatile alla pressione di 35 mm. è formata precipuamente da toluolo bollente a 111°.

Il residuo venne liberato su piastra porosa dall'olio aderente e purificato dall'alcool. Si ebbero laminette fusibili a 52° della composizione del *dibenzile*, $C_{14}H_{14}$.

In questa ricerca siamo stati aiutati dal dott. Luigi Vecchiotti a cui porgiamo i nostri ringraziamenti.

Chimica. — *Azione dei nitroso derivati sui composti non saturi* [1]. Nota del Corrispondente A. Angeli, del dott. Luigi Alessandri e Raffaello Pegna.

Ancora qualche anno addietro venne accennato che la biossiammoniaca [2] al pari degli altri composti che l'azoto forma con l'idrogeno e con l'ossigeno può reagire anche sulle sostanze contenenti legami multipli.

Dobbiamo però subito dire che nello studio ulteriore di queste reazioni abbiamo incontrato delle difficoltà, le quali dipendono dalla natura dei prodotti che si formano ed in parte anche dal prezzo elevato delle sostanze che a tale scopo sono necessarie.

Per tale motivo, allo scopo di orientarci, in modo almeno approssimato, sull'andamento probabile della reazione ci siamo decisi ad eseguire alcune esperienze preliminari col nitrosobenzolo, il quale si può riguardare come l'etere fenico nella sua forma anidridica:

$$C_6H_5 . NO \qquad H . NO$$

e con la quale anche in altre trasformazioni presenta una notevole analogia di comportamento.

Il caso ha voluto che le nostre previsioni ricevessero una conferma prima ancora che ci decidessimo alla scelta dei composti non saturi che dovevano formare l'argomento dei nostri studî. Avendo infatti preparato alcuni grammi di nitrosobenzolo lo racchiudemmo in un tubo da saggio con un tappo di gomma elastica; dopo qualche giorno il tappo si è rammollito ed in seguito divenne semifluido tanto da colare sul nitrosobenzolo sottostante. In seguito alle belle ricerche di Harries, la gomma elastica deve venir considerata come un composto contenente doppî legami: e come a suo tempo dimostrerà meglio

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica farmaceutica del R. Istituto di Studî Superiori in Firenze.

[2] Memorie Lincei (1905), pag. 83.

uno di noi, la sostanza da noi ottenuta è da considerarsi come un prodotto di azione del nitrosobenzolo sulla gomma elastica e precisamente sui doppî legami che in essa sono presenti.

Notati questi fatti, prendemmo in esame il comportamento di alcuni composti non saturi di natura più semplice e più facilmente accessibili e come tali scegliemmo i derivati allilici e propenilici: anetolo, isosafrolo, safrolo e l'etere etilico dell'eugenolo. Nei due primi il nitroso benzolo si scioglie lentamente per dare liquidi bruni, densi da cui finora non ricavammo prodotti definiti. Negli altri invece a catena laterale allilica la reazione procede in modo del tutto diverso: sciogliendo infatti nitrosobenzolo nel safrolo e riscaldando anche lievemente a bagno maria, essa diviene talmente violenta da porre il liquido in ebullizione. Se però si opera a freddo ed al riparo dalla luce, allora il nitrosobenzolo lentamente si scioglie colorando il liquido nel solito color verde caratteristico, ma prima ancora che il nitroso derivato sia scomparso si vedono apparire altri cristalli aghiformi: la loro quantità va aumentando, tanto che dopo qualche giorno il tutto si è rappreso in una massa cristallina semisolida.

Il prodotto che per tal modo si ottiene si presenta in cristalli colorati intensamente in giallo e all'analisi fornì numeri che conducono alla seguente composizione e grandezza molecolare:

$$C_{16}H_{13}NO_3 .$$

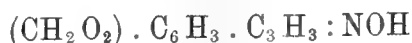
Esposto alla luce assume rapidamente un colore rosso bruno ed allora si sviluppa nitrosobenzolo [1]. Contemporaneamente si formano piccole quantità di carbilammine che vennero riconosciute dal loro odore caratteristico. La sostanza fornisce nitrosobenzolo anche per azione dei mezzi ossidanti: questo fatto dimostra che nel nuovo composto l'atomo di azoto è sempre unito direttamente al suo atomo di ossigeno.

Ossidato con permanganato di potassio in soluzione alcalina fornisce acido piperonilico: ciò prova, come era facilmente prevedibile, che il nucleo aromatico non prende parte alla reazione.

Per azione degli acidi minerali diluiti il composto viene trasformato in un isomero, solubile negli idrati alcalini: evidentemente si tratta di una migrazione dell'atomo di ossigeno dall'azoto al carbonio, analoga a quella che si compie nella trasformazione della fenilidrossilammina a p. amminofenolo: e ciò trova una conferma nel fatto che l'isomero per azione del clo-

[1] Dalle nostre osservazioni risulta che questo è un carattere generale degli eteri N-fenilici delle ossime. Il derivato che si ottiene dall'aldeide cinnamica e che venne descritto (Plancher e Piccinini, Questi Rendiconti (1905), vol. 14, II, pag. 36) sotto forma di sostanza che facilmente si altera, si conserva invece perfettamente quando venga tenuto al riparo della luce. Ci riserbiamo di studiare i prodotti che si formano assieme al nitrosobenzolo.

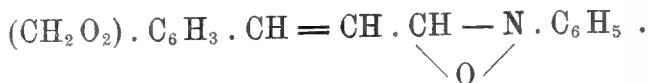
ruro di benzoile fornisce subito l'etere dibenzoilico del p. amminofenolo: questo isomero deve venire dunque considerato come una base di Schiff; esso però dagli acidi viene idrolizzato con grande difficoltà e solamente in piccolissima parte; tanto che per questo mezzo riuscimmo ad avere soltanto minime quantità di un prodotto un po' volatile in corrente di vapore, non azotato. In maggior copia riuscimmo a prepararlo da un'ossima:

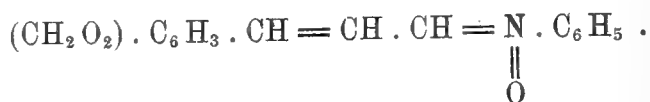
$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . C_3H_3 : NOH$$

che si forma per azione dell'idrossilammina sul composto giallo primitivo. Nel liquido, in cui si è formata, facendo passare una corrente di vapore si ottiene anilina. In tal modo lo stesso residuo azotato si è potuto staccare sotto tre diverse forme: nitrosobenzolo, p. amminofenolo ed anilina. Questa ossima, in soluzione alcoolica, scolora immediatamente il permanganato e per ciò deve contenere un doppio legame nella catena laterale: per azione dell'acido nitroso sviluppa protossido di azoto e fornisce il composto non azotato identico a quello cui ora abbiamo accennato. Il prodotto così ottenuto, come si vedrà più avanti, si deve considerare come un'aldeide che non può essere che la seguente:

$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . CH = CH - CHO \ .$$

Essa fonde nettamente a 84°; la stessa è stata descritta tempo addietro da Ladenburg [1], che le assegna il punto di fusione 70°. Nel dubbio che si trattasse di uno stereoisomero, ripetemmo l'esperienza di Ladenburg ed arrivammo ad un prodotto che presenta gl'identici caratteri di quello da noi preparato. Evidentemente la sua sostanza conteneva piccole quantità di piperonalio.

In base a questi risultati si affacciò subito l'idea che il prodotto ottenuto per azione del nitrosobenzolo sul safrolo fosse da considerarsi come un etere fenilico dell'ossima cui viene generalmente assegnata la struttura:

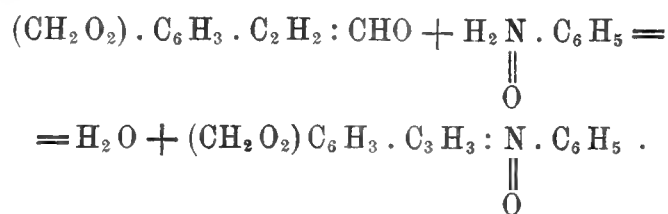
$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . CH = CH . \underset{\diagdown O \diagup}{CH - N} . C_6H_5 \ .$$

Ovvero più probabilmente, come ha dimostrato lo scorso anno uno di noi [2]

$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . CH = CH . CH = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_5 \ .$$

Se la nostra ipotesi era giusta, allo stesso prodotto si doveva arrivare anche col metodo di sintesi generale che serve a preparare queste sostanze: infatti facendo reagire l'aldeide da noi ottenuta sopra la fenilidrossilammina

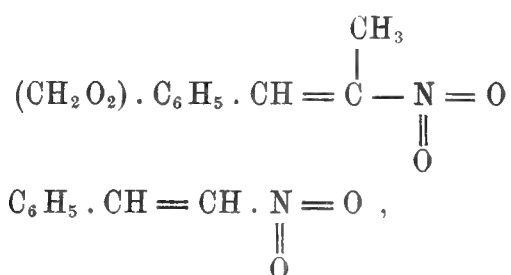
(1) Berliner Berichte, XXVII, 3°, 2958.
(2) Questi Rendiconti (1909), vol. XVIII, 2° sem., pag. 40.

si ha un composto identico a quello preparato per l'altra via: molto probabilmente la fenilidrossilammina in questo caso reagisce nella forma tautomera di ossido:

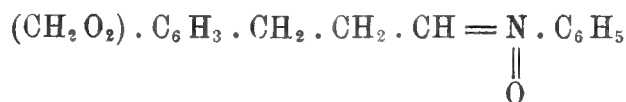
$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . C_2H_2 : CHO + \underset{\overset{\|}{O}}{H_2N} . C_6H_5 =$$

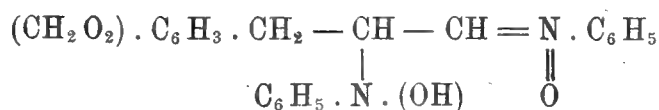
$$= H_2O + (CH_2O_2)C_6H_3 . C_3H_3 : \underset{\overset{\|}{O}}{N} . C_6H_5 .$$

Anche il color giallo che presenta questa sostanza sta in buona armonia con la formula da noi proposta e senza dubbio è dovuto alla presenza di più doppî legami nella molecola. Anche i nitroderivati p. e.:

$$(CH_2O_2) . C_6H_5 . CH = \overset{\overset{CH_3}{|}}{C} - \underset{\overset{\|}{O}}{N} = O$$

$$C_6H_5 . CH = CH . \underset{\overset{\|}{O}}{N} = O ,$$

sono colorati in giallo intenso, mentre, come è noto, sono incolori i corrispondenti derivati saturi; l'etere fenilico della benzaldossima è pure incoloro.

Riguardo al meccanismo di formazione del nuovo composto, si potrebbe ammettere che in una prima fase si formi il prodotto saturo:

$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . CH_2 . CH_2 . CH = \underset{\overset{\|}{O}}{N} . C_6H_5$$

ma poi non si comprende in qual modo e per quale ragione esso abbia da perdere due atomi d'idrogeno. Noi riteniamo invece più plausibile, il supporre che nella reazione il nitrosobenzolo prenda parte nella sua forma bimolecolare, in modo da dare origine dapprima al composto di addizione:

$$(CH_2O_2) . C_6H_3 . CH_2 - \underset{\underset{C_6H_5 . N . (OH)}{|}}{CH} - CH = \underset{\overset{\|}{O}}{N} . C_6H_5$$

il quale in una fase successiva, eliminando una molecola di fenilidrossilammina darebbe origine al prodotto da noi ottenuto. La fenilidrossilammina che si libera reagirà col nitrosobenzolo che è presente per formare azoossibenzolo: infatti come prodotto secondario si ottengono notevoli quantità di questo composto.

L'etere etilico dell'eugenolo si comporta in modo identico al safrolo.

Parte sperimentale.

Azione del nitrosobenzolo sul safrolo. — Si mescolano quantità equimolecolari di nitrosobenzolo e di safrolo; si lascia a sè all'oscuro tenendo immerso il recipiente nell'acqua per evitare possibili riscaldamenti: dopo quattro o cinque giorni si raccoglie sul filtro alla pompa la massa cristallina gialla-bruna formatasi, si lava bene con benzolo e poi si purifica cristallizzandola dall'alcool. Si ottiene così una bella sostanza gialla-dorata in cristalli aghiformi che fondono a 193°, pochissimo solubili in benzolo, poco in etere a freddo, poco in alcool anche all'ebullizione. A caldo gli alcali la decompongono, si scioglie per riscaldamento in acido solforico diluito con colorazione rossa-aranciata e per raffreddamento cristallizza una sostanza rossa che descriveremo in seguito. Il composto, purchè conservato all'oscuro, è molto stabile; seccato nel vuoto fornì i seguenti dati analitici:

I. gr. 0,1553 di sostanza, diedero gr. 0,4098 di CO_2 e gr. 0,0698 di H_2O.
II. gr. 0,2025 di sostanza, diedero cc. 9,1 di azoto a 12° e 766 mm.

In cento parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{16}H_{13}NO_3$
	I	II	
C	71,97	—	71,91
H	4,99	—	4,87
N	—	5,42	5,24

La determinazione crioscopica del peso molecolare della sostanza, usando come solvente l'acido acetico, dette i seguenti risultati:

	Concentrazione	Abbassamento	Peso molecolare	
			Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{13}NO_3$
I.	0,91	0°,13	273	267
II.	1,83	0°,26	274	"

Dal liquido in cui si è formato il composto si separa il safrolo inalterato distillando in corrente di vapore: insistendo nella distillazione si nota che ad un certo punto comincia a passare un olio giallo che cristallizza e vien riconosciuto per azoossibenzolo; dall'olio bruno residuo della distillazione si ottiene infatti una notevole quantità di azoossibenzolo, che, purificato dall'alcool, fonde a 36°.

gr. 0,1178 di sostanza, diedero cc. 14,1 di azoto a 13° e 765 mm

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_{10}NO_2$
N	14,38	14,14

Azione degli acidi minerali diluiti. — 4 gr. della sostanza gialla descritta si sciolgono in cc. 360 circa di acido solforico al 25 % bollente, si filtra per separare la soluzione da un po' di resina che si forma: per raffreddamento cristallizza un composto in fiocchi rossi; si raccoglie sul filtro alla pompa, si lava con poca acqua e si cristallizza ripetutamente da molto alcool. Fonde a 174°; sulla lamina di platino brucia mandando odore di prodotti solforati; disciolto in eccesso di acido cloridrico dà con soluzione di nitrato di bario un precipitato di solfato di bario: si tratta dunque di un solfato [1]. Si discioglie facilmente negli idrati alcalini con colorazione gialla; questa soluzione imbrunisce all'aria e con anidride carbonica dà un precipitato giallo ocra: evidentemente la base di Schiff che si libera. Onde prepararne una certa quantità pura per l'analisi, si stempera in un mortaio il composto rosso con soluzione di carbonato sodico fino a completa sparizione del color primitivo: la polvere gialla, che così si ottiene, si lava bene con acqua e cristallizzata diverse volte dallo xilolo si separa in cristalli massicci rossi-rubino, che fondono a 195°.

gr. 0,2010 di sostanza diedero cc. 9,2 di azoto a 19° e 764 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{13}NO_3$
N	5,38	5,24

Questa base di Schiff a differenza dell'isomero descritto è stabile anche alla luce solare diretta. In alcool è molto solubile, in benzolo si scioglie un poco all'ebullizione, nello xilolo è assai più solubile.

Azione del cloruro di benzoile sopra la base di Schiff. — Un poco di solfato si scioglie in eccesso di soda caustica al 10 % e si sbatte aggiungendo cloruro di benzoile fino a che se ne senta nettamente l'odore: il prodotto che si separa si bolle con alcool e si purifica cristallizzandolo dallo xilolo in cui è poco solubile anche a caldo e si ottengono così fini aghetti incolori che fondono a 229°.

I. gr. 0,1955 di sostanza diedero gr. 0,5414 di CO_2 e gr. 0,0863 di H_2O.
II. gr. 0,2225 di sostanza diedero cc. 9 a 15° e 754 mm.

In cento parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{20}H_{15}NO_3$
	I	II	
C	75,53	—	75,71
H	4,90	—	4,73
N	—	4,75	4,42

[1] Per altri sali colorati di basi di Schiff, cfr. Central Blatt, 1910, I, 1427 e Berliner Berichte, XVII, 2°, 2117.

Partendo da paramminofenolo e facendo reagire nelle stesse condizioni il cloruro di benzoile si è ottenuto un composto che possiede i medesimi caratteri fisici e che fonde alla stessa temperatura anche mescolato con quello ottenuto nel modo precedentemente descritto.

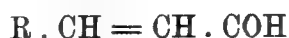
Ad una scissione idrolitica del tutto analoga per azione del cloruro di benzoile su di una base di Schiff arrivavano già Garzarolli e Thurnlack attraverso un prodotto d'addizione instabilissimo ottenendo dalla benzilidenanilina la fenilbenzammide (¹).

Azione degli acidi minerali sulla base di Schiff. — Sciogliendo a caldo il composto giallo (p. f. 193°) in acido solforico diluito, avevamo osservato che insistendo nell'ebullizione si separava un olio che presto si resinificava e nello stesso tempo si avvertiva un odore simile a quello del piperonal: onde separare il prodotto volatile che si formava si pose in 25 cc. di acido solforico 25 °/₀ gr. 1 di sostanza gialla (p. f. 193°) e si distillò in corrente di vapore: passarono prima poche goccie oleose e quindi delle pagliette bianche che fondevano a 82°; l'acqua con cui erano passate, estratta con etere, fornì un'altra piccola quantità dello stesso composto, ma pur insistendo a lungo nell'ebullizione e nella distillazione non se ne raccolsero in complesso che piccole quantità. La preparazione di questo prodotto, le sue proprietà e l'identificazione come aldeide biossimetilencinnamica saranno esposte in seguito. Dalla soluzione solforica, cristallizza per raffreddamento molto solfato inalterato: altrettanto stabile all'azione degli acidi trovò già Georg Peine l'anilide dell'aldeide cinnamica (²).

Azione dell'idrossilammina. — L'idrossilammina agisce con grande facilità, tanto in soluzione alcoolica e neutra, come anche in soluzione acetica. In tal modo si perviene ad un miscuglio di ossime: nel primo caso tre isomeri; nel secondo due. Evidentemente queste isomerie sono dovute in parte al gruppo isonitroso ed in parte al doppio legame prossimo al residuo aldeidico: in tal modo la teoria fa prevedere quattro forme delle quali finora ci fu possibile caratterizzarne tre che indicheremo coi nomi:

α-ossima	p. fus.	195°
β-ossima	»	191°
γ-ossima	»	155°

Crediamo che questo sia il primo caso in cui venne constatata tale isomeria per le aldeidi non sature:

$$R . CH = CH . COH$$

infatti dall'aldeide cinnamica finora ne vennero preparate solamente due.

(¹) Berliner Berichte, 32, II, 2277.
(²) Berliner Berichte, 17, II, 2118.

Facendo reagire il composto giallo con una molecola d'idrossilammina, una parte del prodotto rimane inalterato e perciò giudicammo opportuno impiegare un eccesso di reattivo; alla soluzione in alcool di gr. 2 del composto giallo si aggiunge una soluzione acquosa di gr. 0,7 di cloridrato d'idrossilammina e di gr. 0,6 di carbonato sodico. Si bolle a ricadere per un'ora, si evapora poi la maggior parte del solvente e si aggiunge eccesso d'acqua; il precipitato che si forma si raccoglie sul filtro, si lava con acqua: il filtrato è torbido ed all'aria manda odore di nitrosobenzolo probabilmente perchè tien disciolto fenilidrossilammina: nell'olio che si separa si riscontra l'anilina. Il prodotto separato si scioglie in poco alcool e la massa cristallina, che si ottiene per raffreddamento, si purifica dal benzolo. Il composto è in aghi sottilissimi, allungati, splendenti, che fondono a 195°; poco solubile in benzolo anche a caldo; un po' più solubile in alcool bollente.

gr. 0,0858 di sostanza diedero cc. 5,5 di azoto a 18° e 763 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_9NO_3$
N	7,55	7,33

In seguito vennero fatte reagire una molecola del prodotto e tre d'idrossilammina: alla soluzione alcoolica di gr. 2 di questo si aggiunge una soluzione acquosa di gr. 6 di cloridrato d'idrossilammina e di gr. 4,5 di carbonato sodico; il liquido subito si decolora e per leggero riscaldamento si ha un abbondante svolgimento di gas (protossido d'azoto); si bolle poi a ricadere per un'ora, si distilla la maggior parte dell'alcool e s'aggiunge eccesso d'acqua: il filtrato, reso alcalino, e dopo aggiunta di biossido di manganese per distillazione in corrente di vapore fornisce anilina. Il prodotto cristallino che si ottiene è una mescolanza di due ossime, che si lascian separare assai bene per la loro diversa solubilità in alcool. La meno solubile, purificata dall'alcool si presenta in pagliette madreperlacee che fondono a 191°, pochissimo solubile in benzolo.

I. gr. 0,1598 di sostanza diedero gr. 0,3675 di CO_2 e gr. 0,0698 di H_2O.
II. gr. 0,1894 di sostanza diedero cc. 12,2 di azoto a 19° e 766 mm.

In cento parti:

	Trovato		Calcolato per $C_{10}H_9NO_3$
	I	II	
C	62,72	—	62,83
H	4,85	—	4,71
N	—	7,59	7,33

L'ossima più solubile in alcool si purifica dal benzolo: si presenta in aghetti corti lievemente colorati che fondono a 155°.

gr. 0,0780 diedero cc. 5,2 di azoto a 20° e 752 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_9NO_3$
N	7,68	7,33

Per azione del cloruro di benzoile questa ossima dà un prodotto, che è identico al *derivato benzoilico* che si forma anche partendo dalla β-ossima. Evidentemente durante l'azione del reattivo è avvenuta anche la trasformazione di una forma nell'altra. Purificato dall'alcool fonde a 175°.

gr. 0,1660 diedero cc. 7 di azoto a 19° e 753 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{17}H_{13}NO_4$
N	4,84	4,74

Un migliore rendimento in ossime si ha facendo agire l'idrossilammina in eccesso, col composto (p. fus. 193°) in soluzione acetica. A tale scopo gr. 5 di questo si sciolgono in acido acetico e vi si aggiunge una soluzione in acqua di gr. 3 di cloridrato d'idrossilammina e gr. 2 di carbonato sodico: si riscalda infine per completare la reazione. Per raffreddamento si ha subito un'abbondante cristallizzazione; si aggiunge acqua e separato per filtrazione il prodotto si trova che si è ottenuto un miscuglio delle due ossime, ossima β in prevalenza e ossima γ, del peso complessivo di gr. 3,6, con rendimento dunque addirittura quantitativo.

Tutti e tre questi composti ottenuti per azione dell' idrossilammina dànno le reazioni delle ossime; si sciolgono in alcali e riprecipitano per aggiunta di acidi; bollite con acido solforico diluito dànno una soluzione torbida in cui si riscontra la presenza d'idrossilammina; durante l'ebullizione si svolge l'odore caratteristico dell'aldeide biossimetilencinnamica. Però la scissione idrolitica con acidi forti di queste ossime non si presta a preparare l'aldeide con buon rendimento, sia perchè queste sostanze sono molto stabili sia perchè l'aldeide in ambienti fortemente acidi si polimerizza con grande facilità. Migliori risultati invece si ottengono per:

Azione del nitrito d'amile sulle ossime. - Aldeide biossimetilencinnamica. — Si prendono gr. 3,6 di un miscuglio delle due ossime greggie (p. fus. 155° e 191°) e messe in poco alcool si aggiunge gr. 10,3 di nitrito d'amile e poche goccie di acido solforico diluito; riscaldando leggermente, le ossime passano in soluzione mentre si ha un abbondante sviluppo gassoso (protossido di azoto): per completar la reazione si scalda fino all'ebullizione, s'aggiunge eccesso di acqua e si estrae con etere, per evaporazione del solvente si ottiene una massa cristallina, che vien purificata trattandola in soluzione eterea con carbone animale. La sostanza è in cristalli rinfrangenti, romboidali, colorati appena in giallo che fondono esattamente a 84°. Per trattamento con acido benzolsolfidrossammico dà la reazione intensa dell'acido idrossammico.

All' identico composto arrivammo condensando il piperonal con l'acetaldeide in soluzione acquosa alcalina nel modo descritto da Ladenburg [1]:

[1] Berliner Berichte, XXVII, 3°, 2958.

soltanto facemmo reagire le aldeidi in presenza di un poco d'etere e purificammo l'estratto etereo con bisolfito sodico invece che per distillazione frazionata: anche la mescolanza dei due prodotti fondeva a 84°.

gr. 0,1344 di sostanza diedero gr. 0,3355 di CO_2 e gr. 0,0570 di H_2O.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_8O_3$
C	68,08	68,18
H	4,71	4,54

Azione della fenilidrossilammina sull'aldeide. — All'aldeide sciolta in alcool si aggiunse la quantità corrispondente ad una molecola di fenilidrossilammina: il liquido si colorò intensamente in giallo e si separò subito una sostanza in aghetti giallo dorati, che fondeva a 193°, identica al composto primitivo ottenuto dal safrolo e nitrosobenzolo: mescolati fondevano alla stessa temperatura.

Azione del nitrosobenzolo sull'etileugenol. — Gr. 4 di nitrosobenzolo si posero a reagire con gr. 6 di etileugenolo: il colore del liquido passò dal verde al bruno, ma solo dopo qualche giorno cominciarono a deporsi dei cristalli e poco dopo tutto si rapprese in una massa. Il composto è poco solubile in benzolo; assai solubile in alcool da cui venne purificato e si presenta in aghetti gialli che fondono a 155°.

gr. 0,1998 di sostanza diedero cc. 8,2 di azoto a 15° e 763 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{18}H_{19}NO_3$
N	4,88	4,71

Anche questo nuovo composto alla luce si decompone con sviluppo di nitrosobenzolo.

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Chimica fisica. — *Sopra alcune proprietà colloidali dei saponi solubili* [1]. Nota I^a del Corrispondente FILIPPO BOTTAZZI e del dott. C. VICTOROW (di Kasan).

In questa prima serie di ricerche, fatte a scopo di orientamento, il materiale usato fu il così detto « sapone bianco di Marsiglia », vale a dire un miscuglio di una grande quantità di oleato con una piccola quantità di palmitato, stearato sodico, ecc. Il sapone era purificato precipitandolo dalle sue soluzioni concentrate con la minima quantità di soluzione concentrata di Na Cl, e ridisciogliendolo in acqua distillata, parecchie volte (non meno di quattro) consecutivamente.

[1] Dall'Istituto di Fisiologia sperimentale della R. Università di Napoli.

1. La soluzione concentrata di questo sapone, fatta a caldo, è limpidissima, molto viscosa e di color giallognolo; lasciata alla temperatura dell'ambiente, gelifica in massa, a simiglianza di una soluzione concentrata di gelatina. Il gel è biancastro più o meno trasparente. Non abbiamo determinato la minima concentrazione capace di produrre gelificazione della soluzione. Frantumando il gel o spremendolo, se ne separa un liquido giallognolo, che può essere tenuto per una soluzione del sapone satura alla temperatura dell'ambiente.

Non abbiamo cercato se il sapone di questa soluzione che si separa dal gel ha la stessa composizione del sapone originale. Nelle ricerche con saponi puri ciò non entra in conto.

2. Sottoposta la soluzione concentrata di sapone alla dialisi in budello di pergamena artificiale o di « viscose » (Leune), e cambiando l'acqua esterna due volte al giorno, si osservano i seguenti fatti.

a) Il volume del liquido contenuto nel dializzatore aumenta dapprima notevolmente, e in circa tre giorni di dialisi è quasi raddoppiato. Ciò è evidentemente dovuto a una forte pressione osmotica esercitata dalla soluzione, dovuta in parte alle micelle di sapone in quanto formano ioni colloidali elettronegativi (ved. appresso), in parte ai prodotti dell'idrolisi del sapone, che aumenta a misura che nel dializzatore penetra l'acqua.

b) Il liquido, dapprima limpido, man mano diventa opalescente, si intorbida e da ultimo diviene lattiginoso. Ciò è effetto della progressiva idrolisi del sapone con simultanea e rapida diffusione dell'alcali nell'acqua esterna. Per questa progressiva diffusione ed eliminazione dell'alcali, il sapone « normale » si trasforma in acidi grassi e saponi acidi, che rimangono in parte sospesi, e in parte precipitano al fondo del dializzatore. La eliminazione dell'alcali e la precipitazione degli acidi grassi e dei saponi acidi hanno per effetto una progressiva diminuzione della pressione osmotica, per cui da ultimo il volume del liquido contenuto nel dializzatore non aumenta più in modo apprezzabile. Verso la fine della dialisi, il liquido presenta tre strati: uno galleggiante alla superficie e un altro di precipitato al fondo, costituiti di acidi grassi e di saponi acidi, e un terzo strato intermedio lattiginoso che è una sospensione microgranulare di goccioline d'acido oleico e di particelle di acidi palmitico e stearico e di saponi acidi in una soluzione diluitissima di sapone.

3. Durante la dialisi si diffonde anche sapone nell'acqua esterna; ma la diffusione del sapone è assai meno veloce di quella dell'alcali nella stessa direzione e dello spostamento osmotico di acqua dall'esterno all'interno; così che la formazione e precipitazione nel dializzatore di acidi grassi liberi e di saponi acidi è sempre abbondantissima, mentre la perdita di sapone è relativamente piccola.

4. La originale soluzione concentrata di sapone presenta reazione alcalina alle carte rosse di tornasole, reazione non alcalina alla fenolftaleina.

Se si diluisce molto con acqua, e più ancora se si riscalda questa soluzione, essa presenta reazione nettamente alcalina anche alla fenolftaleina, reazione che diminuisce molto per il successivo raffreddamento del liquido.

Durante il primo periodo della dialisi la soluzione di sapone diventa nettamente alcalina alla fenolftaleina (effetto della crescente idrolisi); da ultimo essa diventa nettamente acida tanto alla fenolftaleina quanto alle carte bleu di tornasole (effetto della diffusione dell'alcali e della formazione di acidi grassi liberi e di saponi acidi).

5. La soluzione concentrata di sapone si presenta all'ultramicroscopio otticamente quasi « vuota ». A misura che, per effetto della dialisi, essa diviene opalescente e s'intorbida, appariscono numerosi granuli splendenti, che aumentano sempre più di volume.

Il liquido torbido e lattiginoso si chiarifica immediatamente per aggiunta di soda caustica; nello stesso tempo in essa diminuiscono i granuli splendenti, all'ultramicroscopio.

6. La semplice diluzione con acqua distillata (8-10 volumi) della soluzione concentrata originale di sapone non basta a rendere questa notevolmente opalescente o a intorbidarla; tuttavia un poco opalescente il liquido diviene sempre. Perciò è da credersi che, durante la dialisi, non è tanto la diluzione del liquido interno, quanto la diffusione all'esterno dell'alcali, la causa principale della formazione e precipitazione degli acidi grassi e dei saponi acidi.

7. Filtrando nel modo ordinario la soluzione di sapone divenuta lattiginosa e torbida per dialisi, si riesce a separare i grani e granuli più voluminosi, ma mai ad ottenere un filtrato limpido: il filtrato è sempre opalescente, e all'ultramicroscopio presenta numerosi granuli splendenti.

8. *Trasporto elettrico.* — Le ricerche furono fatte coll'apparecchino già descritto in una precedente pubblicazione [1], e nelle stesse condizioni. Tanto il sapone, nella soluzione concentrata originale limpida, quanto i granuli della sospensione di acidi grassi e saponi acidi, migrano costantemente verso l'anodo.

9. *Viscosità.* — Le ricerche furono fatte col viscosimetro di Ostwald, alla temperatura costante di 37° C e sempre con lo stesso capillare e con lo stesso volume di liquido; così che i valori di tempo di deflusso sono comparabili fra loro.

Aggiungendo acqua o poca soluzione $\frac{n}{10}$ di Na OH alla soluzione concentrata limpida, non dializzata, di sapone, si osserva costantemente diminuzione progressiva della viscosità (effetto della diluzione della soluzione).

Aggiungendo soluzione di Na OH $\frac{n}{10}$ alla sospensione di sapone filtrata (che perciò contiene piccola quantità di acidi grassi liberi e di saponi acidi

[1] Questi Rendiconti, vol. XVIII (5ª), sed. d. 16 maggio 1909, p. 485.

in forma microgranulare), la viscosità del liquido prima aumenta, raggiunge un massimo, e quindi diminuisce fino a raggiungere il valore primitivo (ved. fig. 1).

Se a questo punto si aggiunge acqua, la viscosità torna ad aumentare ma assai lentamente (effetto della diminuzione della concentrazione dell'alcali). Se invece di soluzione $\frac{n}{10}$ si fa agire soluzione più diluita $\left(\frac{n}{100}\right)$ di Na OH, l'aumento della viscosità avviene pure, ma assai più lentamente.

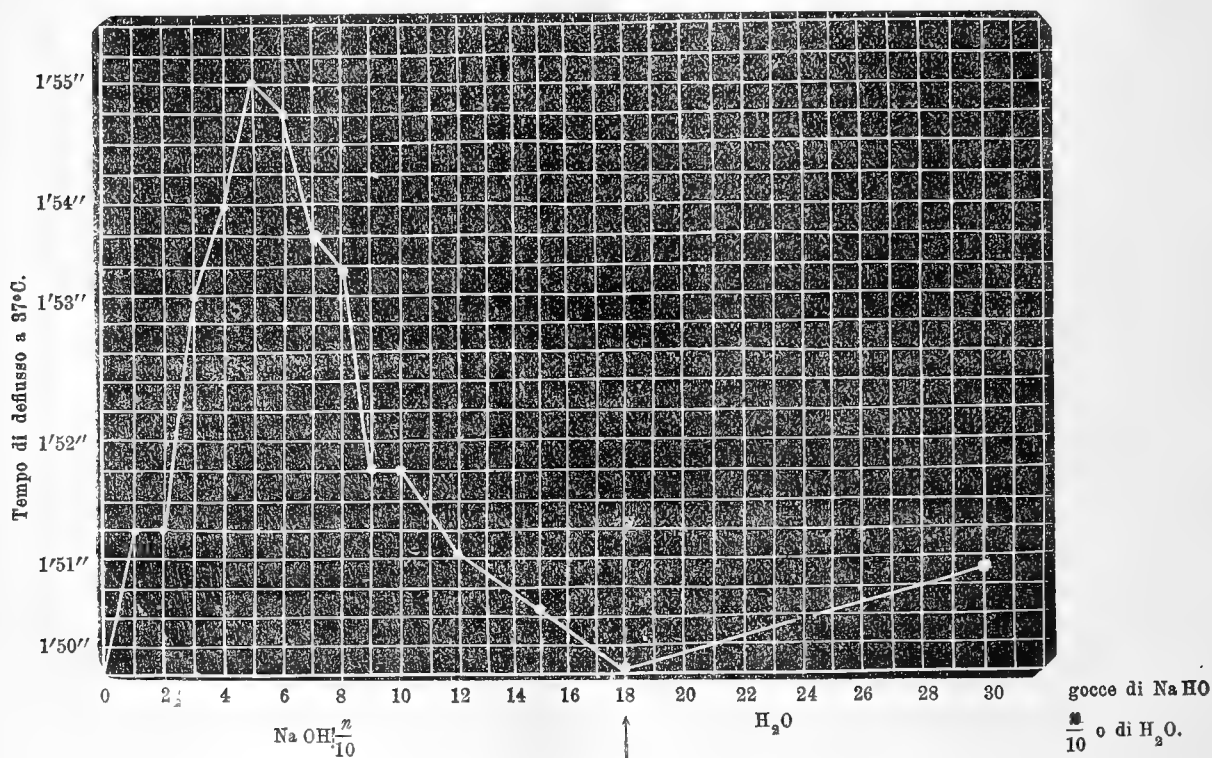



Fig. 1. — Influenza dell'idrato sodico sulla viscosità d'una soluzione di sapone dializzata.

Se la soluzione di Na OH è invece più concentrata $\left(\frac{n}{1}\right)$, si sorpassa subito il massimo di viscosità, e si osserva principalmente la progressiva diminuzione della viscosità.

L'aumento della viscosità qui descritto va di pari passo con una chiarificazione della sospensione opalescente o torbida.

L'aggiunta di Na OH in eccesse alla soluzione di sapone determina precipitazione di questo.

L'aumento di viscosità, che la soluzione diluita di Na OH determina nella sospensione di saponi acidi e di acidi grassi liberi, probabilmente è dovuto alla trasformazione di questi in saponi normali, e della sospensione in soluzione. Non altrimenti, la viscosità di una sospensione di globulina

aumenta quando, per aggiunta di Na OH, la globulina sospesa di discioglie [1]. Avviene salificazione e soluzione della materia granulare; il sale (sapone di sodio, globulinato di sodio) poi si scinde idroliticamente, le molecole si polimerizzano formando soluzione colloidale vera, contenente micelle e ioni colloidali elettronegativi, che determinano l'aumento della viscosità entrando in più intime relazioni con l'acqua (idratazione, imbibizione). Quando la stessa materia si trova allo stato di sospensione microgranulare i suoi rapporti con l'acqua intergranulare sono meno intimi; l'acqua è libera e non si trova in grande parte allo stato di acqua d'imbibizione; il liquido non ha caratteri di soluzione colloidale, ma piuttosto di sospensione.

In questi esperimenti sui saponi, assai più che in quelli sulle proteine, si acquista la persuasione che i caratteri peculiari delle soluzioni colloidali vere sono in dipendenza dallo stato chimico della materia e dalle relazioni che questa contrae col solvente, cioè dalla dissociazione delle molecole in ioni, e quindi dalle cariche elettriche delle particelle sciolte, e nel caso dei saponi particolarmente dalla polimerizzazione o condensazione degl'ioni colloidali.

L'abbassamento della viscosità che determina l'eccesso di Na OH (tanto nel caso delle proteine [2] quanto in questo dei saponi) preannunzia la precipitazione del sapone, e probabilmente è effetto sia di disimbibizione del colloide sia di retrocessione della dissociazione della molecole del sapone, dovuta ai Na^{+} comuni. Di conseguenza, le micelle aggregandosi formano granuli prima ultramicroscopici poi microscopici e finalmente visibili a occhio nudo, e si ha la precipitazione di essi.

10. *Tensione superficiale.* — Ci siamo serviti del metodo stalagmometrico del Traube, facendo gli esperimenti a una temperatura poco variante (da 12° a 14° C).

È noto che i saponi solubili hanno in grado altissimo il potere di abbassare la tensione superficiale dell'acqua.

La soluzione originale di sapone ha una tensione superficiale bassissima. La sospensione microgranulare (dopo lunga dialisi) ha una tensione superficiale di poco inferiore a quella dell'acqua distillata, il che dimostra che in questa sospensione una minima quantità di sapone trovasi ancora allo stato di soluzione.

La diluzione con acqua non aumenta in modo degno di nota la tensione superficiale della soluzione concentrata di sapone, e ciò si spiega col fatto che basta una piccolissima quantità di sapone per determinare un forte abbassamento della tensione superficiale.

[1] Fil. Bottazzi, *Ricerche sopra soluzioni di colloidi organici.* Arch. di Fisiol., VII, 1909, p. 593 e segg.

[2] L. c., p. 596.

Per l'aggiunta di soluzione $\frac{n}{10}$ di Na OH alla sospensione di acidi grassi e saponi acidi si osserva un abbassamento fortissimo della tensione superficiale di detta sospensione; la tensione superficiale raggiunge un minimo, poi torna ad aumentare fino a raggiungere il valore primitivo (ved. fig. 2).

Se a questo punto si aggiunge acqua, la tensione superficiale del liquido torna ad abbassarsi, ma assai lentamente (effetto della diminuzione di concentrazione della Na OH).

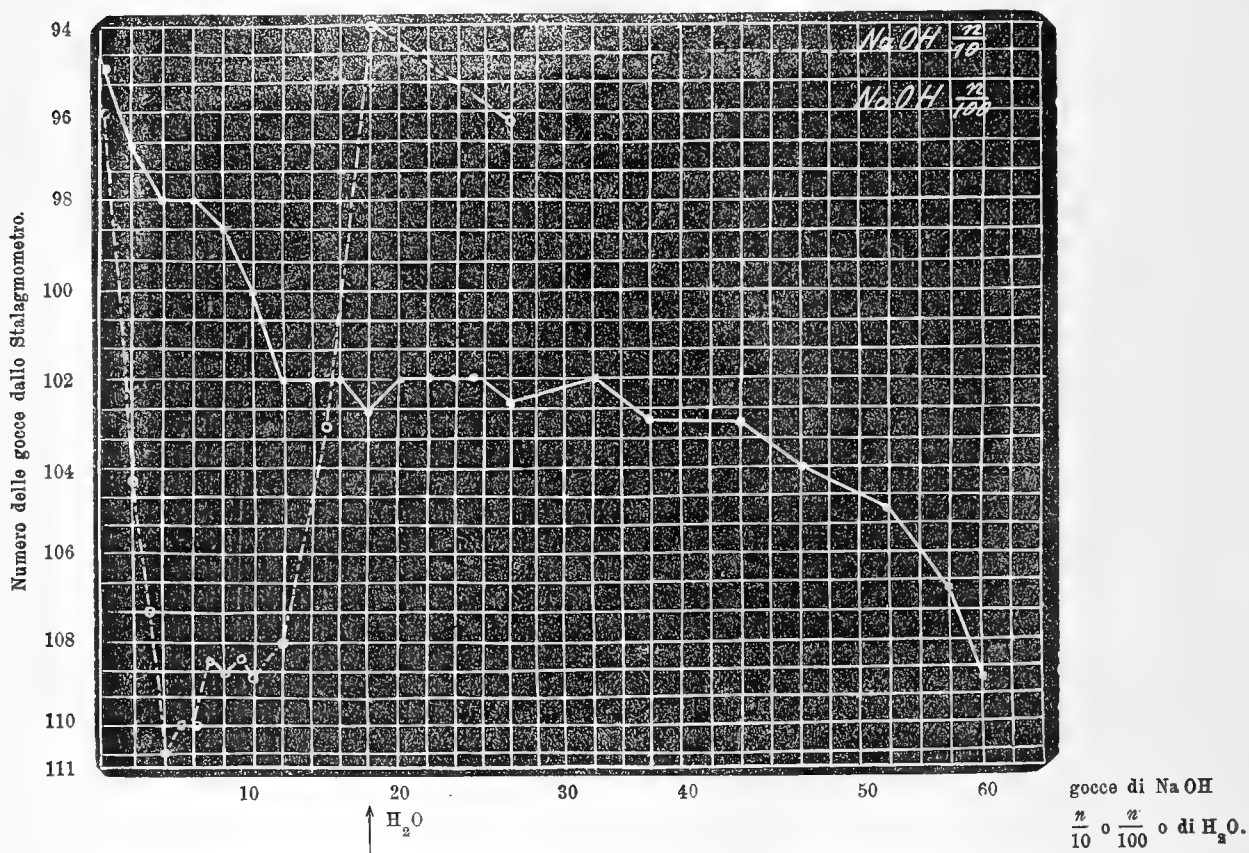



Fig. 2. — Influenza dell'idrato sodico su la tensione superficiale di una soluzione di sapone dializzata.

Se la soluzione di Na OH è meno concentrata $\left(\frac{n}{100}\right)$, la diminuzione della tensione superficiale della sospensione avviene pure, ma assai lentamente.

La soluzione concentrata di Na OH aggiunta alla soluzione concentrata limpida (non dializzata) di sapone, a un certo punto ne fa aumentare la tensione superficiale.

Parallelamente alla diminuzione della tensione superficiale procede la chiarificazione della sospensione.

Le variazioni di tensione superficiale ora descritte sono analoghe e parallele a quelle descritte sopra della viscosità.

Come aumenta la viscosità s'abbassa la tensione superficiale, e viceversa. La sospensione più volte ricordata ha una viscosità minima e una tensione superciale massima; per l'aggiunta ad essa di Na OH $\frac{n}{10}$ si osserva aumento di viscosità e diminuzione di tensione superficiale; si raggiunge così un massimo di viscosità e un minimo di tensione superficiale; l'aggiunta in eccesso di Na OH $\frac{n}{10}$ torna ad abbassare la viscosità e ad elevare la tensione superficiale. Si sarebbe quindi indotti a spiegare le variazioni della tensione superficiale nello stesso modo che ho tentato di spiegare quelle di viscosità, ossia di far dipendere le une e le altre dalle stesse cause, cioè dai mutamenti chimici che subisce la materia sospesa in forma micrograulare per l'aggiunta dell'alcali e dalle relazioni che le particelle sospese o sciolte contraggono con l'acqua.

11. Il gelificare della soluzione concentrata di sapone e il trasformarsi del sistema omogeneo in un sistema difasico, come nel caso della gelatina; l'alta viscosità delle soluzioni di sapone, e l'aumento di viscosità che si osserva durante la chiarificazione della sospensione per aggiunta di alcali; l'altissimo peso molecolare che presentano i saponi degli acidi grassi superiori in soluzione acquosa, ecc.: sono tutti criteri sufficienti per farci ammettere che le soluzioni acquose di questi saponi sono vere soluzioni colloidali, le quali per progressiva sottrazione di alcali si trasformano in sospensioni granulari più o meno grossolane di acidi grassi e di saponi acidi.

BIBLIOGRAFIA DEI SAPONI.

Krafft und Stern, Ber., XXVII, 1747, 1755, 1894.
Krafft und Wiglow, Ber., XXVIII, 2566, 2573, 1895.
Krafft und Strutz, Ber., XXIX, 1328, 1896.
Kahlenberg und Schreiner, Zeitschr. f. phys. Ch., XXVII, 552, 1898.
Krafft, Ber., XXXII, 1584, 1899.
Krafft, Zeit. f. ph. Ch., XXXV, 364, 1902.
Krafft und Funke, Zeit. f. ph. Ch., XXXV, 376, 1902.
Funke, Diss. Heidelberg, 1900.
Russo, Diss. Heidelberg, 1904.
H. Freundlich. Kapillarchemie. Leipzig, 1909, pp. 437 e segg.

Geodesia. — *Determinazioni complementari di gravità in Sicilia nel 1907.* Nota del Corrispondente A. VENTURI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Nuovo limite superiore delle velocità angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformemente, limitati da figura di equilibrio.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Nell' ipotesi di un fluido omogeneo, occupante uno spazio finito semplicemente connesso, non si sapeva, fino ad ora, se potesse assegnarsi un limite superiore delle suddette velocità angolari inferiore al noto limite $\sqrt{2\pi k\varrho}$ (Poincaré) [1], i simboli avendo il significato che tosto diremo.

Nella presente Nota stabilisco appunto *un limite superiore, di quelle velocità angolari*, inferiore a $\sqrt{2\pi k\varrho}$, e, precisamente, *eguale a* $\sqrt{\pi k\varrho}$.

Intenderemo che lo spazio S occupato dal fluido sia finito e semplicemente connesso e che il contorno σ dello spazio stesso sia convesso.

Ciò posto, siano

ϱ la densità del fluido (e sia $\varrho =$ costante);

k la costante della gravitazione universale;

ω la velocità angolare del supposto moto rotatorio uniforme.

Indichiamo, poi, con x, y, z le coordinate cartesiane di un punto generico del fluido rispetto alla nota terna d'assi legata al fluido stesso. L'asse z sia l'asse di rotazione.

Indichiamo, inoltre, con V la funzione potenziale

$$k\varrho \int_S \frac{dS}{r}.$$

Le variabili d'integrazione verranno indicate con x_1, y_1, z_1. Inoltre

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

Poichè supponiamo che la superficie contorno del fluido sia figura di equilibrio, avremo su quella superficie

$$\text{(I)} \qquad U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \text{costante} = C$$

e

$$\text{(II)} \qquad \frac{dU}{dn} > 0,$$

assumendo come definizione di figura di equilibrio, del supposto fluido, ogni

[1] Bulletin astronomique, 1885, pag. 118, *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, pag. 11.

superficie, contorno del fluido stesso, sulla quale sussistano contemporaneamente le (I) e (II).

Nello spazio S, racchiuso dalla figura di equilibrio, rimane definita la funzione U, la quale assume al contorno un valore costante ed ha il $\Delta^2 U =$ costante nei punti interni dell'agente. Per cui, ricordando la nota formula di Green

$$4\pi U = \int_\sigma \left(U \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} \right) d\sigma - \int_S \frac{\Delta^2 U}{r} dS ,$$

ottengo, nei punti interni del fluido, identicamente

$$4\pi U = C \int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} d\sigma - (2\omega^2 - 4\pi k\varrho) \int_S \frac{dS}{r} .$$

Ma, nei detti punti interni,

$$\int_\sigma \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma = 4\pi ,$$

talchè

$$\text{(III)} \qquad 4\pi U = 4\pi C - \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn} d\sigma - \frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho} V .$$

Ora, indico con n_σ la normale precedentemente indicata con n, per distinguerla dalla normale n_s, sulla quale n_s supporremo di collocare il punto interno (x, y, z), intendendo le normali n_σ ed n_s al contorno volte verso l'interno.

Ciò posto, dalla (III), ottengo

$$4\pi \frac{dU}{dn_s} = - \frac{d}{dn_s} \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn_\sigma} d\sigma - \frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho} \frac{dV}{dn_s} .$$

E, tendendo col punto interno in questione, situato sulla normale n_s, verso il punto (s) in cui la normale stessa incontra il contorno, avrò al limite

$$4\pi \left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s = - \lim \frac{d}{dn_s} \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn_\sigma} d\sigma - \frac{(2\omega^2 - 4\pi k\varrho)}{k\varrho} \left(\frac{dV}{dn_s}\right)_s .$$

Ma, come è noto dalla teoria del potenziale,

$$\lim \frac{d}{dn_s} \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{dU}{dn_\sigma} d\sigma = - 2\pi \left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s + \int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma} \frac{\cos\varphi}{r_0^2} d\sigma ,$$

essendo φ l'angolo che la normale n_s forma con la retta congiungente i

punti (s) e (σ) del contorno, volta nel noto senso, ed essendo r_0 la grandezza della distanza (s) (σ).

Avrò, quindi,

$$2\pi\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s+\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma=-\frac{(2\omega^2-4\pi k\varrho)}{k\varrho}\left(\frac{dV}{dn_s}\right)_s .$$

Ma

$$\frac{dV}{dn_s}=\frac{dU}{dn_s}-\frac{\omega^2}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{dn_s},$$

dunque

$$2(\omega^2-\pi k\varrho)\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s+k\varrho\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma=$$

$$=\omega^2(\omega^2-2\pi k\varrho)\left[\frac{d(x^2+y^2)}{dn_s}\right]_s .$$

Ora, supponiamo che (s) sia un punto in cui il piano tangente al contorno è normale all'asse di rotazione. Nel punto in discorso sarà

$$\left[\frac{d(x^2+y^2)}{dn_s}\right]_s=0,$$

e, perciò, sarà

$$2(\omega^2-\pi k\varrho)\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s+k\varrho\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma=0$$

in quel punto medesimo. Ma, il contorno σ essendo, per ipotesi, convesso, $\cos\varphi>0$. Inoltre, per ipotesi, $\frac{dU}{dn}>0$; dunque

$$k\varrho\int_\sigma \frac{dU}{dn_\sigma}\frac{\cos\varphi}{r_0^2}\,d\sigma>0 .$$

Sarà, quindi, corrispondentemente,

$$(\omega^2-\pi k\varrho)\left(\frac{dU}{dn_s}\right)_s<0,$$

da cui

$$\omega^2-\pi k\varrho<0$$

ovvero

$$\omega^2<\pi k\varrho .$$

Dunque

(IV) $$\omega<\sqrt{\pi k\varrho}$$

come volevo dimostrare.

È chiaro, però, che, quì, all'espressione «limite superiore», che ho voluto usare, non è detto che possa attribuirsi lo stesso significato che in analisi, giacchè la (IV) ci dice soltanto che ω è inferiore a $\sqrt{\pi k\varrho}$.

Matematica. — *Di alcune nuove classi di equazioni integrali.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio ENRICO D'OVIDIO.

I teoremi di Hilbert-Schmidt per le equazioni integrali a nucleo simmetrico furono da me estesi in una recente Memoria [1] alle equazioni integrali polari senza far uso dell'algoritmo delle forme quadratiche a infinite variabili. Gli stessi metodi da me usati in tale ricerca permettono di estendere tali risultati ad alcune nuove classi di equazioni integrali, che io studierò successivamente nei §§ 1, 2, 3 di questa Nota. Delle dimostrazioni non dò quasi cenno, perchè sono perfettamente analoghe a quelle della Memoria citata. I simboli di integrazione si dovranno tutti intendere come simboli d'integrazione in un dato intervallo finito J. Le funzioni di una sola variabile, che noi introdurremo, saranno tacitamente supposte integrabili insieme al loro quadrato nell'intervallo J. Le funzioni simmetriche di due variabili, che noi useremo, saranno supposte soddisfare alle condizioni, che Hilbert-Schmidt impongono ai nuclei (Kern) delle equazioni integrali da essi studiate.

1. Sia l'equazione

$$f(x) = \varphi(x) + \int K(x, y)\, \varphi(y)\, dy - \lambda \int G(x, y)\, \varphi(y)\, dy =$$
$$= \varphi(x) + \int [K(x, y) - \lambda\, G(x, y)]\, \varphi(y)\, dy$$

un'equazione integrale, dove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, K e G sono funzioni simmetriche delle x, y. Questa è la più generale equazione integrale simmetrica, che contenga linearmente il parametro λ; e per $K = 0$ si riduce alla equazione di Hilbert-Schmidt. Supporremo che $K(x, y)$ sia un nucleo *definito positivo*, che cioè per ogni funzione $u(x)$ si abbia

$$\iint K(x, y)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy \geq 0 .$$

Se $u(x), v(x)$ sono funzioni in J, porremo

$$L_1(u, v) = \int u(x)\, v(x)\, dx + \iint K(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy \;;\quad L_1(u, u) = L_1(u)$$
$$L_2(u, v) = \iint G(x, y)\, u(x)\, v(y)\, dx\, dy \;;\quad L_2(u, u) = L_2(u).$$

[1] *Equazioni integrali e valori eccezionali*, Annali di Matematica, 1910, serie 3ª, tomo 17.

I limiti superiore e inferiore di $L_2(u)$, quando u soddisfaccia alla $L_1(u)=1$, sono entrambi limitati: sia $\mu \neq 0$ uno di essi; e sia $u_1, u_2, u_3 \ldots$ una successione di funzioni tali che $L_1(u_n)=1$, $\lim_{n=\infty} L_2(u_n)=\mu$. Si può dimostrare che la nostra successione si può scegliere in guisa che esista il

$$\lim_{n=\infty} \int [G(x, y) - \mu K(x, y)]\, u_n(y)\, dy,$$

e che questo limite sia una funzione $\psi(x)$ continua della x. E questa funzione $\varphi(x)$ differisce soltanto per un fattore costante da una funzione $\varphi(x)$ soddisfacente alle

$$L_1(\varphi)=1$$

$$\mu \left\{ \varphi(x) + \int K(x, y)\, \varphi(y)\, dy \right\} = \int G(x, y)\, \varphi(y)\, dy. \tag{1}$$

Una funzione φ, e il corrispondente valore del parametro μ tali che sia soddisfatta la (1) si diranno *una funzione* e *un valore eccezionale* per la nostra equazione integrale. Resta così provata *l'esistenza di almeno una soluzione eccezionale.*

Se chiamiamo *coniugato normale* un sistema di funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ soddisfacenti alle $L_1(\varphi_i)=1$, $L_1(\varphi_i, \varphi_k)=0$ (per $i \neq k$), si può dimostrare facilmente che ogni sistema di funzioni (linearmente indipendenti) eccezionali per la nostra equazione integrale si può con una trasformazione lineare intera omogenea trasformare in un *sistema coniugato normale.* Supposto dunque che $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sia un sistema coniugato normale di funzioni eccezionali, e che $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ siano i corrispondenti *valori eccezionali*, la ricerca di una $(n+1)^{esima}$ funzione eccezionale, e del corrispondente *valore eccezionale* equivale a un problema analogo a quello già studiato, a studiare cioè i limiti inferiore e superiore dell'integrale

$$L_2\left(f - \sum_1^n c_i \varphi_i\right) = \iint G^{(n)}(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

quando la funzione f soddisfi alla

$$1 = L_1\left(f - \sum_1^n c_i \varphi_i\right) = \int f^2(x)\, dx + \iint K^{(n)}(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy.$$

Si è posto in queste formole

$$c_i = \mathrm{L}_1(f, \varphi_i) = \frac{1}{\mu_i} \mathrm{L}_2(f, \varphi_i);$$

$$\mathrm{G}^{(n)}(x, y) = \mathrm{G}(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \mu_i \left\{ \varphi_i(x) + \int \mathrm{K}(x, \varrho)\, \varphi_i(\varrho)\, d\varrho \right\} \times$$

$$\times \left\{ \varphi_i(y) + \int \mathrm{K}(y, \varrho)\, \varphi_i(\varrho)\, d\varrho \right\}$$

$$\mathrm{K}^{(n)}(x, y) = \mathrm{K}(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \left[\varphi_i(x) + \int \mathrm{K}(x, \varrho)\, \varphi_i(\varrho)\, d\varrho \right] \times$$

$$\times \left[\varphi_i(y) + \int \mathrm{K}(y, \varrho)\, \varphi_i(\varrho)\, d\varrho \right].$$

Resta così (come nella Memoria citata), dato un mezzo per determinare una dopo l'altra tutte le funzioni eccezionali e i corrispondenti valori eccezionali.

E assai probabile che ulteriori ricerche permettano

1°) di dare una teoria per gli sviluppi in serie secondo le funzioni eccezionali qui determinate;

2°) di imporre a $\mathrm{K}(s, t)$ condizioni meno restrittive;

3°) di estendere questi risultati a qualche classe di equazioni integrali, il cui nucleo, pur essendo simmetrico nelle x, y, contiene il parametro λ non linearmente (Quest'ultima previsione è giustificata dalle recenti generalizzazioni dovute al Bôcher dei teoremi di oscillazione).

2. Ai precedenti risultati si può dare un'altra forma interessante. La equazione

$$\psi(x) = \varphi(x) + \int \mathrm{K}(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

è costantemente equivalente a un'equazione del tipo

$$\varphi(x) = \psi(x) + \int \mathrm{H}(x, y)\, \psi(y)\, dy$$

dove H è una funzione soddisfacente alla

$$\mathrm{H}(x, y) + \mathrm{K}(x, y) + \int \mathrm{H}(x, z)\, \mathrm{K}(y, z)\, dz = 0.$$

Se infatti così non fosse, esisterebbe una funzione $u(x) \neq 0$ soddisfacente alla

$$u(x) + \int \mathrm{K}(x, y)\, u(y)\, dy = 0$$

e quindi alla

$$\int u^2(x)\, dx + \iint \mathrm{K}(x, y)\, u(x)\, u(y)\, dx\, dy = 0,$$

cosicchè $K(x, y)$ non sarebbe un nucleo definito positivo. La (1) si potrà quindi scrivere [1]:

$$\mu\psi(x) = \int\left[G(x, y) + \int G(x, z)\, H(y, z)\, dz\right]\psi(y)\, dy.$$

I risultati del § 1 estendono così la teoria delle soluzioni eccezionali alle equazioni integrali, il cui nucleo (generalmente non simmetrico)

$$G(x, y) + \int G(x, z)\, H(y, z)\, dz$$

è la somma della funzione simmetrica $G(x, y)$ e del prodotto *simbolico* $\int G(x, z)\, H(y, z)\, dz$ delle funzioni simmetriche G, H.

[1] Un analogo artificio può essere utile anche in altri problemi. Sia l'equazione

$$(1)\qquad \varphi(x, y) + \int A(x, y, \xi)\,\varphi(\xi, y)\, d\xi + \int B(x, y, \eta)\,\varphi(x, \eta)\, d\eta + \iint C(x, y; \xi, \eta)\,\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

dove A, B, C, f sono fnnzioni date dei loro argomenti, $\varphi(x, y)$ la funzione incognita. Suppongo che le equazioni

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\varphi(x, y) + \int A(x, y, \xi)\,\varphi(\xi, y)\, d\xi = \psi(x, y), \\ &\psi(x, y) + \int B(x, y, \eta)\,\psi(x, \eta)\, d\eta = \chi(x, y), \end{aligned}$$

dove φ e ψ sono rispettivamente le funzioni considerate come incognite, siano la prima, per ogni valore di y (che ha l'ufficio di parametro) nell'intervallo considerato, la seconda, per ogni valore della x, equazioni *generali* del Fredholm. Suppongo cioè cbe le (2) siano equivalenti a formole del tipo

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = \psi(x, y) + \int a(x, y, \xi)\,\psi(\xi, y)\, d\xi \\ \psi(x, y) = \chi(x, y) + \int b(x, y, \eta)\,\chi(x, \eta)\, d\eta, \end{cases}$$

dove $a(x, y, \xi)$ e $b(x, y, \eta)$ sono funzioni finite negli intervalli considerati. Tenendo conto delle prime delle equazioni (2), (3), la (1) si trasforma in un'equazione del tipo

$$\psi(x, y) + \int B(x, y, \eta)\,\psi(x, \eta)\, d\eta + \iint \Gamma(x, y, \xi, \eta)\,\psi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

dove Γ è una funzione nota. Questa equazione in virtù delle 2e delle equazioni (2), (3) si può scrivere:

$$(4)\qquad \chi(x, y) + \iint \Delta(x, y, \xi, \eta)\,\chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

dove Δ è una funzione nota. L'equazione integrale (1) di tipo nuovo equivale dunque al sistema delle tre equazioni (2), (4): tutte del Fredholm; e il suo studio viene così senza altro esaurito.

3. Dimostrerò ora che la teoria delle funzioni e dei valori eccezionali si può estendere a quelle equazioni del Fredholm, il cui nucleo è il prodotto *simbolico* $\int K(x, z) V(y, z) dz$ di due funzioni simmetriche $K(x, y)$, $V(x, y)$. Su $K(x, y)$ farò le ipotesi già enunciate al § 1. Poniamo

$$L_1(u, v) = \iint K(x, y) u(x) v(y) dx dy \quad ; \quad L_1(u) = L_1(u, u)$$

$$H_2(x, y) = \iint K(x, r) V(r, s) K(s, y) dr ds$$

$$L_2(u, v) = \iint H_2(x, y) u(x) v(y) dx dy ; \quad L_2(u) = L_2(u, u)$$

$$\Gamma(u, v) = \iint V(x, y) u(x) v(y) dx dy \quad ; \quad \Gamma(u) = \Gamma(u, u).$$

I limiti inferiore e superiore dei valori di $L_2(u)$, quando la funzione u soddisfa alla $L_1(u) = 1$ sono finiti. Sia $\mu \neq 0$ uno di essi; e siano le $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ funzioni soddisfacenti alle $L_1(u_n) = 1$, $\lim_{n=\infty} L_2(u_n) = \mu$. Si può dimostrare che la successione delle u_n si può scegliere in guisa che $\int H_2(x, r) u_n(r) dr$ tenda per $n = \infty$ a un limite $\psi(x)$, che differisce soltanto per un fattore costante da una funzione $\varphi(x)$ soddisfacente alle

$$\Gamma(\varphi) = \varepsilon = \frac{|\mu|}{\mu} = \pm 1$$

$$\mu \varphi(x) = \int \left[\int K(x, r) V(y, r) dr \right] \varphi(y) dy. \tag{2}$$

Se diciamo *funzione eccezionale* e *valore eccezionale* una funzione $\varphi(x)$ e il valore corrispondente di μ, che soddisfacciano alla (2), le precedenti considerazioni servono a dimostrare nel caso attuale l'esistenza di *almeno una funzione e un valore eccezionali.*

Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ è un sistema di funzioni eccezionali (linearmente indipendenti) e $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ è il sistema dei corrispondenti valori eccezionali del parametro μ, si dimostra, posta $\varepsilon_i = \frac{\mu_i}{|\mu_i|} = \pm 1$ che con una opportuna trasformazione lineare il sistema delle φ_i si può trasformare in un altro sistema di funzioni eccezionali φ_i soddisfacenti alle $\Gamma(\varphi_i) = \varepsilon_i$, $\Gamma(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ (per $i \neq k$), ossia, come diremo, in un sistema *coniugato* normale. Per trovare poi una $(n+1)^{esima}$ funzione eccezionale φ_{n+1} e il

corrispondente valore eccezionale μ_{n+1}, si ponga:

$$p_i(x) = \int V(x, y)\, \varphi_i(y)\, dy \qquad c_i = \varepsilon_i \int f(x)\, \varphi_i(x)\, dx$$

$$K^{(n)}(x, y) = K(x, y) - \sum_1^n |\mu_i|\, \varphi_i(x)\, \varphi_i(y)$$

$$L_1^{(n)}(f) = L_1\left(f - \sum_1^n c_i p_i\right) = L_1(f) - \sum_1^n |\mu_i|\, c_i^2 =$$

$$= \iint K^{(n)}(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

$$H_2^{(n)}(x, y) = H_2(x, y) - \sum_1^n \mu_i |\mu_i|\, \varphi_i(x)\, \varphi_i(y) =$$

$$= \iint K^{(n)}(x, r)\, V(r, s)\, K^{(n)}(s, y)\, dr\, ds$$

$$L_2^{(n)}(f) = L_2\left(f - \sum_1^n c_i p_i\right) = L_2(f) - \sum \mu_i |\mu_i|\, c_i^2 =$$

$$= \iint H_2^{(n)}(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy\,.$$

Lo studio dei limiti inferiore e superiore dei valori di $L_2^{(n)}(f)$, quando f soddisfa alla $L_1^{(n)}(f) = 1$ è un problema simile a quello già trattato [1];

[1] Poichè in questa dimostrazione si presenta qualche fatto nuovo, lo riassumerò brevemente, rinviando per i particolari alla dimostrazione analoga della Mem. citata.

Sia $\mu_{n+1} \neq 0$ uno dei limiti (inferiore o superiore) testè ricordati nel testo; sia $u_1, u_2, \ldots$ una successione tale che $L_1^{(n)}(u_j) = 1$, $L_2^{(n)}(u_j) = \mu_{n+1} + \eta_j$, dove $\lim_{j=\infty} \eta_j = 0$.

Si dimostra che la successione delle u_j si può scegliere in modo che $\int H_2^{(n)}(x, y)\, u_j(y)\, dy$ tenda per $j = \infty$ a una funzione limite continua $\psi(x)$ e si dimostra pure che, se $v_1, v_2, \ldots$ è un'altra successione di funzioni, tale che $L_1(v_j)$ siano per $j = 1, 2 \ldots$ tutte inferiori ad una stessa costante, allora

$$(\alpha) \qquad \lim_{j=\infty} \int v_j(x)\, dx \left\{ (\mu_{n+1} + \eta_j) \int K^{(n)}(x, y)\, u_j(y)\, dy - \int H_2^{(n)}(x, y)\, u_j(y)\, dy \right\} = 0\,.$$

Ponendovi successivamente

$$v_j(x) = \int K^{(n)}(z, r)\, V(r, x)\, dr \quad , \quad v_j(x) = u_j(x) \quad , \quad v_j(x) = \int \psi(r)\, V(r, x)\, dr$$

si trova che $\Gamma(\psi) \neq 0$ e che quindi ψ, moltiplicato per una costante, si trasforma in una funzione φ_{n+1} soddisfacente alle

$$\Gamma(\varphi_{n+1}) = 1\ ; \quad \int \left[\int K^{(n)}(x, r)\, V(r, y)\, dr \right] \varphi_{n+1}(y)\, dy = \mu_{n+1}\, \varphi_{n+1}(x)\,.$$

Posto poi $v_j(x) = \int V(z, x)\, \varphi_i(z)\, dz$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si trova tosto che $\Gamma(\varphi_{n+1}, \varphi_i) = 0$.

per mezzo di esso si giunge facilmente alla φ_{n+1} ed a μ_{n+1}. Poichè, come già scrivemmo,

$$L_1\left(f-\sum_1^n c_i p_i\right)=L_1(f)-\sum_1^n |\mu_i|\, c_i^2$$

e $K(x,y)$ è un nucleo definito positivo, se ne deduce:

Se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *sono le successive funzioni eccezionali* (determinate p. es. col metodo precedente) *e se* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *sono i corrispondenti valori eccezionali disposti in ordine tale che* $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$, *allora le serie*

$$\sum |\mu_i|^3 \quad , \quad \sum |\mu_i| \int u(x)\, \varphi_i(x)\, dx \int v(x)\, \varphi_i(x)\, dx$$

(dove u, v sono funzioni arbitrarie) *convergono assolutamente e uniformemente.* E (come nella Memoria citata) *si dimostra che è identicamente*

$$L_2(u, v)=\sum \mu_i |\mu_i| \int u(x)\, \varphi_i(x)\, dx \int v(x)\, \varphi_i(x)\, dx\,.$$

Se poi $u(x)$ *è una funzione che si può scrivere sotto la forma*

$$\int H_2(x, y)\, p(y)\, dy$$

(dove al solito $p(y)$ e $p^2(y)$ sono integrabili), allora è:

$$u(x)=\sum \gamma_i\, \varphi_i(x),$$

dove

$$\gamma_i=\mu_i |\mu_i| \int \varphi_i(x)\, p(x)\, dx=\varepsilon_i\, \Gamma(u, \varphi_i),$$

e dove la serie del secondo membro converge assolutamente e uniformemente. Non è naturalmente escluso che alcune delle serie qui citate si riducano a somme.

Insomma tutti i teoremi della mia Memoria citata si possono, con qualche modificazione, estendere al caso attuale. Io ho solo ricordato qui i

---

Le equazioni precedenti si riducono perciò alle

$$\Gamma(\varphi_{n+1})=1 \quad ; \quad \int\left[\int K(x, r)\, V(r, y)\, dr\right] \varphi_{n+1}(y)\, dy=\mu_{n+1}\, \varphi_{n+1}(x)\,.$$

A questa funzione φ_{n+1} che colle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ forma un sistema coniugato normale, siamo giunti partendo dalla considerazione delle funzioni $\Phi=f-\sum c_i p_i$ che non soddisfano alle $\Gamma(\Phi, \varphi_i)=0$, ma invece alle $\int \Phi \varphi_i\, dx=0$ e quindi sono ortogonali alle φ. Invece le funzioni $F(x)=\int K(x, y)\, \Phi(y)\, dy$ soddisfano alle $\Gamma(F, \varphi_i)=0$, o, come potremo dire, sono coniugate delle φ_i.

più importanti; che bastano però a rendere chiare le modificazioni che si devono portare negli enunciati.

OSSERVAZIONE. — Noi potremmo anche pensare alle equazioni integrali, il cui *nucleo* $H(x, y)$, non simmetrico nelle x, y, è il quoziente *simbolico* di due funzioni simmetriche $K(x, y)$, $G(x, y)$, ossia soddisfa all'equazione

$$\int K(x, z)\, H(z, y)\, dz = G(x, y).$$

Lo studio di una tale equazione integrale

$$\mu\, \varphi(x) + \int H(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

è stato iniziato dal Marty in una recente Nota dei Comptes Rendus. Noi qui osserveremo soltanto che una tale equazione, moltiplicata per $K(x, z)$, e integrata rispetto a x si trasforma nella

$$\mu \int K(z, x)\, \varphi(x)\, dx + \int G(z, x)\, \varphi(x)\, dx = \int K(z, x)\, f(x)\, dx$$

che è una equazione integrale limite delle equazioni studiate al § 1, e alla quale si possono applicare in molti casi i procedimenti di questa Nota.

Matematica. — *Sull'iterazione.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

In ciò che segue mi propongo di esporre brevemente alcuni risultati sull'iterazione, alla ricerca dei quali fui spinto dalla lettura di una Nota di L. David [1] relativa alla seguente proposizione: « l'algoritmo d'iterazione definito dalle equazioni

$$[x_s^{(r+1)}]^s = \frac{1}{\binom{n}{s}} \sum x_{\alpha_1}^{(r)} \cdot x_{\alpha_2}^{(r)} \cdot \ldots \cdot x_{\alpha_s}^{(r)} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

(dove la sommatoria è estesa a tutti i possibili prodotti s ad s dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}$) quando sia data una legge che determini, per ogni valore di r, gli argomenti delle radici che qui figurano, è convergente per qualunque sistema di valori iniziali, reali o complessi, ed è

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \cdots = \lim_{r=\infty} x_n^{(r)} \text{ ».}$$

[1] L. David, *Zur Theorie der Schapiraschen Iteration,* Journal für die seine und angewandte Mathematik. H. 1, Bd. 135.

Qui tratterò semplicemente il caso reale e per tre sole variabili; per quello generale di n variabili — reali o complesse — e per qualche applicazione rimanderò ad una mia Memoria che sarà tra poco pubblicata.

1. Sia $F(x_1, x_2, x_3)$ una funzione reale delle variabili reali x_1, x_2, x_3, data in tutto il campo reale ed ivi, eccettuati al più i punti all'infinito, continua e, rispetto ad ogni variabile, sempre crescente. Si consideri una successione infinita di punti $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$ e si supponga che: 1° sia

$$\lim_{r=\infty} F(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) = F(x_1, x_2, x_3)\,, \tag{1}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono numeri reali finiti; 2° preso ad arbitrio un numero positivo ε, si possa sempre determinare un $\bar{r}$ tale che, per ogni $r > {}^{-}$, si abbia

$$x_s^{(r)} \leq x_s + \varepsilon \qquad (s = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Si avrà allora

$$\lim_{r=\infty} x_s^{(r)} = x_s \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Infatti, se ciò non fosse, si potrebbe scegliere, nella successione dei punti $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$, un'altra successione $(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)})$ tendente ad un punto limite $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ distinto da (x_1, x_2, x_3). Questo punto limite, per le (2), avrebbe le sue coordinate rispettivamente inferiori od eguali a quelle di (x_1, x_2, x_3), e la disuguaglianza $\bar{x}_s < x_s$ dovrebbe essere soddisfatta per *almeno* un valore dell'indice s. Allora, se le $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ fossero tutte finite, si avrebbe

$$\lim_{r_1=\infty} F(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)}) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) < F(x_1, x_2, x_3)\,,$$

e ciò contro la (1). Se poi qualcuna delle $\bar{x}$ fosse infinita, si potrebbe scegliere un punto (x'_1, x'_2, x'_3) a coordinate tutte finite e soddisfacenti alla condizione $\bar{x}_s < x'_s < x_s$ o all'altra $\bar{x}_s = x'_s = x_s$ secondochè è $\bar{x}_s < x_s$ oppure $\bar{x}_s = x_s$. Avendosi in tal punto $F(x'_1, x'_2, x'_3) < F(x_1, x_2, x_3)$, si potrebbe, per la continuità, determinare un numero positivo η in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$F(x'_1 + \eta\,,\, x'_2 + \eta\,,\, x'_3 + \eta) < F(x_1, x_2, x_3)\,,$$

e perciò — essendo $\lim_{r_1=\infty} x_s^{(r_1)} = \bar{x}_s < x'_s + \eta$ — si avrebbe, per ogni r_1

maggiore di un certo r,

$$x_s^{(r_1)} < x' + \eta \quad , \quad F(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)}) < F(x_1' + \eta, x_2' + \eta, x_3' + \eta),$$

$$\lim_{r_1=\infty} F(x_1^{(r_1)}, x_2^{(r_1)}, x_3^{(r_1)}) \leq F(x_1' + \eta, x_2' + \eta, x_3' + \eta) < F(x_1, x_2, x_3),$$

contro la (1).

Si può osservare che la proposizione precedente vale anche se, invece delle disuguaglianze (2), sono verificate, da un certo punto in poi, le altre

$$x_s^{(r)} \geq x_s - \varepsilon \qquad (s = 1, 2, 3).$$

2. Indicando con $f(x)$ la funzione di x che si ottiene ponendo nella F del numero precedente $x_1 = x_2 = x_3 = x$, l'equazione in x

$$f(x) = F(x_1, x_2, x_3) \tag{3}$$

ammette sempre, per ogni terna di numeri finiti x_1, x_2, x_3, una soluzione ed una sola. La cosa è evidente se è $x_1 = x_2 = x_3$; in caso diverso, indicando con m ed M rispettivamente il minimo ed il massimo dei tre numeri x_1, x_2, x_3, si ha, per le proprietà delle F,

$$F(m, m, m) < F(x_1, x_2, x_3) < F(M, M, M)$$
$$f(m) < F(x_1, x_2, x_3) < f(M),$$

e quindi esiste un x ed uno solo, soddisfacente alla doppia disuguaglianza $m < x < M$, che verifica la (3).

Osserviamo che, se aggiungessimo la condizione di essere la F simmetrica rispetto alle sue tre variabili, la soluzione della (3) darebbe la più generale delle *medie* dei numeri x_1, x_2, x_3.

3. Ciò premesso, consideriamo p funzioni F

$$F_1, F_2, \ldots, F_p, \tag{4}$$

e dimostriamo la seguente proposizione:

Sia

$$(x_1^{(r)}), x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

una successione di punti, a coordinate finite, la quale goda della seguente proprietà: per ogni r si possa trovare in (4) *una* F_{q_r} *tale che la soluzione dell'equazione* $x^{(r)}$

$$f_{q_r}(x^{(r)}) = F_{q_r}(x_1^{(r-1)}, x_2^{(r-1)}, x_3^{(r-1)}) \tag{5}$$

non sia inferiore a nessuno dei tre numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$; *esistono allora, e sono tra loro uguali, i limiti*

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} \quad , \quad \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} \quad , \quad \lim_{r=\infty} x_3^{(r)} .$$

Osserviamo, dapprima, che, indicato con $\overline{x}^{(r)}$ il massimo dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, si ha, da una parte, per l'ipotesi fatta, $\overline{x}^{(r)} \leq x^{(r)}$ e, dall'altra, $x^{(r)} \leq \overline{x}^{(r-1)}$ (infatti è

$$f_{q_r}(x^{(r)}) = \mathrm{F}_{q_r}(x_1^{(r-1)}, x_2^{(r-1)}, x_3^{(r-1)}) < \mathrm{F}_{q_r}(\overline{x}^{(r-1)}, \overline{x}^{(r-1)}, \overline{x}^{(r-1)}) = f_{q_r}(\overline{x}^{(r-1)})) ;$$

e perciò, riunendo,

$$\overline{x}^{(r)} \leq \overline{x}^{(r-1)}.$$

Esiste quindi il limite

$$\lim_{r=\infty} \overline{x}^{(r)} = x , \tag{6}$$

e questo limite potrà essere finito oppure uguale a $-\infty$. In quest'ultimo caso, essendo $\overline{x}^{(r)}$ il massimo dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, la proposizione risulta già dimostrata. Rimane dunque a considerare l'ipotesi di x finito, nella quale possiamo dire che, preso un ε piccolo ad arbitrio e positivo, per ogni r maggiore di un certo $\overline{r}$, è

$$x_s^{(r)} < x + \varepsilon \qquad (s = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Notiamo, ora, che fra le (4) ve ne sono certamente alcune che compariscono infinite volte nella successione

$$\mathrm{F}_{q_1}, \mathrm{F}_{q_2}, \ldots, \mathrm{F}_{q_r}, \ldots$$

Per comodità di scrittura supporremo che tali F siano le prime p' $(1 \leq p' \leq p)$, e solamente esse. Siano, allora,

$$r_1, r_2, \ldots \tag{8}$$

i valori dell'indice r per i quali è $\mathrm{F}_{q_r} = \mathrm{F}_1$. Si ha, per quanto è già stato osservato,

$$\overline{x}^{(r_\nu)} \leq x^{(r_\nu)} \leq \overline{x}^{(r_\nu - 1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e, per la (6),

$$\lim_{\nu=\infty} x^{(r_\nu)} = x .$$

ossia, per la continuità della f_1 e per la (5),

$$\lim_{\nu=\infty} f_1(x^{(r_\nu)}) = f_1(x)$$

$$\lim_{\nu=\infty} F_1(x_1^{(r_\nu-1)}, x_2^{(r_\nu-1)}, x_3^{(r_\nu-1)}) = f_1(x) = F_1(x, x, x).$$

Da quest' uguaglianza e dalla disuguaglianza (5) risulta, per la proposizione del n. 1, che esistono i limiti delle $x_s^{(r_\nu-1)}$ per $\nu = \infty$ e che è

$$\lim_{\nu=\infty} x_s^{(r_\nu-1)} = x \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Al medesimo risultato si giunge prendendo successivamente in considerazione, invece della (8), le successioni dei valori dell' indice r per i quali è, rispettivamente, $F_{q_r} = F_2, \dots, F_{q_r} = F_{p'}$. Siccome p' è un numero finito ($\leq p$), si conclude che esistono i limiti per $r = \infty$ di $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, e che è

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_3^{(r)},$$

come appunto dovevasi dimostrare.

Si può osservare che il limite delle $x_s^{(r)}$ è certamente minore od uguale al massimo dei numeri $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ (sempre minore se questi x non sono tutti eguali).

4. Corrispondentemente alla proposizione dimostrata al numero precedente si ha quest'altra:

Sia

$$(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \qquad (r = 1, 2, \dots)$$

una successione di punti, a coordinate finite, la quale goda della seguente proprietà: per ogni r si possa trovare in (4) *una F_{q_r} tale che la soluzione dell'equazione in $x^{(r)}$*

$$f_{q_r}(x^{(r)}) = F_{q_r}(x_1^{(r-1)}, x_2^{(r-1)}, x_3^{(r-1)})$$

non sia superiore a nessuno dei tre numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$; esistono, allora, e sono tra loro uguali, i limiti

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)}, \quad \lim_{r=\infty} x_2^{(r)}, \quad \lim_{r=\infty} x_3^{(r)}.$$

Per dimostrare questa proposizione basta ripetere il ragionamento fatto al numero precedente sostituendo alla considerazione del massimo dei numeri $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}$, quella del minimo. Naturalmente le disuguaglianze verranno tutte cambiate di senso, e le (7) verranno sostituite dalle $x_s^{(r)} > x_s - \varepsilon$; si dovrà, perciò, tener conto dell'osservazione fatta alla fine del n. 1. Qui il limite delle $x_s^{(r)}$ risulta certamente maggiore od uguale al minimo dei numeri $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ (sempre maggiore se queste x non sono tutte eguali).

5. Si consideri *l'algoritmo d'iterazione* definito dalle equazioni

$$f_1^{(r+1)}(x_1^{(r+1)}) = F_1^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$$

$$f_2^{(r+1)}(x_2^{(r+1)}) = F_2^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$$

$$f_3^{(r+1)}(x_3^{(r+1)}) = F_3^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) \quad ,$$

dove le $F^{(r+1)}$ sono scelte con una determinata legge fra le (4).

Quest'algoritmo è di quelli che chiamansi *mutabili* perchè le sue equazioni di definizione possono mutare ad ogni punto dell'iterazione.

Si fissi un r e sia $x_1^{(r+1)}$ il massimo (o uno dei massimi) dei numeri $x_1^{(r+1)}, x_2^{(r+1)}, x_3^{(r+1)}$, i quali risultano, perciò, tutti minori od eguali alla soluzione dell'equazione in $x_s^{(r+1)}$

$$f_s^{(r+1)}(x_s^{(r+1)}) = F_s^{(r+1)}(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)}) .$$

È allora verificata la condizione della proposizione del n. 3 e possiamo dire che *l'algoritmo definito dalle equazioni precedenti è convergente, ed è*

$$\lim_{r=\infty} x_1^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_2^{(r)} = \lim_{r=\infty} x_3^{(r)} .$$

Da questa dimostrazione segue, per un'osservazione fatta alla fine del n. 3, che il limite comune delle $x_s^{(r)}$ è minore od uguale al massimo dei valori iniziali $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$.

La nostra proposizione si può però ottenere considerando, invece del massimo dei numeri $x_1^{(r+1)}, x_2^{(r+1)}, x_3^{(r+1)}$, il minimo ed applicando ciò che si è detto al n. 4: risulta, allora, che il limite comune delle $x_s^{(r)}$ è maggiore od uguale al minimo dei valori iniziali.

Si conclude, perciò, che il limite delle $x_s^{(r)}$ è compreso tra il minimo ed il massimo dei valori iniziali $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ (ed è certamente maggiore del minimo e minore del massimo se minimo e massimo non coincidono).

Matematica. — *Sulla sviluppabilità in serie degli integrali delle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Socio Pincherle.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Determinazioni astronomiche di latitudine eseguite nella Specola geodetica dell' Università di Genova nel 1908.* Nota di U. Barbieri, presentata dal Corrispondente V. Reina.

Nell'anno 1907, alla cattedra di Geodesia teoretica nell'Università di Genova, veniva, con provvida disposizione ministeriale, altresì aggiunto un Gabinetto. Essendo stato in tale anno chiamato a coprire la cattedra anzidetta, ritenni quindi opportuno procedere alla costituzione di una specola geodetica, al suo collegamento con la rete trigonometrica dello Stato, e alla determinazione delle sue coordinate astronomiche.

A questo scopo, fu costrutto, sul ripiano superiore della torre annessa all'Osservatorio meteorologico dell'Università, un robusto pilastro in muratura, attorno al quale, appoggiato sui muri perimetrali della torre, venne disteso un pavimento in legno; una copertura, con largo sportello in meridiano dall'un estremo all'altro del tetto, doveva poi dar riparo durante le osservazioni, e permettere al tempo stesso, il loro svolgimento.

Il collegamento geodetico venne subito iniziato, e condotto a termine entro la primavera del 1908; esso fu appoggiato ai tre vertici di prim'ordine: Istituto Idrografico della R. Marina in Genova, Monte del Telegrafo, e Semaforo di Capo Noli.

Successivamente, nell'estate del 1908, e nella primavera del 1909, furono eseguite determinazioni astronomiche di latitudine e azimut.

Sia per le determinazioni geodetiche, che per le astronomiche, gli strumenti mi furono cortesemente forniti dall'Istituto Idrografico della Marina in Genova, alla cui Direzione mi è oggi grato obbligo esprimere la più viva mia gratitudine.

Le osservazioni di latitudine si svolsero dal 22 luglio al 17 agosto 1909: si seguirono due metodi; dapprima quello classico delle *distanze zenitali circummeridiane*, di poi il metodo delle *distanze zenitali meridiane* di stelle fondamentali, culminanti a sud e a nord dello zenit, metodo già impiegato su larga scala, e meritata fortuna dal prof. V. Reina nelle sue « Determinazioni astronomiche di latitudine e di azimut lungo il meridiano di Roma ».

Lo strumento adoperato in entrambi i procedimenti fu un *Universale Pistor* e *Martins*, a cannocchiale eccentrico; nel primo metodo poi, oltre al cronografo, si adoperò, per il tempo, un cronometro *Ch. Frodsham*, a tempo siderale.

Il programma stabilito assegnava 6 notti d'osservazione a ciascun metodo, con reiterazione di 30° del cerchio zenitale da una notte all'altra; le condizioni atmosferiche, peraltro, vollero, con la loro incostanza, notevolmente alterare il programma medesimo, come apparirà dagli specchi in appresso riportati.

In tutte le determinazioni, sia di latitudine che di azimut, le posizioni apparenti delle stelle furono tolte dal Berliner astronomisches Jahrbuch.

Riserbandomi di render conto in una prossima Nota del secondo dei due metodi impiegati nelle determinazioni di latitudine, mi permetto di esporre nella presente un breve riassunto dei risultati ottenuti col

Metodo delle distanze zenitali circummeridiane.

Le osservazioni relative a questo procedimento si svolsero dal 22 luglio al 1° agosto. Le stelle sud furono scelte in guisa che la loro distanza zenitale differisse assai poco da quella della Polare, con la quale si osservarono in successione alterna, e ugual numero di volte.

Le eventuali incertezze nella determinazione della correzione del cronometro, furono eliminate col distribuire i puntamenti delle equatoriali simmetricamente al meridiano, riuscendo a ciò in modo quasi perfetto; l'angolo orario massimo tenuto fu di soli 14^m, e, in fine, i puntamenti della Polare vennero distribuiti in regioni diverse della sua traiettoria diurna apparente, effettuando le osservazioni anche al mattino.

Negli intervalli fra le puntate della Polare e delle equatoriali, si prendevano i dati di pressione atmosferica e di temperatura, necessarî al calcolo della rifrazione.

Il valore della parte della livelletta zenitale, da me determinato prima e dopo le osservazioni, sul comparatore della Scuola d'Applicazione degli Ingegneri in Roma, risultò di 1",21.

Le correzioni del cronometro Frodsham, determinate col *metodo di Döllen*, accoppiando una stella sud con la Polare, in ciascuna delle due posizioni cerchio est, cerchio ovest, risultarono nelle varie sere le seguenti:

22 luglio	(α Cor. boreal.	con α Serpentis)	a $15^h,35^m$	K = + $0^m.57^s,00$
23 "	(" "	" ")	" "	56,74
26 "	(" "	con ε Cor. bor.)	" 15,42	56,15
27 "	(" "	con α Serpentis)	" 15,35	57,29
28 "	(α Bootis	con β Librae)	" 14,42	56,14
31 "	(δ Ophiuci	con [λ Ophiuci])	" 16,18	54,80
1 agosto	(η Ophiuci	con [27 H Oph.])	" 17,13	53,72

Da queste correzioni vennero dedotti gli andamenti giornalieri ed orarî del cronometro.

I risultati conseguiti nella determinazione di latitudine vengono riassunti nello specchio seguente:

STELLA	Istante medio della serie di osservazione	Numero delle doppie osservazioni	Latitudine	Latitudine media dalla Polare	Latitudine media dalle Equatoriali
		28 luglio 1908. $z = 0°$			
α Ursae minoris	17h 05m	3	44° 24′ 56″, 97	44° 24′ 56″, 98	
" "	18h 19m	2	58″, 41		
" "	19h 34m	2	55″, 56		
[λ Ophiuci]	—	3	48″, 33		48″, 76
β Ophiuci	—	2	48″, 01		
λ Aquilae	—	3	49″, 69		
		26 luglio. $z = 0°$			
α Ursae minoris	17h 01m	2	44° 24′ 56″, 05	44° 24′ 56″, 05	
β Ophiuci	—	3	49″, 97		50″, 78
λ Aquilae	—	2	52″, 00		
		27 luglio. $z = 30°$			
α Ursae minoris	15h 52m	2	44° 24′ 53″, 49	44° 24′ 55″, 95	
" "	17h 05m	3	55″, 67		
" "	18h 20m	4	57″, 42		
" "	19h 33m	4	55″, 92		
[λ Ophiuci]	—	4	49″, 24		50″, 54
β Ophiuci	—	4	51″, 15		
λ Aqnilae	—	4	50″, 85		
δ Aquilae	—	3	51″, 07		
		28 luglio. $z = 60°$			
α Ursae minoris	15h 29m	3	44° 24′ 54″, 77	44° 24′ 56″, 26	
" "	17h 04m	3	56″, 69		
" "	18h 45m	2	57″, 84		
[λ Ophiuci]	—	3	50″, 32		49″, 73
β Ophiuci	—	4	49″, 41		
η Serpentis	—	4	49″, 61		
		31 luglio (mattino). $z = 90°$			
α Ursae minoris	4h 37m	3	44° 24′ 55″, 27	44° 24′ 55″, 17	
" "	5h 41m	2	55″, 01		
β Orionis	—	2	50″, 31		49″, 84
α Orionis	—	2	49″, 37		

STELLA	Istante medio della serie di osservazione	Numero delle doppie osservazioni	Latitudine	Latitudine media { dalla Polare / dalle Equatoriali
		1 agosto (mattino). $z = 120°$		
α Ursae minoris	2h 34m	2	44° 24′ 55″, 24	
» »	3h 29m	4	55″, 40	44° 24′ 55″, 88
» »	4h 11m	4	55″, 55	
» »	6h 33m	3	57″, 37	
α Ceti	—	1	48″, 66	
β Orionis	—	3	50″, 83	50″, 65
α Orionis	—	4	51″, 01	
		1 agosto (sera). $z = 150°$		
α Ursae minoris	15h 00m	4	44° 24′ 55″, 69	44° 24′ 55″, 13
» »	15h 30m	4	54″, 56	
δ Ophiuci	—	4	49″, 47	
β Ophiuci	—	1	48″, 15	49″, 21

Nella terza colonna di questo quadro sono registrati i numeri delle doppie osservazioni fatte su ogni stella, nelle due posizioni coniugate dello strumento; nella quarta i valori della latitudine rappresentati dalle medie delle doppie osservazioni; nella quinta le medie distinte, per la Polare e le equatoriali, dei valori registrati nella quarta colonna, ai quali si attribuirono i pesi dati nella terza.

Queste medie mostrano chiaramente l'influenza d'una notevole flessione nel lungo cannocchiale eccentrico dello strumento.

Questa influenza può ancor opportunamente porsi in evidenza nell'ulteriore quadro seguente, dove nelle colonne successive alla prima, vengono, per ogni stella, riportate le medie delle latitudini da essa dedotte nelle sere in cui la stella medesima fu osservata; i numeri fra parentesi rappresentano le doppie osservazioni da cui si dedussero le medie anzidette; nella antipenultima linea sono indicate le medie ponderate formate assumendo quei numeri come pesi; nella penultima i pesi relativi alle medie ponderate, e nell'ultima i valori di sen z, medie di quelli corrispondenti ai diversi puntamenti della Polare e delle differenti stelle sud.

	Polare	[λ Ophiuci]	β Ophiuci	λ Aquilae	δ Aquilae	η Serpentis	α Ceti	β Orionis	α Orionis	δ Ophiuci
	44° 24′	44° 24′	44° 24′	44° 24′	44°, 24′	44° 24′	44° 24′	44° 24′	44° 24′	44° 24′
23 luglio	56″, 98(7)	48″, 33(3)	48″, 01(2)	49″, 69(3)	—	—	—	—	—	—
26 "	56″, 05(2)	—	49″, 97(3)	52″, 00(2)	—	—	—	—	—	—
27 "	55″, 95(13)	49″, 24(4)	51″, 15(4)	50″, 85(4)	51″, 07(3)	—	—	—	—	—
28 "	56″, 26(8)	50″, 32(3)	49″, 41(4)	—	—	49″, 61(4)	—	—	—	—
31 " (mattino)	55″, 17(5)	—	—	—	—	—	—	50″, 31(2)	49″, 37(2)	—
1 agosto (mattino)	55″, 88(13)	—	—	—	—	—	48″, 66(1)	50″, 83(3)	51″, 01(4)	—
1 " (sera) . .	55″, 13(8)	—	48″, 15(1)	—	—	—	—	—	—	49″, 47(4)
Media ponderata .	55″, 92	49″, 29	49″, 74	50″, 72	51″, 07	49″, 61	48″, 66	50″, 62	50″, 46	49″, 47
Pesi	56	10	14	9	3	4	1	5	6	4
sen z	0,716	0,672	0,640	0,760	0,714	0,736	0,652	0,796	0,602	0,742

Se ora di indica con φ' un valor prossimo della latitudine, con $\Delta\varphi$ la sua correzione, con φ_0 il valore osservato, con z la distanza zenitale, e con k la costante di flessione, si ha, com'è noto, l'equazione generatrice

$$\Delta\varphi \pm k \operatorname{sen} z + (\varphi' - \varphi_0) = 0 \qquad \begin{array}{l} + \text{ per la Polare} \\ - \text{ per le stelle sud.} \end{array}$$

In corrispondenza ai risultati delle osservazioni precedenti, potranno, quindi, stabilirsi 10 equazioni generate, alle quali andranno attribuiti i pesi segnati nella penultima linea del quadro precedente.

Adottando il valore prossimo

$$\varphi' = 44^\circ\, 24'\, 53'',00\,,$$

e trattando le anzidette equazioni nel modo consueto, si ottiene il seguente sistema di equazioni normali:

$$\begin{aligned} 112\,\Delta\varphi + 1,269\,k + 4,690 &= 0 \\ 1,269\,\Delta\varphi + 55,846\,k - 232,936 &= 0\,, \end{aligned}$$

da cui si ricavano per le incognite i valori

$$\Delta\varphi = -\,0'',09 \qquad k = 4'',17\,.$$

Se ne deduce quindi, per la latitudine astronomica della Specola della Università di Genova il valore

$$\varphi = 44^\circ\, 24'\, 52'',91 \pm 0'',17$$
$$(\text{Epoca } 1908\,,\, 56)$$

da 112 doppie osservazioni circummeridiane.

Fisica — *Sulle anomalie del fenomeno Zeeman*. Replica al dott. M. Tenani, di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Nella sua Nota del 20 giugno 1909 il dott. Tenani scriveva: « La scintilla aveva una lunghezza di circa 2 mm. e si poteva ragionevolmente ritenerla immersa in un campo uniforme ». Avendo io, all'opposto, trovato che nel senso longitudinale si hanno variazioni del campo di circa il 27 % su 2 mm., mentre le anomalie segnalate dal Tenani variano dal 6 al 10 %, ritenni che ce ne fosse abbastanza per elevare dei dubbii sulla validità dei suoi risulati, in vista specialmente dello sconvolgimento che essi porterebbero nelle nostre conoscenze sull'ottica e la magnetoottica. E mi pareva che questi dubbii si dovessero imporre anche al sig Tenani. Egli invece afferma recisamente: « o le sorgenti non erano così estese come il Corbino ammette, o il campo

non era nel mio caso così inomogeneo come risulta dalle sue esperienze ». E a poco a poco finisce col lasciar credere che anche nelle mie condizioni il campo non doveva poi essere tanto poco omogeneo quanto appare, e che il difetto sarebbe non nel campo, ma nel metodo.

A me preme anzitutto rimuovere ogni contestazione sulle grandi variazioni del campo che avevo segnalate.

L' influenza dello spessore della vaschetta sui risultati ottenuti fu da me esaminata, in modo che non poteva dar luogo a dubbî, fin dalla prima Nota; vi ritornai più estesamente nella seconda. Dimostrai, cioè, che l' errore effettivo nel valore del campo così determinato, era inferiore, in qualunque punto, al 4 $^0/_0$, e che le variazioni dell' errore da punto a punto, dalle quali dipende la sospettata deformazione delle frange, è perciò di gran lunga minore.

Ma questi presunti errori sono, nel caso delle masse polari adottate dal Tenani, assolutamente nulli. Si può dimostrare infatti facilmente che, poichè le curve di *eguale birifrangenza* sono in tal caso (in prossimità dell' asse) delle rette ad esso normali, anche il gradiente del campo dev' essere esattamente nullo nel senso trasversale, e che perciò l' avere la vaschetta uno spessore non piccolissimo, non perturba affatto i risultati, in quanto questi rivelano un così forte gradiente nel senso longitudinale ([1]).

Che questo gradiente sia così elevato non può del resto meravigliare; poichè sono prospicienti a pochi millimetri di distanza una faccetta piana e un foro, circondato da un contorno piano più largo. Il sistema è analogo, in certa guisa, a un condensatore piano costituito da un piatto cui stia di fronte un grande anello di guardia, senza il relativo piatto centrale; il campo lungo l' asse deve cioè necessariamente decrescere in modo graduale fino a un valore assai piccolo nelle vicinanze del foro.

Deve invece meravigliare che il Tenani, collocando un tubo Geissler speciale in modo che il capillare occupi longitudinalmente l' intero spazio tra

([1]) Il Tenani accenna in nota a una perturbazione possibile dovuta alla migrazione dei corpuscoli nel campo non uniforme per effetto della differenza tra la loro permeabilità e quella del liquido.

L' istantaneità con cui le frange assumono la loro forma definitiva che poi conservano nei 5 minuti che dura la posa fotografica, permette di escludere degli effetti di questo genere, Del resto è ben noto che i granuli in questione, nei liquidi *negativi* da me usati, hanno dimensioni piccolissime che permettono appena di farli *intravedere* all' ultra-microscopio, e che perciò essi migrano con estrema lentezza contro l' azione eguagliatrice dall' agitazione termica, così come discendono insensibilmente sotto l' azione del peso. Un lievissimo effetto di tempo ottenni invece coi granuli più grossi, quasi microscopici, dei liquidi *positivi*, in ricerche intraprese per altro scopo.

Del resto tutte le esperienze sul fenomeno Majorana conducono sensibilmente alla legge di proporzionalità tra la birifrangenza e il quadrato del campo, senza influenza del tempo durante [il quale il liquido è sottoposto alla sua azione, o del volume totale del liquido, che si può trovare in parte nelle regioni ove il campo è meno intenso.

il piano ed il foro, abbia ottenuto « un bellissimo *triplet*, ove le righe laterali spiccano nettissime altrettanto quanto la riga mediana » malgrado la disposizione non stigmatica dello spettrografo. Se questa esperienza fosse attendibile, non più la magnetoottica sarebbe in giuoco, ma ogni idea corrente sulla distribuzione delle linee di forza in un campo; sarà perciò più ragionevole il ritenere che qualche accidente abbia dato origine a questo singolarissimo risultato.

Quanto alle dimensioni della sorgente luminosa, il Tenani rinunzia, opportunamente, a difendere le prime esperienze eseguite con scintille tra poli di magnesio e di cadmio, in base alle quali affermò l'esistenza della grave anomalia. Restano le esperienze col tubo Geissler a vapori di mercurio, i cui risultati, dichiara il Tenani, furono dati soltanto in via provvisoria. E come provvisorî, io aggiungerò, devono in realtà essere considerati se si osserva che « le misure sui *clichès* si effettuavano con un comparatore che poteva dare il centesimo di millimetro » e che l'anomalia constatata la cui misura richiedeva ben *quattro* puntate distinte « sul massimo d'impressione di ciascuna delle quattro righe » era solo di *due* centesimi di millimetro.

Ma ammettiamo pure che, malgrado tuttociò, la distanza delle componenti esterne del *triplet* superi effettivamente quella del *doublet*, di due centesimi di millimetro, cioè del 6 %.

Benchè il filetto luminoso occupi solo una parte del capillare per le azioni elettrodinamiche dovute al campo dell'elettromagnete, le grandi variazioni del campo da me trovate offrono un ben ampio margine per spiegare l'osservata anomalia.

Infatti anche col valore del gradiente da me trovato quando i poli erano a 7 mm. di distanza (non è escluso che il gradiente fosse maggiore nelle esperienze del Tenani se i poli erano più vicini), basta che il filetto luminoso si addossi al capillare in un segmento di cerchio limitato da una corda di 0,44 mm., perchè in esso il campo varii del 6 %; *vi corrisponde una sezione del filetto luminoso eguale appena a tre millesimi di quella del capillare.*

Or può garantire il Tenani che nelle sue esperienze il filetto occupasse una ancor più piccola parte della sezione del capillare? E che cosa prova, per il nostro scopo, l'avere trovato il Paschen che in un capillare più sottile la sezione del filetto era inferiore a quella del tubo, quando tutto era diverso nelle due esperienze?

Nessuno esige che egli precipiti la pubblicazione delle ricerche in corso con tubi sottili, per quanto apparisca più consigliabile eliminare anzitutto la dissimetria delle masse polari per avere un campo più uniforme, e occorrendo, sostituire al reticolo un apparato spettroscopico più potente. Ma intanto io non posso che confermare la mia conclusione, già molto benevola, che cioè l'esistenza del fenomeno paradossale annunziato dal Tenani va posta ancora sotto riserva.

Riguardo poi alla sua asserzione, che farebbe dipendere l'essenza del mio metodo da un'osservazione fugacemente fatta dallo Schmauss e riguardante un fenomeno di ben altra natura ed entità, ognuno può giudicare dal richiamo che ne fa lo stesso Tenani in fine della sua pubblicazione, e dalla lettura delle mie Note, quanto l'asserzione stessa sia fondata. Ma tutto ciò non ha alcuna importanza per l'oggetto in discussione; poichè certo non la priorità del metodo può interessare il Tenani, nè io intendo obbligarlo a sostenere, nell'interesse di un terzo, una tesi difficile di priorità o di affinità, sulla quale certamente lo stesso Schmauss non sarebbe d'accordo con lui.

Fisica matematica. — *Estensione d'una formola di Fresnel ai mezzi cristallini eterogenei.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

Chimica. — *Sulla precipitazione del fosfomolibdato ammonico in presenza di acidi organici.* Nota di G. MADERNA, presentata dal Socio R. NASINI.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Bournonite di Val di Castello (Pietrasanta)* [1]. Nota di UGO PANICHI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

La bournonite in cristalli è piuttosto rara in Italia; anzi le sole località finora citate sono Val di Castello ed il Sarrabus. Fu A. D'Achiardi [2] che nel 1871 riconobbe per bournonite alcuni cristalletti impiantati in un campione avuto dal De Stefani e proveniente dalla galleria di S. Barbara dell'Argentiera presso Val di Castello; ma quei cristalli non si prestarono nè a misure goniometriche, nè allo studio delle geminazioni. In seguito nessun altro parlò della bournonite di Val di Castello. Di bournonite italiana solo il Millosevich ha descritto recentemente [3] alcuni cristalli provenienti dalle miniere del Sarrabus, che sogliono presentarsi in gruppi cruciformi di quattro

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

[2] Boll. Comit. Geol. Italiano, 1871, pag. 164 e Miner. della Toscana, 1873, II, pag. 335.

[3] *Appunti di mineralogia sarda. Bournonite del Sarrabus.* Rend. R. Acc. Lincei. Roma, 1906.

individui, nei quali egli ha riconosciuto le forme }100{, }010{, }001{, }110{, }320{, }011{, }111{, }121{, }112{.

Io ho avuto la fortuna di trovare nuovi cristalli di bournonite atti a buone misure cristallografiche. Questi trovati da me non sono della galleria di S. Barbara (dove non ho trovato altra bournonite), ma sono invece della galleria della Fontana (740 m. sul livello del mare), fra i Quattro Metati e S. Anna [1].

Giacimento. — Oltrechè per la rarità della bournonite in Italia, mi pare che questa della galleria della Fontana presenti uno speciale interesse anche per le sue condizioni di giacimento.

L'ingresso della galleria è scavato nel calcare cavernoso; ma poi la galleria penetra nel sottostante schisto, segnato nella Carta del Comitato Geologico come sericitico (Trias sup.), il quale, come è noto, è a sua volta sovrapposto agli schisti paleozoici, in cui sono incise le gallerie del Bottino.

Entrando nella galleria della Fontana, dopo pochi passi comincia una discenderìa molto ripida, in fondo alla quale si aprono due gallerie, una a sinistra, in direzione del Bottino, l'altra in avanti, un po' a destra; questa ultima, dopo una trentina di metri, volge a NNO e, dopo altri pochi metri si dirama in tre vie, delle quali quella diretta a NO conduce, in pochi passi, al giacimento della bournonite. Ivi la galleria presenta la vôlta, e in parte anche la parete alla destra di chi vi arriva, tappezzati di minuti cristallini bianchi, gialli e rosso-bruni, molto lucenti e molto freschi di *Calcite*, *Mesitina*, *Siderite* e carbonati affini. Predominano i gialli, ma anche i bruni vi sono abbondanti.

Siccome queste gallerie sono state scavate (in parte dagli antichi Etruschi, in parte nel Medio Evo e, in minor parte, anche in tempi recenti) seguendo sempre i filoncelli metalliferi, oggi, che i filoncelli, colla loro matrice, sono vuotati, vôlta e pareti mostrano al nudo la roccia incassante, salvo che incrostazioni formatesi posteriormente ce la nascondano. Alla Fontana la roccia è lo schisto sopraricordato, sfaldabile con facilità parallelamente o quasi alla vôlta della galleria. Vôlta e pareti non portano qui traccia della ganga del filone, nè dei minerali metalliferi in esso contenuti; non barite, non galena, non calcopirite, i quali sono appunto i minerali che di qui si estraevano. Le cristallizzazioni dei carbonati suddetti tappezzano, come incrostazioni, la galleria, seguendo le sinuosità della vôlta e della parete; i cristalli hanno abito romboedrico, faccie storte e lucenti, e dimensioni fra 2 e 3 mm. Qualche limpido cristallino di *Gesso* e qualche masse-

[1] Debbo alla cortesia del proprietario delle miniere di Val di Castello, sig. Daniele Gemignani, l'aver potuto visitare più volte quelle miniere. E qui mi è grato esprimergli la mia gratitudine.

rella di *Malachite* si trovano in mezzo ad essi. Più raramente in mezzo *ed anche sopra* ai carbonati si trovano cristalli di *Bournonite* (1).

Dalle cose dette mi pare che sorga spontaneo di ritenere molto probabile l'origine secondaria di queste formazioni. Un dubbio forse potrebbe affacciarsi e cioè che in questo luogo esistesse una cavità naturale e che l'attuale vôlta, colle sue cristallizzazioni, sia proprio una parete di quella cavità; ciò forse troverebbe appoggio nel fatto che ivi la galleria è alquanto allargata ed irregolare. Ma queste irregolarità sono comuni nelle gallerie di Val di Castello, e, d'altra parte, sembra strano che i lavori di escavazione della galleria e di trasporto del materiale in un ambiente così angusto e basso, non abbiano, in tanti secoli, sciupato minimamente questi cristalli (quelli di Bournonite son fragilissimi) tuttora freschi ed intatti.

Il fenomeno, del resto, è frequente per quel che riguarda i carbonati; è, forse, nuovo per la bournonite, la quale suole invece trovarsi come materiale di filone associata con solfuri e solfosali di prima formazione, come a Kapnik, a Neudorf (giacimento citato anche da Breithaupt quale esempio di paragenesi di bournonite con quarzo, siderite, galena, calcopirite), in Cornovaglia ecc. Ma, l'aver trovato qualche cristallo di bournonite impiantato sopra i cristalli di mesitina, porta a concludere che, se i carbonati si son formati, come pare evidente, dopo l'esistenza della galleria, lo stesso deve dirsi della bournonite.

Forme. — I cristalli di bournonite sono tabulari secondo }001{ e con dimensioni lineari di 3-5 mm.; sono ricchi di faccie tutte liscie, dotate di lucentezza metallica e molto somiglianti fra loro per aspetto fisico.

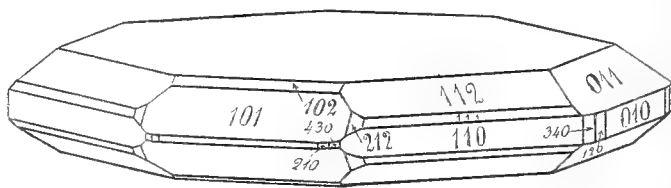



Fig. 1.

Le forme da me accertate sono le seguenti:

a {100}	*m* {110}	*o* {101}	*n* {011}	*y* {111}
b {010}	*e* {210}	*x* {102}		*u* {112}
c {001}	*f* {120}			*s* {212}
	ϑ {430}			
	ω {340}			

(1) Per gentilezza del prof. G. D'Achiardi ho potuto esaminare l'unico campione di

La forma più sviluppata è sempre la *c*; tengono dietro, per sviluppo, le forme *m*, *u*, *o*, *n*; poi *y*, *s*; e poi le altre.

Confrontando questo risultato con quello di A. D'Achiardi, il quale, parlando dei cristalli di S. Barbara dice che « sembrano composti dall'unione di due domi (forse 011 e 101) e dai pinacoidi 100, 010, 001, essendo la base prevalente per la sua grande estensione », pare che i cristalli di S. Barbara e quelli della Fontana si presentino con abito affatto diverso; infatti, mentre egli osservò la presenza dei pinacoidi e non quella del prisma, nella bournonite della Fontana esistono invece insieme i pinacoidi e il prisma, con grandissima predominanza di questo su quelli. Ma forse anche si può invece supporre che i cristalli delle due località abbiano abito somigliante, riflettendo che i cristalli avuti dal D'Achiardi non erano atti a misure, tanto che egli saviamente dice solo che *sembrano* ecc. Ora è noto che può con facilità confondersi nella bournonite la forma {110} colla coppia di forme {100} {010}, (e solo determinazioni goniometriche possono in molti casi essere decisive), sia perchè in varie località, note come giacimenti di bournonite, suole talvolta avere predominanza la forma {110} sui pinacoidi {100}, {010}, tal'altra invece suole avvenire il contrario; sia, sovrattutto, per via delle frequenti poligeminazioni, giacchè, come osserva anche il Miers [1], l'angolo di due faccie di {110} di un individuo può essere di 86°,20′ o di 93°,40′ e gli stessi valori si trovano tra faccie di {100} e {010} esistenti rispettivamente in due individui geminati; così pure l'angolo di due faccie di {110} di due individui geminati, che è 7°,20′ si può ritrovare anche fra due faccie rispettivamente dei due detti pinacoidi nel caso di una trigeminazione. Valga ad es. il *Rädelerz* di Kapnik, in cui l'angolo di 7°,20′ è stato da Hessemberg [2] attribuito a due faccie di {110}, mentre il Miers lo attribuisce a due faccie rispettivamente di {100} e {010}.

Il seguente prospetto di valori angolari rivela una piccola divergenza fra i valori calcolati dalle costanti del Miller ed i valori osservati. Ma, come osserva Miers (l. c., pag. 67), nella bournonite tali divergenze sono frequenti anche fra cristalli di una stessa località e solo mediante un grande numero di misure su molti cristalli suole avvenire di avvicinarsi alle costanti del Miller. Ma io avevo a disposizione un troppo scarso materiale e perciò non ritenni opportuna la determinazione di nuove costanti

---

bournonite della galleria di S. Barbara (ora nel Museo di Pisa), il quale differisce non poco dai miei; esso è formato da una piccola massa di siderite con barite, che reca impiantati alcuni cristalletti assai imperfetti di bournonite e, da una parte, serba traccia dello schisto, a cui evidentemente la massa stava attaccata.

(1) A. H. Miers, *The crystallograhy of Bournonite.* Min. Mag. a. Journ. of London, VI, 1886.

(2) Mineralogische Notizen, V, pag. 32.

Spigoli misurati	N.	Valori estremi	Medie	Valori calcolati
100:110	3	43°.01′ -43°.11′	43°.05′	43°.10′
010:110	2	46.39 -46.39	46.39	46.50
110:210	1	—	18.11 ca	18.02
110:120	1	—	18.33	18.46
110:430	1	—	8.14	8.02
110:340	1	—	8.26	8.11
100:101	2	46.25 -46.30	46.27. 30	46.17
101:102	2	17.31 -18,01	17.46	18.10
010:011	3	47.37 -48.00	47.45	48.06 .45
111:110	7	37.11 -37.53	37.28	37.20
110:112	4	56.43 -56.51	56.45	56.45
212:001	1	—	46.39	46.34
212:101	2	17.51 -17.55	17.53	15.57 .30

Geminati. — Il caso più semplice di geminazione nella bournonite è quello di due cristalli uniti per justaposizione con piano di geminazione secondo {110}; la quale poi, per ripetizione in posizione parallela, dà frequentemente luogo a geminazioni polisintetiche.

Ma nei casi più complessi di poligeminazioni cruciformi e rotiformi non sempre è facile formarsi un criterio esatto e completo di esse. Così ad es. il Rädelerz di Kapnik presenterebbe, secondo Zirkel e Sadebeck, due gemini compenetrantisi, a ciascuno dei quali sono uniti in geminazione altri individui; mentre, secondo Hessemberg e secondo Peck, si avrebbero non due gemini, ma due coppie di gemini in justaposizione; secondo Miers si sarebbe in presenza di una poligeminazione radiale, formata da una successione di cristalli justaposti, con piani di geminazione alternativamente paralleli all'una od all'altra coppia di faccie di {110}.

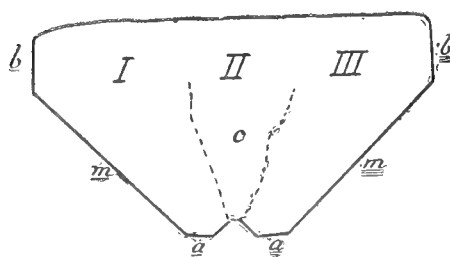
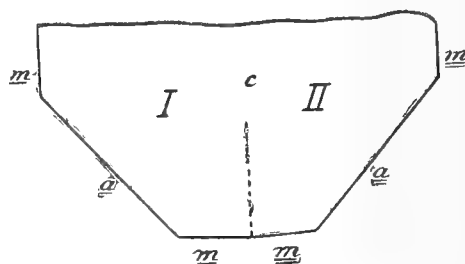



Fig. 2. Fig. 3.

Esaminando i gruppi delle figg. 2 e 3, si vede subito che questi geminati di Val di Castello possono spiegarsi come justaposizioni.

Il gruppo della fig. 2, mostra evidenti due cristalli, I e III, i quali non sono uniti in geminazione secondo {010}, come sembra a primo sguardo, perchè le faccie $\underline{b}, \underline{\underline{b}}$ non sono parallele, ma fanno un angolo di circa 187°,20′; le faccie $\underline{a}, \underline{\underline{a}}$ fanno perciò un angolo di circa 7°,20′ (verificato al goniometro) e quindi è da escludere anche il caso di una semplice geminazione secondo {110{, la quale darebbe invece $\widehat{\underline{a}\,\underline{\underline{a}}} = 3°,40'$. Mi pare che la cosa possa spiegarsi ammettendo i cristalli I e III legati coll'intermezzo di un cristallo II geminato con ambedue e precisamente col cristallo I secondo una coppia di faccie di {110} e col III secondo l'altra coppia. Questa combinazione è frequente nella bournonite, come ad es. ha riscontrato il Peck [1] in bournoniti del Přibram, di Horhausen, ecc. Nel gruppo ora descritto, che è incompleto essendo impiantato sopra un cristallo di mesitina, il cristallo II non appare in modo evidente; ma l'ampia rientranza fra le faccie $\underline{a}, \underline{\underline{a}}$, e le suture di geminazione visibili sulla faccia c ne rendono probabile l'esistenza.

La fig. 3 mostra un altro gruppo; in questo è evidente la legge di geminazione, che è quella abituale secondo {110}; è da notare che mentre nel gruppo della fig. 2 sono appena visibili le faccie di {100} e ben visibili quelle di {010}, qui invece sono esterne e in evidenza le faccie di {100} e non visibili quelle di {010}.

Aggiungiamo infine che i due gruppi ora descritti sono in realtà un poco più complessi di quanto sopra è detto, inquantochè i due cristalli aggruppati sono a loro volta composti di altri individui. La cosa è specialmente visibile esaminando le faccie di }110{ e le altre della zona [1$\bar{1}$0]; una faccia di {110} ad es. dà al goniometro più riflessi, e, corrispondentemente, si osserva che essa è in realtà costituita da più faccie che si succedono formando angoli di pochi gradi, ora sporgenti, ora rientranti. Per quanto io abbia accuratamente misurato questi angoli, nulla di concreto ne so dedurre; sembra solo che ciò costituisca una conferma di quanto fu già osservato da v. Rath [2] e da Miers (l. c.), essere cioè frequenti nella bournonite associazioni quasi parallele di cristalli, le cui faccie {001} sono però parallele.

L'altra tendenza, già constatata nei cristalli di Herodsfoot e di Kapnik, ad avvolgimenti elicoidali, non fu ancora osservata nella bournonite di Val di Castello.

[1] F. B. Peck, *Beitrag zur krystallographischen Kenntnis des Bournonit*, etc. Zeit. f. Kryst. von Groth, XXVII, 1897, pag. 299.

[2] *Ueber eine seltsame Verwachsung von Bournonit-Krystallen.* Zeit. f. Kryst. u. Min., 1877, I, pag. 602.

Mineralogia. — *Studio microscopico della meteorite caduta a Vigarano Pieve presso Ferrara, nel gennaio 1910.* Nota di Aristide Rosati, presentata dal Socio G. Struever.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisiologia. — *Il tempo di reazione sull'alta montagna* (¹). Nota del dott. Alberto Aggazzotti, presentata dal Socio A. Mosso.

In un'altra pubblicazione studiai i disturbi funzionali che si manifestano nel sistema nervoso centrale degli animali sottoposti a fortissime rarefazioni, e dimostrai, che questi disturbi non sono sempre gli stessi nelle diverse razze, e specie di animali; ma che « i sintomi di malessere, negli animali meno evoluti sono specialmente sintomi di eccitamento e riguardano la sfera midollare, mentre che negli animali più evoluti e nell'uomo, sono specialmente di depressione ed interessano in prevalenza la sfera cerebrale ».

Nelle suddette esperienze, fatte colla campana pneumatica, si raggiungevano delle rarefazioni di $^1/_4$, $^1/_5$ di atmosfera; rarefazioni tanto forti non si hanno sulle nostre montagne più alte, perciò quivi le alterazioni del sistema nervoso centrale sono molto meno evidenti e spesso apparentemente anche mancanti. Per mettere in evidenza i disturbi funzionali anche piccoli, esistenti nel sistema nervoso centrale dell'uomo durante il suo soggiorno a grandi altezze, il metodo migliore è di determinare il tempo di reazione alle diverse sensazioni.

Misurando il tempo di reazione noi giudichiamo sperimentalmente e obiettivamente dell'attività dei centri superiori. Vero è che il tempo di reazione non è un fenomeno semplice e dipende da varî fattori; ma fra questi il fattore psichico è certamente il più importante. Il tempo perduto dai centri per trasformare la sensazione prodotta dall'eccitamento centripeto in impulso motore lungo i nervi di moto, è maggiore che il tempo perduto nella trasmissione dell'impulso stesso lungo i nervi di senso prima e di moto poscia. Il periodo latente della contrazione muscolare (la quale noi consideriamo come indice dell'avvenuta percezione), lo stadio latente dello stimolo di senso nell'organo periferico, il tempo di inerzia degli apparecchi e di tutto il sistema, sono fattori secondarî, e probabilmente immutabili nelle diverse esperienze.

(¹) Dai Laboratorî scientifici A. Mosso, sul monte Rosa.

Nelle ricerche che ora descriverò, mi sono limitato allo studio del tempo di reazione alle sensazioni acustiche e luminose, e al tempo di discernimento fra due diverse sensazioni acustiche. Le esperienze vennero fatte a Torino (240 m.), al Colle D'Olen (3000 m.) e alla Capanna Regina Margherita (4560 m.). Le prime ricerche furono incominciate nell'estate 1908 al Colle D'Olen e alla Capanna Regina Margherita ed in queste ebbi come collaboratore il dott. G. Ganter, poi esse furono completate nell'estate 1909. Nelle determinazioni fatte all'Olen nel 1908, si ottennero come valori del tempo di reazione, delle cifre molto alte, per le sensazioni acustiche in media 0,250 minuti secondi e per le sensazioni luminose 0,250. Essendo questi valori molto superiori ai valori ottenuti a Torino, alla Capanna Regina Margherita, e a quelli avuti l'anno dopo nuovamente all'Olen, dubitammo che essi non fossero giusti, e che vi fosse stata una causa di errore, perciò non se ne tenne alcun conto.

Il tempo di reazione fu determinato col metodo cronoscopico. Non starò a descrivere la tecnica usata e il dispositivo, essendo già il metodo cronoscopico a tutti noto; dirò soltanto che come stimoli acustici ci servimmo del rumore fatto chiudendo improvvisamente con forza lo stesso tasto elettrico che serviva da interruttore nel circuito dell'orologio di Hipp. Come stimolo luminoso ci servimmo dell'illuminazione improvvisa di un tubo di Geissner, visibile a traverso un vetro colorato che poteva essere o rosso o verde.

Per fare le determinazioni del tempo di discernimento oltre al rumore di chiusura del tasto, si facevano altri rumori, percuotendo un martello sul tavolo. Questi rumori si succedevano in modo vario e irregolare e la persona in esperimento doveva reagire soltanto agli stimoli acustici prodotti dal tasto. È noto che in tali condizioni il tempo di reazione è molto più lungo, poichè al semplice processo mentale di percezione, si aggiunge l'atto intellettuale di distinguere l'uno stimolo dall'altro, v. Kries e Auerbach (1) hanno dimostrato che il tempo di discernimento è più breve quando il tono degli stimoli acustici è alto, nel nostro caso non si può specificare come fosse il tono trattandosi di rumori, ma tenendo presente il fatto suddetto ebbi cura che in tutte le esperienze il rumore fosse sempre lo stesso.

Nessun segnale di « attenti » veniva dato prima di fare lo stimolo sensitivo, ma succedendosi questi regolarmente, la persona in esperimento poteva benissimo concentrare la sua attenzione al momento in cui doveva succedere lo stimolo.

Le esperienze vennero generalmente fatte al mattino, dopo due ora circa dalla prima colazione, essendo ben riposati e tranquilli. Le esperienze alla Capanna Regina Margherita furono incominciate nello stesso giorno dell'ascensione. La salita fu compiuta in una sola tappa dall'Olen alla Capanna Mar-

(1) v. Kries und Auerbach, *Die Zeitdauer einfacher psychischer Vorgange, Dubois'*, Archiv für Phys., 1877, 297.

gherita (1560 m. di dislivello) ma senza grande sforzo, essendo la neve buonissima ed essendo tanto io che il dott. Ganter ben allenati all'alta montagna.

Nella tabella seguente sono segnati tutti i valori ottenuti nelle diverse serie di esperienze, eccetto quelli fatti all'Olen nel 1908. Ogni valore della tabella è la media aritmetica di 15-20 determinazioni fatte di seguito. I tempi di reazione che risultavano eccessivamente lunghi per evidente disattenzione del soggetto, furono eliminati dalle medie.

Dopo ogni esperienza l'orologio di Hipp veniva controllato coll'apparecchio a caduta, così i valori ottenuti del tempo di reazione furono successivamente corretti secondo i valori assoluti in minuti secondi forniti dall'apparecchio a caduta. Il controllo, coll'apparecchio a caduta, era in queste esperienze doppiamente necessario, per accertarci che durante il trasporto degli apparecchi sino all'Olen coi muli, e sino alla Capanna Margherita coi portatori, essi non si fossero in qualche modo guastati.

Tempo di reazione a Torino (Aggazzotti, 1908 e 1909)

Data	Sensazioni acustiche	Sensazioni luminose		Tempo di discernimento	Durata del discernim.
		verdi	rosse		
8-I-1908	0,117	0,148	0,152	0,224	0,107
9- » - »	0,135	0,144	0,150	0,225	0,095
11- » - »	0,119	0,148	0,161	0,225	0,116
12- » - »	0,120	0,152	0,158	0,229	0,119
12-II-1909	0,118	0,155	0,152	0,130	0,126
14- » - »	0,124	0,150	0,152	0,130	0,096
16- » - »	0,122	0,150	0,159	0,221	0,099
Media	0,121	0,149	0,153	0,225	0,105

al Colle d'Olen (Aggazzotti, 1909)

Data	Sensazioni acustiche	verdi	rosse	Tempo di discernimento	Durata del discernim.
17-VIII-1909	0,130	0,165	0,160	0,224	0,094
18- » - »	0,131	0,138	0,152	0,220	0,089
19- » - »	0,129	0,161	—	0,222	0,093
19- » - »	0,126	0,145	0,158	0,229	0,103
20- » - »	0,127	0,174	0,145	0,219	0,092
23- » - »	0,120	0,150	0,145	0,221	0,091
26- » - »	0,136	0,154	0,162	0,221	0,085
27- » - »	0,134	0,148	0,157	0,226	0,092
	0,129	0,154	0,154	0,221	0,092

alla Capanna Regina Margherita (Aggazzotti, 1908)

18-VIII-1908	0,122	0,190	0,171	0,222	0,100
19- » - »	0,140	0,167	0,171	0,230	0,090
19- » - »	0,125	0,188	0,191	0,222	0,097
20- » - »	0,140	0,170	0,182	0,223	0,083
	0,141	0,178	0,178	0,224	0,093

(Ganter, 1908)

18-VIII-1908	0,124	0,163	0,163	0,188	0,064
19- » - »	0,141	0,174	0,164	0,192	0,051
19- » - »	0,117	0,175	0,178	0,194	0,077
20- » - »	0,122	0,179	0,175	0,184	0,052
	0,128	0,172	0,170	0,189	0,064

Se confrontiamo i risultati ottenuti a Torino, all'Olen e alla Capanna Regina Margherita, noi vediamo che il tempo di reazione, sia alle sensazioni acustiche che luminose, è sull'alta montagna lievissimamente cambiato. Al Colle d'Olen il tempo di reazione alle sensazioni acustiche è di 8 millesimi di secondo più lungo che a Torino; il tempo di reazione alle sensazioni luminose di color verde 5 millesimi di secondo più lungo e quelle di color rosso 1 millesimo. Alla Capanna Regina Margherita il tempo di reazione alle sensazioni acustiche è 10 millesimi di secondo più lungo che a Torino, quello per le sensazioni luminose verdi 29 e per le rosse 25 millesimi di secondo. Non mi è stato possibile mettere in evidenza una diversa durata del tempo di reazione fra le sensazioni luminose verdi e rosse, come si vede dai valori della tabella. È noto che i diversi sperimentatori non sono d'accordo sul tempo di reazione alle diverse sensazioni.

Il tempo di discernimento fra due sensazioni acustiche non si modifica sull'alta montagna, esso rimane in media 22 centesimi di secondo come a Torino. La durata del discernimento, calcolata sottraendo il tempo di reazione senza discernimento dal tempo di reazione con discernimento, assume valori lievemente più bassi sull'alta montagna. Non si può affermare che ciò stia in relazione col fatto facile ad osservare che spesso le persone che soggiornano nelle capanne sulle alte montagne mostrano un carattere più eccitabile del solito. Questo fatto si verifica soltanto in quelle persone che non sono troppo affaticate dall'ascensione e che non soffrono mal di montagna; in quest'ultimo caso, al contrario, noi troviamo una marcatissima depressione nervosa, con apatia e indifferenza completa a qualsiasi stimolo morale, a qualsiasi incitamento. È noto come questo stato di profondo torpore nervoso riesca spesso fatale agli alpinisti nelle difficili ascensioni sulle alte mon-

tagne, perchè perdono ogni energia e sopraffatti dall'avvilimento, si lasciano morire di freddo sulla neve o sul ghiaccio, anzichè tentare di superare l'ostacolo con un ultimo sforzo o riprendere la via del ritorno.

Già nell'estate del 1906 il prof. Durig con alcuni collaboratori (¹) aveva fatto alla Capanna Regina Margherita delle osservazioni sulla durata dei più semplici processi psichici, misurando il tempo di reazione alle sensazioni acustiche e la durata del tempo di discernimento. La relazione di queste esperienze fu pubblicata solo molto più tardi (1909), e quando faceva le mie esperienze sul tempo di reazione, non sapevo che questo fosse già stato oggetto di studio sull'alta montagna. Le esperienze del prof. Durig furono fatte col Neuramoebimeter di Exner (²) e il risultato ottenuto si avvicina molto al nostro, infatti egli conclude che l'alta montagna non ha un'evidente influenza sui nostri processi psichici.

Negli individui colpiti da male di montagna è probabile che il tempo di reazione e anche il tempo di discernimento siano molto più lunghi di quello riscontrato all'Olen e alla Capanna Regina Margherita nelle persone in riposo; gli individui con mal di montagna, in generale, oltre l'azione dell'aria rarefatta, risentono gli effetti di un grave affaticamento generale di tutto il corpo. La stanchezza se è lieve abbrevia il tempo di reazione, mentre se è profonda lo rallenta, unitamente a tutti gli altri fenomeni psichici, memoria, immaginazione, attenzione.

Poichè, durante il mio soggiorno al Colle d'Olen, avevo spesso l'occasione di fare lunghe marcie, ho creduto interessante anche di vedere se il tempo di reazione si modificasse in modo rilevante dopo la fatica sull'alta montagna.

In una di queste esperienze facemmo con alcuni colleghi 21 ore di marcia in due tappe e nello spazio di 36 ore andando dall'Olen a Macugnaga e ritornando il giorno dopo all'Istituto. Arrivammo tutti molto stanchi, sebbene fossimo allenati, giacchè da un mese ci trovavamo al Colle D'Olen e avevamo fatte molte altre marcie e ascensioni. Partimmo alle 6 del mattino dall'Istituto A. Mosso (3000 m.) e arrivammo a Macugnaga (1300 m.) alle 15, avendo passato prima il vallone di Bors (2000 m.) e poi valicato il passo del Turlo (3100 m.). Il giorno dopo partimmo alle 5 del mattino da Macugnaga per il ritorno e, cambiando strada, risalimmo il ghiacciaio delle Loccie (3600 m.) e raggiungemmo nuovamente l'Istituto alla sera alle 19, dopo essere discesi prima sino a 2000 metri circa, per passare il vallone

(¹) A. Durig, *Physiologische ergebnisse der im Jahre 1906 durchgefuhrten Monte Rosa-expedition (Ueber die einfacher psychischer Vorgange unter den Einflusse des Höhenklimas)*; H. Reichel, *Denkschriften der Kais.* Akademie der Wissenschaften, Wien (1909) Bd. LXXXVI.

(²) S. Exner, *Experimentelle Untersuchungen der einfachsten psichischen Processe*, Pflüger's Archiv, 7, 601, (1873).

Sesia. La marcia fu fatta portando nel sacco da montagna da 5-6 kg. di carico. Un ora dopo l'arrivo, essendomi prima un po' rifocillato e avendo bevuto una tazza di thè caldo, feci una serie di 20 determinazioni del tempo di reazione ottenendo i seguenti valori:

Sensaz. acustiche	Sensaz. luminose verdi	Sensaz. luminose rosse	Tempo di discernim.
0,190	0,225	0,219	0,299

Come si vede il tempo di reazione alle sensazioni acustiche e visive è molto più lungo che in condizioni normali e in riposo; così dicasi anche del tempo di discernimento. Non avendo potuto fare al piano una marcia altrettanto lunga e faticosa, non posso dire se il tempo di reazione subisca anche qui per effetto della fatica, un così lungo ritardo.

Dopo le marcie di poche ore (3-4) non osservai mai al Colle d'Olen un rallentamento degli atti psichici, anzi verificai sempre un accorciamento che variava da 4-8 millesimi di minuto secondo, sia per le sensazioni acustiche, che per le visive. Le passeggiate fatte sul ghiacciaio, col riflesso anche fortissimo della neve nuova, non modificano in modo speciale il tempo di reazione alle sensazioni visive.

Concludendo, da queste esperienze noi abbiamo veduto che sull'alta montagna, quando l'organismo è in riposo, il tempo di reazione alle sensazioni acustiche e luminose è leggerissimamente aumentato: ma che esso diventa molto più lungo del normale nei casi in cui all'azione dell'aria rarefatta si aggiunge l'affaticamento.

La funzione del sistema nervoso centrale sull'alta montagna e nell'individuo riposato, non è quindi alterata in modo evidente, ma essa si turba profondamente solo nella fatica.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente Blaserna presenta alcuni fascicoli della « Rivista Chilena de Historia natural » offerti dal prof. Carlos E. Porter, e ne parla.

Il Socio Gatti offre una relazione del prof. A. Pirocchi « Sulla migliore utilizzazione del latte scremato nell'alimentazione dei vitelli » dando notizia dei risultati cui l'autore è pervenuto.

Il Segretario Millosevich presenta l'opera del prof. Baratta: « La catastrofe sismica Calabro-Messinese. Relazione alla Società Geografica italiana » e parla della sua importanza.

CORRISPONDENZA

Il Presidente BLASERNA dà notizia alla Classe delle adunanze tenute nella sede accademica dall'Associazione internazionale delle Accademie, di cui ricorda gli scopi, ponendo in rilievo la importanza sulle questioni trattate (sulle quali si riserba di presentare fra breve una relazione contenente i processi verbali delle adunanze) e l'alto e sereno accordo che si mantenne in tutte le discussioni.

Il prof. GATTI crede che sia dovere dell'Accademia di ringraziare il suo Presidente delle cure e dell'attività colle quali seppe far sì che le adunanze dell'Associazione riuscissero in modo perfetto, lasciando un gratissimo ricordo in tutti i Delegati stranieri intervenuti alla riunione di Roma.

Altre parole di congratulazione aggiungono il Presidente D'OVIDIO e il Corrisp. RIVOIRA; il Socio MILLOSEVICH si rallegra a nome dell'Accademia col senatore BLASERNA per la sua nomina a Corrispondente dell'Istituto di Francia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta del 1º maggio 1910.

ALASIA C. — L'equazione di Laplace. (Estr. dalla « Rivista di Fisica, Mat. e Sc. natur. », an. VIII). Pavia, 1907. 8°.

BALL R. — Contributions to the theory of Screws. (From the « Proceedings of the Royal Irish Academy », v. XXVIII). Dublin, 1910. 8°.

DEL GUERCIO G. — Intorno a due nemici nuovi dell'olivo e alle gravi alterazioni che essi determinano. (Estr. dal « Redia », v. VI). Firenze, 1910. 8°.

EJIKMANN P. H. — L'internationalisme médical. (Fondation pour l'internationalisme). Amsterdam, 1910. 8°.

LUIGGI L. — Come dovrebberö esser migliorati i nostri porti. (Estr. dagli « Atti del Congresso veneto degli Ingegneri, 1908). Venezia, 1908. 8°.

LUIGGI L. — Il faro di S. Martino della battaglia. (Lago di Garda). s. l., 1909. 8°.

LUIGGI L. — I mezzi di raddobbo per navi esistenti nei porti italiani. (Estr. dagli « Annali della Società degli Ing. e Arch. italiani », an. 1908). Roma, 1908. 8°.

LUIGGI L. — Le costruzioni marittime al principio del XX secolo. (Estr. dagli « Annali della Soc. degli Ingegneri e degli Architetti ital. », an. 1907). Roma, 1907. 8°.

LUIGGI L. — Le opere marittime più adatte ai porti italiani. Roma, 1909. 8°.

LUIGGI L. — Quel che ho veduto a Reggio e a Messina. Impressioni di viaggio. (Estr. dalla « Nuova Antologia », 1909). Roma, 1909. 8°.

LUIGGI L. — Quel che ho veduto a Reggio e a Messina. (Estr. da « Conferenze e Prolusioni », anno II, n. 14). Roma, 1909. 8°.

LUIGGI L. — Rapports entre les Mathématiques et l'art de l'Ingénieur. (Estr. dagli « Atti del IV Congresso internaz. dei Matematici », vol. III). Roma, 1909. 8°.

MARTIN L. — Étude comparée universelle synoptique en 57 langues des noms donnés aux dix premiers nobres dans tous les *Monuments scientifiques* à travers tous les siècles, depuis quatre mille ans avant Jésus Christ. Paris, 1907. fol.

RIBAGA COST. — Anisopsocus lichenophilus. Nuovo copeognato trovato in Italia. (Estr. dal « Redia », v. VI). Firenze, 1910. 8°.

RONCAGLI G. — La marina libera e il premio di traffico. (Estr. dalla « Nuova Antologia », 1909). Roma, 1909. 8°.

RONCAGLI G. — Il premio di traffico. (Estr. dalla « Rivista Marittima », 1909). Roma, 1909. 8°.

SILVESTRI F. — Contribuzioni alla conoscenza degli insetti dannosi e dei loro simbionti. I. Galerucella dell'olmo. (Galerucella luteola F. Müller). (Estr. dal « Bollettino del Lab. di Zool. della R. Sc. sup. d'Agr. di Portici », v. IV). Portici, 1910. 8°.

SILVESTRI F. — Metamorfosi del Cybocephalus rufifrons Reitter, e notizie sui suoi costumi. (Estratto dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia gener. e agr. della R. Scuola sup. d'Agr. di Portici », v. IV). Portici, 1910. 8°.

THIELE J. — Zu Jakob Volhard's Gedächtnis. s. l. e s. d. 8°.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 9°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1909).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. Fasc 3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE
AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — *Roma, Torino* e *Firenze.*
ULRICO HOEPLI. — *Milano, Pisa* e *Napoli.*

RENDICONTI — Maggio 1910.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 22 maggio 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PRESENTAZIONE DI LIBRI

CORRISPONDENZA

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 5 giugno 1910.* **N. 11.**

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 giugno 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 11°

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume; due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei; qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell'art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all'autore. - *d*) Colla semplice proposta dell'invio della Memoria agli Archivi dell'Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall'art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell'ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 giugno 1910.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra un'estensione di un teorema di Lindelöf nel calcolo delle variazioni.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Nel problema della superficie minima di rotazione, un arco AB di catenaria

$$y = m \cosh \frac{x}{m}$$

ha effettivamente la proprietà di minimo allora ed allora soltanto quando le tangenti negli estremi A, B si incontrano prima della direttrice $y = 0$ (asse di rotazione).

Il caso in cui le tangenti in A, B vanno ad incontrarsi precisamente sulla direttrice è particolarmente notevole. In tal caso gli estremi A, B sono coniugati nel senso di Jacobi e sussiste l'elegante proprietà scoperta da Lindelöf: *L'area generata dalla rotazione dell'arco* AB *di catenaria è eguale alla somma delle superficie laterali dei due coni generati dai tratti rettilinei* AC, BC *delle tangenti in* A, B *fino all'incontro in* C *colla direttrice.*

Non so che sia stata osservata la generalizzazione seguente del teorema di Lindelöf.

Le catenarie di direttrice $y = 0$ sono le curve estremali per l'integrale a limiti fissi

$$J = \int y \, ds$$

e il teorema di Lindelöf, nell'ipotesi che A , B siano coniugati, si scrive colla formola

$$J_{AB} = J_{AC} + J_{BC}\,, \tag{1}$$

l'integrale del primo membro essendo esteso all'arco AB di estremale e quelli del secondo ai due tratti di tangenti AC , BC. La generalizzazione indicata consiste in ciò che: *la formola* (1), *e quindi il teorema di Lindelöf, sussiste ancora per le curve estremali dell'integrale*

$$J = \int y^p\, ds\,,$$

ove l'esponente p si supponga soltanto positivo. Per es. per $p = \frac{1}{2}$ questo integrale rappresenta, a meno di un fattore costante, l'azione di Maupertuis relativa alla forza di gravità e il teorema di Lindelöf dice che l'azione nel moto di un punto pesante per un arco parabolico AB, ad estremi coniugati, è eguale alla somma delle azioni pei tratti rettilinei tangenti AC , BC, che si incontrano in C sulla direttrice della parabola.

Lo stesso teorema generalizzato di Lindelöf può ricevere, come si vedrà, una interpretazione geometrica notevole per gli archi geodetici tracciati sulle superficie evolute di quelle superficie per le quali il rapporto dei raggi principali di curvatura è una costante negativa.

2. Ricordo dapprima alcune proprietà delle curve estremali per l'integrale

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y^p \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,, \tag{2}$$

con esponente p positivo, sviluppate da pagina 127 a 130 del recente libro di Hadamard [1], aggiungendovi alcune considerazioni complementari.

L'equazione differenziale d'Eulero

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0\,,$$

per la funzione $f = y^p \sqrt{1 + y'^2}$ sotto il segno integrale in (2), si scrive

$$\frac{yy''}{1 + y'^2} = p\,, \tag{3}$$

e, essendo y'' positiva con y, la curva estremale volge costantemente la convessità verso la direttrice $y = 0$. Scrivendo la (3) così

$$\frac{y\sqrt{1 + y'^2}}{\dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}} = p\,,$$

[1] *Leçons sur le calcul des variations,* tome I, Paris, Hermann (1910).

si vede che: *Le curve estremali del nostro problema sono quelle per le quali la normale ed il raggio di curvatura sono rivolti in verso contrario ed hanno il rapporto costante* $= p$.

Facendo rotare queste curve attorno alla direttrice si hanno dunque le superficie di rotazione coi raggi principali di curvatura opposti in segno ed in rapporto costante. Ne risulta anche subito che la doppia infinità di estremali si ottiene da una curva estremale fissa combinando una traslazione nel senso della direttrice con una omotetia col centro su questa retta.

Dall' integrale primo

$$y^p \frac{dx}{ds} = m^p \quad (m \text{ costante})$$

dell'equazione (3) d'Eulero si trae per l'equazione in termini finiti della estremale

$$x = c \pm \int_m^y \frac{m^p \, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} .$$

Essendo qui p positivo, ogni punto della curva (escluso il vertice) ha uno ed un solo punto coniugato; due punti coniugati sono da parti opposte del vertice e le tangenti in essi si segano sulla direttrice (Hadamard, loc. cit., e Bolza, *Variationsrechnung*, pag. 80).

3. Per dimostrare il teorema generalizzato di Lindelöf, cioè la formola (1), scriviamo per semplicità l'equazione della curva estremale

$$x = \pm \int_m^y \frac{m^p dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} , \tag{4}$$

avendo fatto passare l'asse delle y pel vertice $V \equiv (0, m)$. Siano

$$A \equiv (x_1, y_1) \quad , \quad B \equiv (x_2, y_2)$$

due punti coniugati sull'estremale (4), onde saranno le ascisse x_1, x_2 di segno contrario poniamo $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, e si avrà quindi

$$x_1 = - m^p \int_m^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} \quad , \quad x_2 = m^p \int_m^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} . \tag{5}$$

Le tangenti in A, B, di equazioni

$$\begin{cases} y - y_1 = - \dfrac{1}{m^p} \sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}} \, (x - x_1) \\ y - y_2 = \dfrac{1}{m^p} \sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}} \, (x - x_2) \end{cases} \tag{6}$$

passano per un medesimo punto $C \equiv (\xi, 0)$ della direttrice e sussistono quindi, per le (4), (5), le formole

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{y_1}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} - \displaystyle\int_m^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = \frac{\xi}{m^p}, \\ \dfrac{y_2}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}} - \displaystyle\int_m^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = -\frac{\xi}{m^p}. \end{cases}$$

Per l'estremale (4) l'elemento d'arco è

$$ds = \frac{y^p\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}$$

e l'integrale fondamentale J prende la forma

$$J = \int \frac{y^{2p}\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}};$$

avremo quindi

$$(8) \qquad J_{AB} = \int_m^{y_1} \frac{y^{2p}\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} + \int_m^{y_2} \frac{y^{2p}\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}}.$$

Calcoliamo ora i valori degli integrali

$$J_{AC}, J_{BC},$$

estesi ai tratti rettilinei di tangenti AC, BC. Lungo il tratto AC abbiamo per es. per la (7)

$$ds = \frac{y_1^p}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}}\, dy,$$

e quindi

$$J_{AC} = \frac{y_1^p}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} \int_m^{y_1} y^p\, dy = \frac{1}{p+1} \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}},$$

e similmente

$$J_{BC} = \frac{1}{p+1} \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}}.$$

L'eguaglianza (1) è contenuta nella formola

$$(9) \qquad (p+1) \int_m^{y_1} \frac{y^{2p}\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} + (p+1) \int_m^{y_2} \frac{y^{2p}\, dy}{\sqrt{y^{2p} - m^{2p}}} = \\ = \frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p} - m^{2p}}} + \frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p} - m^{2p}}},$$

che dobbiamo dunque verificare.

Differenziando $y\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}$ abbiamo

$$d\left(y\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}\right)=\frac{(p+1)\,y^{2p}-m^{2p}}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\,dy\,,$$

e integrando da m ad y_1, risulta l'identità

$$\int_m^{y_1}\frac{(p+1)\,y^{2p}-m^{2p}}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\,dy=y_1\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}=\frac{y_1^{2p+1}-m^{2p}\,y_1}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}}\,,$$

che possiamo scrivere

$$\frac{y_1^{2p+1}}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}}-(p+1)\int_m^{y_1}\frac{y^{2p}\,dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}=$$
$$=m^{2p}\left\{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^{2p}-m^{2p}}}-\int_m^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\right\}.$$

Sommando questa coll'identità analoga in y_2

$$\frac{y_2^{2p+1}}{\sqrt{y_2^{2p}-m^{2p}}}-(p+1)\int_m^{y_2}\frac{y^{2p}\,dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}=$$
$$=m^{2p}\left\{\frac{y_2}{\sqrt{y_2^{2p}-m^{2p}}}-\int_m^{y_2}\frac{dy}{\sqrt{y^{2p}-m^{2p}}}\right\},$$

ed osservando che, a causa delle (7), i secondi membri sono eguali e di segno contrario, si ottiene appunto la (9). Il teorema generalizzato di Lindelöf è così dimostrato.

4. Si può riguardare l'elemento d'integrale (2) come elemento lineare *ds* di una moltiplicità a due dimensioni definita da

$$ds^2=y^{2p}(dx^2+dy^2)\,, \tag{10}$$

ed il problema di minimizzare l'integrale J corrisponde allora a ricercare le linee geodetiche in questa moltiplicità.

È notevole che le superficie dello spazio ordinario alle quali appartiene l'elemento lineare (10) non sono altro, come ora vedremo, che le superficie generate dalla rotazione delle evolute delle nostre curve estremali attorno alla direttrice. In generale il ds^2 dato dalla (10) appartiene (secondo il teorema di Weingarten) alle evolute di quelle superficie i cui raggi principali di curvatura sono in rapporto costante negativo.

Ma per dare la nuova interpretazione geometrica del teorema generalizzato di Lindelöf conviene dapprima prescindere da ogni particolare forma di superficie realizzante l'elemento lineare (10) e riguardare, al modo di Riemann-Beltrami, la moltiplicità generale a due dimensioni definita, in

tutta la sua estensione, dalla (10) stessa. Allora il piano xy non è che un piano rappresentativo per la nostra moltiplicità, che su di esso viene colla (10) rappresentata in modo *conforme*. Le curve estremali sono le immagini delle linee geodetiche, mentre le rette del piano xy vengono a rappresentare le *lossodromiche* della moltiplicità, cioè le trajettorie isogonali dei meridiani $x =$ costante.

Dopo queste osservazioni, ove si consideri sulla multiplicità (10) un arco geodetico AB i cui estremi A, B siano coniugati nel senso di Jacobi [1], si può enunciare il teorema di Lindelöf generalizzato sotto la forma seguente:

Le due lossodromiche tangenti all'arco geodetico AB *nei due estremi coniugati* A, B *si incontrano in un punto* C, *e l'arco geodetico* AB *è eguale alla somma dei due archi lossodromici* AC, BC.

Ritornando ora alla curva estremale (4), si ha pel suo raggio ϱ di curvatura

$$\varrho = \frac{y^{p+1}}{m^p}$$

e per l'ordinata r del centro di curvatura

$$r = y + \frac{1 + y'^2}{y''} = \frac{p+1}{p} y .$$

Poichè l'arco u della evoluta è precisamente ϱ, si vede che r è proporzionale alla potenza $u^{\frac{1}{p+1}}$ dell'arco, e quindi se questa evoluta rota attorno alla direttrice, l'elemento lineare della superficie di rotazione generata sarà

$$ds^2 = du^2 + u^{\frac{2}{p+1}} dv^2 . \tag{11}$$

Se qui si opera un cangiamento di parametri u, v ponendo

$$u = \frac{p}{p+1} y^{\frac{p+1}{p}} \quad , \quad v = \frac{p+1}{p} x ,$$

la (11) si converte in

$$ds^2 = y^{\frac{2}{p}} (dx^2 + dy^2)$$

che è la (10) stessa, cangiato p in $\frac{1}{p}$ [2].

[1] Si noti che la curvatura K della moltiplicità (10) è data da

$$K = \frac{p}{y^{2p+2}} ,$$

onde è essenzialmente positiva.

[2] La stessa cosa risulta dall'applicare le formole generali del teorema di Wein-

L'elemento lineare (10) appartiene dunque in effetto alle superficie di rotazione che hanno per meridiani le evolute delle nostre curve estremali e per asse di rotazione la direttrice. Su queste superficie si presenta però un parallelo cuspidale, corrispondente alla cuspide della evoluta o al vertice della curva estremale. La rappresentazione sopra una tale superficie della metrica definita dalla (10) resta per ciò incompleta e il teorema di Lindelöf sopra enunciato ha qui un significato soltanto ove si consideri la differenza fra l'arco geodetico AB e gli archi lossodromici tangenti terminati al parallelo cuspidale; questa differenza, sempre positiva, tende a zero quando, deformando la superficie di rotazione, si faccia tendere a zero il raggio del parallelo di regresso.

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie rigate applicabili sul catenoide.* Nota del Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Biologia. — *Gli ovarioli delle fillossere.* Nota (24ª) del Socio B. Grassi.

Riassumo qui brevemente le mie ricerche intorno agli ovarioli della fillossera della vite, rimandando per la letteratura dell'argomento all'opera in corso di stampa, nella quale sono riunite tutte le ricerche mie e dei miei scolari sulle *Phylloxerinae*, corredate delle notizie storiche raccolte con la massima scrupolosità.

Allo studio degli ovarioli sono stato condotto da quelle esperienze, le quali ci avevano dato la certezza che nella fillossera della vite una stessa forma può diventare alata sessupara ovvero attera virginopara, ovvero ninfale, ordinariamente virginopara, eccezionalmente sessupara. I risultati anche in queste esperienze, come sempre, erano state controllate (ciò che non solevasi fare nello studio degli Afidini) da allevamenti in capsula di Petri seguiti giorno per giorno; il rigore con cui essi furono condotti è dimostrato già dal fatto che le mute delle *Chermesidae* da tutti ritenute tre vennero dimostrate essere invece in numero di quattro dalla dott. Foà, che con esattezza e pazienza fece e portò a termine questa parte del lavoro.

---

garten alle superficie W coi raggi di curvatura legati dalla relazione $\frac{r_2}{r_1} = -\frac{1}{p}$, e si vede altresì che l'elemento lineare (10) appartiene alla superficie *complementare* di quella generata dalla evoluta.

Dal momento che una medesima larva può diventare virginopara o sessupara, e cioè, può essere portata a fare uova di virginopara (femmina) invece di uova di maschio, si deve ammettere la possibilità dell'inversione del sesso. Ammessa l'inversione, l'interpretazione che si può dare a questo fenomeno non è così semplice come si potrebbe credere a tutta prima. Infatti io ebbi già a pubblicare che l'ottenere un maschio ovvero una femmina (avente o no bisogno di essere fecondata) può essere subordinato allo sviluppo di certe uova comitato a soppressione di certe altre, ovvero alla determinazione per l'uno o per l'altro sesso di un medesimo uovo, capace di dar luogo tanto ad un maschio quanto ad una femmina; soltanto in questo secondo caso si dovrebbe parlare di una vera e propria inversione di sesso.

Per tentare di decidere a quale delle due interpretazioni dobbiamo attenerci nel nostro caso speciale, ho intrapreso una serie di osservazioni sugli ovarioli della fillossera della vite, in parte da solo, ed in parte colla mia assistente dott. Foà.

Nelle fillossere neonate (gallecole figlie delle fondatrici) abbiamo trovato invece di distinti ovarioli, due listerelle longitudinali ripartite per il trasverso in tante porzioncine; nelle prime larve nate da qualche tempo, anche se ancora non fissate, si distinguono già gli ovarioli, di cui due-tre anteriori leggermente più sviluppati. In queste condizioni si trovano gli ovarioli anche nelle forme ibernanti prima del risveglio. Essi appaiono alquanto cresciuti prima della muta (prime larve gallecole già fissatesi). Il numero degli ovarioli è per lo più di 10 paia circa (ossia 10 a destra e 10 a sinistra) nelle ibernanti; può arrivare fino a 25-30 nelle prime larve delle fondatrici e gareggiare con questo numero, mantenendosi però un po' inferiore, anche nelle prime larve figlie delle fondatrici neogallecole gallecole: sulle neogallecole radicicole non abbiamo ancora fatto osservazioni).

Noi non abbiamo notato diminuzione di numero degli ovarioli fino agli stadî avanzati. Nelle ibernanti sulle radici grosse si riscontra lo stesso numero di ovarioli che nelle ibernanti sulle nodosità (viti americane); in queste gli ovarioli maturano quasi tutti; in quelle ne maturano appena 4-6-10 in tutto, si deve perciò ammettere che parecchi ovarioli degenerino verso l'ultima muta. Limitato è anche il numero degli ovarioli che maturano nelle fondatrici (gallecole) sviluppatesi sulle viti europee. Nelle figlie delle ibernanti si può sviluppare una gran parte delle dieci paia circa di ovarioli della prima larva. Così press'a poco si comportano anche le ninfali virginopare. È certo che tutt'e dieci queste paia di ovarioli della prima larva possono svilupparsi interamente nelle attere virginopare.

Nella preninfa noi ritroviamo ancora dieci paia circa di ovarioli come nelle prime larve neoradicicole. Lo stesso reperto si ha nella ninfa giovane (occhi composti con poche faccette): gli ovarioli anteriori, come sempre, sono alquanto più sviluppati. Più tardi avviene la scomparsa di sei-sette paia di

ovarioli posteriori, ossia restano soltanto gli anteriori, cioè i più grandi e questi vanno avanti a svilupparsi e possono perfino in certi casi già avvicinarsi alle dimensioni definitive prima che la ninfa sia diventata alata [1].

In rapporto dunque col fatto che l'alata sessupara fa pochissime uova notiamo la scomparsa degli ovarioli posteriori. Questi ovarioli devono venire riassorbiti rapidamente. Contemporaneamente avviene un altro fenomeno. Com'è noto, nel lacunoma della fillossera si trovano cellule grandi col protoplasma più o meno granuloso interpretate come pseudovitello dal Krassilstschik e tali ritenute anche dal Dreyfus ed altre cellule che non raggiungono mai le massime dimensioni delle prime, che il Dreyfus denomina x e che appartengono alla poco ben nota categoria degli enociti (forse esistono forme di passaggio da queste alle cellule pseudovitelline) [2]. Le cellule granulose invece di sempre più ingrandire, come accade nelle virginopare attere radicicole e gallecole, nelle ninfe impiccoliscono e finiscono per scomparire in gran parte: anche quelle x diminuiscono di numero.

I qui descritti fenomeni risaltano benissimo osservando una ninfa in cui gli ovarioli siano già ridotti a pochi, ovvero confrontando le sezioni di un'alata con quelle di una radicicola o gallecola adulta. Come essi si svolgano, lo ignoriamo ancora.

Noi possiamo fino ad un certo punto distinguere tre tappe differenti alle quali corrispondono differenti gradi di sviluppo degli occhi composti e della muscolatura alare delle ninfe:

1) ninfe più giovani con tutti gli ovarioli, senza un uovo ben distinto, con cellule pseudovitelline e cellule x nell'addome;

2) ninfe meno giovani con tutti gli ovarioli, di cui gli anteriori presentano un uovo ben distinto; del resto per le cellule speciali, come le ninfe 1);

3) ninfe prossime a diventare alate con due-tre paia di ovarioli ognuno con due uova, uno più sviluppato dell'altro e più o meno grosso, senza cellule pseudovitelline e con un numero piccolo di cellule x.

Non sono rare però le eccezioni, soprattutto le eterocronie, nello svolgimento dei suddetti fenomeni.

È certo che diventano sessupari quegli ovarioli che per primi maturerebbero nelle virginopare attere e anche nelle ninfali.

Se ora studiamo minutamente gli ovarioli, vediamo che ad un certo momento (per es. nella preninfa) diventano evidentissime:

1) le cellule nutritizie, cuneiformi o quasi col nucleo, che si colora per lo più intensamente;

(1) Nelle ninfe, pronte a mutare, delle virginopare alate della *Ph. quercus* notasi già un certo numero di uova aventi dimensioni definitive.

(2) Nelle cellule pseudovitelline vi sono (in varie fillossere della quercia e forse anche in quelle della vite) certi corpuscoli che ritengo parassiti, fenomeno che trova riscontro negli altri omotteri (Šulc).

2) le cellule epiteliali dei follicoli e dei condottini di ciascun ovariolo;

3) gli oociti (alla parte di mezzo dell'ovariolo) riconoscibili dalla forma tondeggiante e dal nucleo che in generale poco intensamente si colora.

Uno di questi oociti precocemente presentasi un po' più grande degli altri e cresce notevolmente (uovo). In ogni ovariolo si formano parecchi oociti tanto nelle preninfe, quanto nelle premadri e di essi soltanto due in generale vanno avanti a svilupparsi nella ninfa e nell'alata (uno matura e l'altro no), quattro e più invece nella attera. Data questa complicazione di cose sorge il dubbio che accada nella *Phylloxera* qualcosa di simile a quanto ammette il Reuter nel *Pediculopsis* che, cioè, le uova d'una madre siano almeno di due sorta e quelle di una sorta sola vadano avanti a svilupparsi, escludendo così il vero cambiamento di sesso. Io non posso attualmente approfondire l'interessante questione, ma spero di poter affidare tal compito a qualche scolaro [1].

È importante notare che dopo la seconda muta (quella precedente la muta che produce le ninfe) si riconoscono per caratteri varî le forme che in generale diventano ninfe (preninfe) (Foà). In questo stadio noi non sapremmo però coi soli caratteri degli ovarioli distinguere le future sessupare dalle future virginopare: del resto già dagli esperimenti si poteva indubbiamente arguire che non doveva esservi differenza, potendo le preninfe diventare anche ninfali virginopare (Foà).

Astrofisica — *Osservazioni astrofisiche della cometa Halley, eseguite nell'Osservatorio di Catania.* Nota preliminare del Corrispondente A. Riccò.

Matematica. — *Sugli ordini degli infiniti.* Nota del Corrispondente G. Peano.

Chimica. — *Sopra la decomposizione di alcuni sali d'argento.* Nota del Corrispondente A. Angeli e di L. Alessandri.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Quanto alle sessuate è d'uopo notare che noi abbiamo sempre riscontrato che si sviluppano due ovarioli e non molti, come negli afidi: uno dei due va distrutto costantemente.

Geodesia. — *Determinazioni complementari di gravità in Sicilia nel 1907.* Nota del Corrispondente A. Venturi.

Colle precedenti quattro campagne in Sicilia, e tenendo presenti le determinazioni del chm̃o prof. Riccò sulla costa orientale, si può affermare di aver stabilito, nell' Isola, una rete gravimetrica di sufficiente entità, per rendere facile un' idea sintetica della distribuzione delle anomalie su tutto il territorio esplorato. Ma saltava agli occhi una diversità di addensamento dei punti di stazione, confrontando la regione occidentale dell' Isola col resto di essa, e specialmente colla orientale. Le determinazioni costiere, succedentisi generalmente di 40 in 50 chilometri, mostravano un vero vuoto fra Palermo e Trapani: e dentro terra, era troppo largo il triangolo Corleone-Trapani-Mazzara. Mi parve opportuno, per la regolarità della rete, intercalare almeno due altri punti: uno fra Palermo e Trapani, e fu Castellammare del Golfo; l'altro, nel centro del sopraddetto triangolo, e fu Salemi. Questo lavoro fu di competenza del solo Istituto Geodetico dell' Università di Palermo.

I metodi e gli stromenti adoperati questa volta, furono sempre i medesimi di tutte le altre campagne; parendomi essenziale costituire un lavoro omogeneo in ogni sua parte, per raggiungere uno scopo, quale è quello che ci proponiamo in ogni ricerca comparativa. Rinvio, pertanto, alle pubblicazioni mie precedenti, sul medesimo soggetto (1) onde non ripetermi inutilmente.

La stazione fondamentale alla Martorana fu eseguita, soltanto, prima del breve viaggio; poichè, essendo questo durato appena una settimana, non parve probabile che i pendoli avessero variato lunghezza in sì breve termine, specialmente avendo le precedenti campagne mostrato come oramai sembri che i detti pendoli abbiano raggiunto uno stato di stabilità molecolare definitiva, ragione facendo delle inevitabili incertezze dovute ai piccoli errori residuali che non possono da nessuna ricerca sperimentale esser banditi (2).

A Castellammare, la stazione fu fatta in una casetta terrena del commendatore Rocco Foderà, all' ingresso del paese, in luogo assolutamente riparato e solitario: a Salemi si stazionò nel magnifico locale dell'ex Collegio dei Gesuiti, ora palazzo delle Scuole: si operò in una sala terrena.

(1) V. Atti della R. Accademia di Palermo, vol. IV, serie III, 1901. Questi Rendiconti, anno 1905, vol. XIV, anno 1907, vol. XVI; anno 1909, vol. XVII.

(2) Questi Rendiconti, anno 1906, vol. XV, 2° sem., serie 5ª, fasc. II, pag. 664, seduta 2 dic. 1906.

Debbo i miei pubblici ringraziamenti al comm. Foderà suddetto, e al chm̃o prof. Enrico Lugaro del R. Ginnasio di Castellammare; come pure al Sindaco di Salemi, cav. Giuseppe Lampiasi, al prof. Angelo Vito ed al maestro sig. La Rocca della stessa città, per avermi, in tutti i modi e colla massima premura, agevolato efficacemente nell'impianto delle stazioni.

Ricordo, in ultimo, per un eccesso di chiarezza, che l'apparato di Sternek è sempre usato colla mensola a muro, e con tutte le precauzioni necessarie a garantire la sua immobilità: che anche questa volta il tempo è stato preso coi due metodi diversi, verticale della polare, e primo verticale; cosicchè si hanno, come sempre, due determinazioni indipendenti dell'andamento orario del solito pendolo Hawelk per ciascun giorno di esperimento.

Nei quadri seguenti si trovano registrati, dapprima, gli elementi che fissano la posizione di ciascuna stazione, le longitudini essendo tutte contate da Monte Mario. Seguono, poi, i dati relativi all'andamento orario del pendolo motore Hawelk, secondo i due metodi sopra menzionati. Infine compariscono i dati di osservazione delle misure gravimetriche propriamente dette: durata di una coincidenza, nella colonna intestata c: temperatura, intestata con t; pressione atmosferica ridotta a 0°, intestata con b: durata della oscillazione corretta per la temperatura, per la densità dell'aria, per l'andamento del pendolo, e ridotta all'arco infinitesimo. Tale colonna è intestata con s. L'ampiezza iniziale dell'oscillazione era di 10 parti della scala.

1. Stazione alla Martorana (Palermo).

Latitudine = 38°.06′.55″2 Longitudine = — 1°.54′.32″ (da M. Mario).

Altitudine della stazione = $20^m.17$.
Densità del suolo . . . . = 2.5.

Stati di Hawelk ed andamenti orarî, 1907 (¹).

Data siderale	Determinazione A		Data siderale	Determinazione B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.		Stato assoluto	And. or.	
Luglio 11,6094	—	—	Luglio 11,6094	—	—	—
12,5993	$+7^h.57^m.17^s,23$	$-0^s,383$	12,5993	$+7^h.57^m.16^s,88$	$-0^s,378$	$-0^s,380$
13,6017	08,00		13,6017	07,79		

Error medio del medio andamento orario definitivo: ± $0^s,0027$.

(¹) Nel trasporto dello stato assoluto del regolatore Strasser, su cui veniva determinato il tempo, al pendolo Hawelk, motore dell'apparato delle coincidenze, accadde un incidente al Cronografo, per cui lo stato di Hawelk del giorno 11 non riuscì sicuro.

Osservazioni gravimetrihe.

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Luglio 12,3861	116	s 38,8588	o 23,30	mm 763,80	s 0,5062957	Luglio 13,3764	116	s 38,8505	o 23,50	mm 762,50	s 0,5062961
12,4188	117	35,0932	23,35	—	70050	13,4077	117	35,0932	23,59	—	70038
12,4487	118	34,1187	23,50	—	72137	13,4362	118	34,1182	23,76	—	72124
12,4785	119	34,2373	23,67	763,20	71867	13,4646	119	34,2367	23,88	762,10	71858
12,6229	119	34,2410	23,55	763,40	71865	13,6201	119	34,2380	23,78	762,20	71859
12,6507	118	34,1088	23,80	—	72144	13,6507	118	34,1050	24,04	—	72141
12,6799	117	35,0810	23,94	—	70051	13,6798	117	35,0802	24,00	—	70049
12,7091	116	38,8320	24,04	762,60	62967	13,7091	116	38,8396	24,02	762,02	62967

RIEPILOGO.

116	117	118	119
s 0,5062963	s 0,5070047	s 0,5072136	s 0,5071862

2. Stazione a Castellammare del Golfo.

Latitudine = 38°.01′.20″. Longitudine = — 0°.25′.33″ (da M. Mario).

Altitudine della stazione = $76^{m}.86$.
Densità del suolo . . . . = 2.4.

Stati di Hawelk ed andamenti orarî, 1907.

Data siderale	Determinazione A		Data siderale	Determinazione B		And. or. medio
	Stato assoluto	And. or.		Stato assoluto	And. or.	
Luglio 16,7802	h m s + 10.37.50,26	s — 0,022	Luglio 16,7378	h m s + 10.37.49,34	s 0,000	s — 0,011
17,7787	49,73	+ 0,005	17,7308	—		+ 0,003
18,7736	49,85		18,7319	49,35		

Error medio del medio andamento orario definitivo: ± $0^{s},0030$.

Osservazioni gravimetriche.

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Luglio 17,3883	116	s 39,0683	° 24,13	mm 755,50	s 0,5063076	Luglio 18,3812	116	s 39,0982	° 24,39	mm 754,00	s 0,5063046
17,4174	117	35,2646	24,38	—	70169	18,4125	117	35,2870	24,70	—	70126
17,4466	119	34,4087	24,53	—	71975	18,4417	118	34,2967	24,97	—	72220
17,4758	118	34,2817	24,67	755,50	72248	18,4646	119	34,4165	25,25	754,10	71944
17,6486	118	34,2965	25,11	755,10	72194	18,6403	119	34,4325	25,67	754,10	71886
17,6778	119	34,4095	25,37	—	71933	18,6688	118	34,2968	25,87	—	72175
17,7056	117	35,2747	25,49	—	70096	18,6959	117	35,2792	25,90	—	70084
17,7348	116	39,0757	25,42	754,80	63013	18,7230	116	39,0755	25,87	754,10	63010

RIEPILOGO.

116	117	118	119
s 0,5063036	s 0,5070119	s 0,5072209	s 0,5071934

3. Stazione a Salemi.

Latitudine = 37°.49′.00″. Longitudine = — 0°.21′.10″ (da M. Mario).

Altitudine della stazione = 336^{m}.42.
Densità del suolo . . . . = 2.5.

Stati di Hawelk ed andamenti orari, 1907.

Data siderale	Determinazione A — Stato assoluto	Determinazione A — And. or.	Data siderale	Determinazione B — Stato assoluto	Determinazione B — And. or.	And. or. medio
Luglio 20,7393	h m s + 15.11.11,62	s — 0,007	Luglio 20,7393	h m s + 15.11.11,70	s — 0,007	s — 0,007
21,6995	11,45	+ 0,007	21,6995	11,43	+ 0,007	+ 0,007
22,7054	11,63		22,7054	11,63		

Error medio del medio andamento orario definitivo: ± 0^{s}.0021.

Osservazioni gravimetriche

Data civile	Pend.	c	t	b	s	Data civile	Pend.	c	t	b	s
Luglio		s	o	mm	s	Luglio		s	o	mm	s
21,3806	116	38,9892	22,75	723,60	0,5063328	22,3861	116	38,9848	22,59	722,50	0,5063344
21,4153	117	35,2043	22,72	—	70414	22,4181	117	35,2118	22,58	—	70405
21,4438	118	34,2235	22,74	—	72507	22,4487	118	34,2252	22,69	—	72506
21,4723	119	34,3468	22,77	723,70	72237	22,4758	119	34,3493	22,70	722,70	72234
21,6229	119	34,3487	22,74	722,90	72233	22,6368	119	34,3483	22,67	722,30	72239
21,6507	118	34,2215	22,91	—	72503	22,6646	118	34,2148	22,81	—	72523
21,6820	117	35,2007	23,00	—	70407	22,6931	117	35,2060	22,85	—	70404
21,7119	116	38 9800	23,06	722,90	63327	22,7216	116	38,9887	22,94	722,10	63320

RIEPILOGO.

116	117	118	119
s 0,5063330	s 0,5070407	s 0,5072510	s 0,5072236

Compensazione della durata di oscillazione.

Fu applicato anche questa volta il metodo di compensazione da me proposto [1] soprattutto per la ricerca dell'error medio a tenersi sopra ciascuna determinazione di gravità, in base a condizioni rigorose. Riporto qui gei elementi del calcolo eseguito dall'assistente dott. Mineo.

Residui di osservazione.

i	w_i	i	w_i
1	− 2,0	4	− 3,2
2	0,0	5	+ 3,0
3	− 2,1	6	+ 5,0

che sono, come tutti i dati che seguono espressi in $1^s \times 10^{-7}$.

Seguono le ausiliarie $w_{r,s}$ (loc. cit., pag. 9): le linee si riferiscono ai primi indici, le colonne ai secondi.

[1] Venturi, *Sulla compensazione dei risultati, nelle misure di gravità relativa.* Nuovo Cimento, serie IV, 1900, Pisa.

Valori delle $w_{r,s}$.

	1		2
1	— 2,0	1	— 4,0
2	0,0	2	+ 3,1
3	— 2,2	3	+ 4,0

Da queste si dedussero le risolventi v, V (loc. cit., pp. 9-11) da cui dipendono le correzioni delle derivate di oscillazione.

Valori delle v_i, V_i.

i	v_i	V_i	i	v_i	V_i
1	— 2,0	— 4,7	4	— 4,0	— 4,0
2	+ 1,2	+ 4,3	5	+ 5,0	+ 5,0
3	— 1,3	+ 1,6	6	+ 4,3	+ 4,3

Da queste, colle formule apposite (loc. cit., pag. 11) si dedussero le correzioni delle durate di oscillazione dei quattro pendoli, in ciascuna stazione.

Correzioni delle durate di oscillazione in unità $1^s \times 10^{-7}$.

Pend.	Palermo	Castellammare	Salemi
116	+ 0,52	— 1,49	+ 0,97
117	— 4,18	— 2,13	+ 6,31
118	+ 2,46	+ 0,54	— 3,00
119	+ 1,20	+ 3,10	— 4,30
Somma	0,00	+ 0,02	— 0,02

La nullità delle somme è un controllo dei calcoli. Applicando le precedenti correzioni ai valori delle oscillazioni riportati nei riepiloghi di cia-

scuna stazione, si hanno i

Valori corretti delle durate di oscillazione.

Pend.	Palermo	Castellammare	Salemi
116	0,5062964	0,5063035	0,5063331
117	0,5070043	0,5070117	0,5070413
118	0,5072138	0,5072209	0,5072507
119	0,5071863	0,5071937	0,5072232

Come controllo, abbiamo i

Residui delle equazioni di condizione.

	1	2	3	4	5	6
w	+2,0	0,0	+2,0	— 0,6	+0,6	— 0,4

Colla formula (22), pag. 12, della citata Memoria, fu calcolato l'error medio ε che compete a ciascuna determinazione di *una* durata di oscillazione di ogni pendolo, si trovò

$$\varepsilon = 0^s0000004.3$$

e l'error medio, E, a temersi sopra ciascun pendolo medio, compensato, il quale, nel caso attuale, è dato dalla formula (loc. cit., pag. 14):

$$E = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}}$$

risultò

$$E = 0^s,0000003$$

certamente molto piccolo.

Deduzione del valore della gravità a Castellammare e Salemi.

Il valore della gravità a Palermo è quello stabilito dopo il confronto con Padova [1], cioè:

$$g = \overset{cm}{980,}086.6 \pm \overset{cm}{0,}004$$

il quale serve di base ai valori da dedursi, delle altre gravità. Basterà usare la nota formula:

$$g_r = g \frac{s_p^2}{s_r^2},$$

[1] Venturi, *Riassunto dei lavori di collegamento* ecc. Questi Rendiconti, vol. XV, fasc. 11, anno 1906.

ove g_r è la gravità della stazione r^a: s_p, s_r sono le durate di oscillazione di uno stesso pendolo, compensate, e prese da un quadro precedente, a Palermo e alla stazione r^a, rispettivamente. Si ebbero i seguenti risultati, per la località di ciascuna stazione ove furono eseguite le osservazioni:

Castellammare . . . . . $g = 980{,}059$ cm
Salemi . . . . $g = 979{,}944$

e le relative riduzioni al livello del mare, secondo le altitudini sopra riportate, sono, dicendo g_0 la gravità ridotta al detto livello:

Castellammare . . . . . $g - g_0 = 23$
Salemi . . . . $g - g_0 = 103$.

Poi si calcolarono le correzioni dovute alle masse sottostanti alla stazione, e alle masse circostanti alla stessa, colla nota formula:

$$g''_0 - g_0 = \frac{3}{5}\frac{\theta}{\theta_m}(g - g_0) + \text{riduzione topografica}$$

essendo θ la densità del terreno sopra riportata per ogni stazione, e $\theta_m = 5{,}6$. Si ebbero, così, i valori:

Castellammare . . . . . $g''_0 - g_0 = 0$
Salemi . . . . $g''_0 - g_0 = -7$

tutto in millesimi di centimetro. Infine, pel calcolo delle gravità teoriche, γ_0, fu usata la formula di Helmert del 1901. L'anomalia di gravità è $g''_0 - \gamma_0$, poichè g''_0 è la gravità ridotta al mare e liberata dall'azione delle masse sovrastanti all'ellissoide di riferimento. Si ha, in ultimo, il quadro seguente:

Valori della gravità.

STAZIONE	g	g_0	g''_0	γ_0	Anomalia
Castellammare. .	cm 980,059	cm 980,082	cm 980,082	cm 980,007	cm + 0,075
Salemi	979,944	980,047	980,040	979,990	+ 0,050

L'error medio di questi valori di g è dato, nella citata Memoria, pag. 16, dalla formula:

$$M_g = 27{,}5\,\frac{E}{S},$$

essendo E il precedente error medio, ed S il medio valore delle oscillazioni. Viene, pel caso nostro,

$$M_g = 0^{cm},001.7$$

molto piccolo.

Riportiamo in quadro complessivo tutti i valori di gravità sinora ottenuti disponendoli per valori decrescenti delle anomalie.

Anno	STAZIONE	g	g_0	g_0''	γ_0	Anomalie
		cm	cm	cm	cm	cm
1899	Ustica . . .	979,144	980,221	980,198	980,067	+ 0,131
1906	Milazzo . . .	980,150	980,152	980,151	980,024	+ 0,127
1905	Vittoria . . .	979,986	980,040	980,023	979,913	+ 0,110
1899	Favignana . .	980,999	980,101	980,101	979,999	+ 0,102
1906	Cefalù . . .	980,095	980,110	980,110	980,009	+ 0,102
1899	Pantelleria . .	979,947	980,022	980,003	979,902	+ 0,101
1906	Patti	980,082	980,128	980,118	980,017	+ 0,101
1899	Trapani . . .	980,094	980,095	980,095	979,006	+ 0,089
1906	S. Agata. . .	980,082	980,088	980,089	980,011	+ 0,078
1899 1905	**Palermo** . .	980,087	980,093	980,092	979,015	+ 0,077
1907	Castellammare	980,059	980,082	980,082	980,007	+ 0,075
1900	Valverde . .	980,072	980,091	980,086	979,014	+ 0,072
1904	Termini . . .	980,061	980,069	980,068	979,003	+ 0,065
1906	Mistretta . .	979,869	980,153	980,063	979,999	+ 0,064
1904	Corleone. . .	979,898	980,091	980,033	979,977	+ 0,056
1905	Sciacca . . .	979,994	980,019	980,016	979,961	+ 0,055
1907	Salemi . . .	979,944	980,047	980,040	979,990	+ 0,050
1905	Terranova . .	979,963	979,974	979,972	979,923	+ 0,049
1905	Mazzara . . .	980,010	980,014	980,013	979,974	+ 0,039
1906	Petralia . . .	979,789	980,100	980,007	979,988	+ 0,019
1905	Licata . . .	979,934	979,941	979,939	979,927	+ 0,012
1904	Vicaretto . .	979,832	979,999	979,956	979,977	— 0,021
1905	Girgenti. . .	979,851	979,943	979,917	979,944	— 0,027
1904	Castrogiovanni	979,720	979,998	979,935	979,965	— 0,030
1904	Caltanissetta .	979,770	979,942	979,891	979,961	— 0,070

Cristallografia — *Forma cristallina del salicilato di colesterina*. Nota del Corrispondente Ettore Artini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica tecnica. — *Su la radiazione di un'antenna inclinata.* Nota del Corrispondente ANTONIO GARBASSO.

1. In questi ultimi tempi si è ripreso a discutere sul problema della radiazione emessa da un'antenna inclinata, e si sono enunciate in proposito delle opinioni stranamente discordi.

Non si riesce nemmeno a stabilire se una simile antenna eserciti una maggiore influenza *di fronte* (cioè normalmente al piano verticale che la contiene), oppure di fianco (cioè nel detto piano), a parità di distanza.

Eppure la soluzione del problema è semplice e sicura, e risulta senza ambiguità da un calcolo elementare.

2. Scriviamo le equazioni del campo elettromagnetico, in coordinate cilindriche, sotto la forma

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\varrho\frac{\partial \mathfrak{M}_\rho}{\partial t}=\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \theta}-\frac{\partial(\varrho\mathcal{E}_\theta)}{\partial z}\,,\\ &A\,.\frac{\partial \mathfrak{M}_\theta}{\partial t}=\frac{\partial(\mathcal{E}_\rho)}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \varrho}\,,\\ &A\varrho\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t}=\frac{\partial(\varrho\mathcal{E}_\theta)}{\partial \varrho}-\frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial \theta}\,,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\varrho\frac{\partial \mathcal{E}_\rho}{\partial t}=\frac{\partial(\varrho\mathfrak{M}_\theta)}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \theta}\,,\\ &A\,.\frac{\partial \mathcal{E}_\theta}{\partial t}=\frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial \varrho}-\frac{\partial \mathfrak{M}_\rho}{\partial z}\,,\\ &A\varrho\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}=\frac{\partial \mathfrak{M}_\rho}{\partial \theta}-\frac{\partial(\varrho\mathfrak{M}_\theta)}{\partial t}\,.\end{aligned}\right.$$

Si soddisfa alle (1) e (2) ponendo

$$(3)\qquad \Sigma=\frac{TIl}{2\pi}\left[\frac{2\pi A}{T}\cos\frac{2\pi}{T}(t-Ar)+\frac{\sin\frac{2\pi}{T}(t-Ar)}{r}\right]\frac{\varrho^2}{r^2}\,,$$

e poi

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{M}_\rho=0\,,\\ &\varrho\mathfrak{M}_\theta=-A\frac{\partial\Sigma}{\partial t}\,,\\ &\mathfrak{M}_z=0\,,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varrho\mathcal{E}_\rho=-\frac{\partial\Sigma}{\partial z}\,,\\ &\mathcal{E}_\theta=0\,,\\ &\varrho\mathcal{E}_z=\frac{\partial\Sigma}{\partial\varrho}\,.\end{aligned}\right.$$

La (3) e la seconda delle (4) forniscono

$$\mathfrak{M}_\theta = \frac{IlA}{\varrho}\left[\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar) - \frac{\cos\frac{2\pi}{T}(t - Ar)}{r}\right]\frac{\varrho^2}{r^2},$$

e, se r è piccolo rispetto alla lunghezza d'onda (T/A),

$$\mathfrak{M}_\theta = -A\frac{Il\cos\frac{2\pi t}{T}}{r^2}\cdot\frac{\varrho}{r}.$$

A parole « *il campo è quello di un elemento di corrente, posto all'origine delle coordinate, diretto secondo la direzione positiva dell'asse* z, *con la lunghezza* l *e l'intensità* (*variabile*)

$$I\cos\frac{2\pi t}{T} ».$$

Per grandi valori di r la (3) diventa

$$\Sigma = IlA\cos\frac{2\pi}{T}(t - Ar), \tag{3'}$$

e fornisce

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2\pi}{T}\frac{IlA^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\cos\lambda, \\ \mathfrak{M} &= \frac{2\pi}{T}\frac{IlA^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\cos\lambda, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

ove con λ si indichi la latitudine.

3. Supponiamo adesso che nel piano $\theta = 0$ l'elemento di corrente studiato al § 2 roti, dell'angolo φ, nel verso in cui diminuiscono le λ; si tratta di determinare le forze elettriche e magnetiche prodotte a distanza.

Per questo osserviamo che è secondo le (6)

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2\pi}{T}\frac{IlA^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\sin(r, z), \\ \mathfrak{M} &= \frac{2\pi}{T}\frac{IlA^2}{r}\sin\frac{2\pi}{T}(t - Ar).\sin(r, z); \end{aligned}\right. \tag{7}$$

ma (r, z) *fisicamente* è l'angolo compreso fra il raggio vettore e la direzione della corrente. Ad (r, z) bisogna dunque sostituire il nuovo valore dell'angolo (r, l).

Sarà

$$\sin(r, l) = \sqrt{1 - \sin^2\lambda\cos^2\varphi - \cos^2\lambda\cos^2\theta\sin^2\varphi - 2\sin\lambda\cos\lambda\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi}.$$

4. E ora il teorema di Poynting permette di calcolare immediatamente la quantità di energia irradiata attraverso ad una superficie σ qualunque dal nostro aereo, durante una vibrazione completa.

Sarà

$$W = \int_0^T dt \int_\sigma \frac{\mathcal{E}\mathfrak{M}\cos(p, n)}{4\pi A} d\sigma, \tag{8}$$

indicandosi con p la perpendicolare al piano $(\mathcal{E}, \mathfrak{M})$, con n la normale all'elemento $d\sigma$.

Supponiamo, per procedere nel calcolo, che σ appartenga ad una sfera di raggio R; avremo subito

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T}(t - AR)\, dt = \frac{T}{2},$$

e dunque, per le (7) e (8),

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3}{2TR^2}\int_\sigma \sin^2(r, l)\,.\,d\sigma \\ &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3}{2T}\iint \sin^2(r, l)\,.\cos\lambda\,.\,d\theta\, d\lambda\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Facciamo variare la λ da $-\alpha$ a $+\alpha$ intendendo che i limiti siano piccolissimi.

Otterremo senz'altro

$$W = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \alpha}{T}\int (1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi)\, d\theta,$$

e integrando adesso rispetto a θ fra i limiti $\theta - \beta$ e $\theta + \beta$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi I^2 l^2 A^3 \alpha\beta}{T}(1 - \cos^2\theta\sin^2\varphi) \\ &= \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2}(1 - \cos^2\theta\sin^2\varphi). \end{aligned} \tag{10}$$

5. Dalla (10) risulta

$$(W)_{\theta=0} = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2}\cos^2\varphi,$$

$$(W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi I^2 l^2 A^3 \sigma}{2TR^2};$$

e dunque

$$(W)_{\theta=0} = \cos^2\varphi \, . \, (W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \ (^1) \, . \tag{11}$$

« *Un'antenna inclinata emette una maggiore quantità di energia di fronte che di fianco* ». È facile anzi vedere che l'emissione è *massima di fronte* e *minima di fianco.*

Se si desidera il luogo dei punti in cui una superficie assegnata σ, normale alla direzione di propagazione riceve una quantità assegnata di energia, basterà porre

$$\frac{1 - \cos^2\theta \sin^2\varphi}{\varrho^2} = \text{costante} = a^2 \, ,$$

o, in coordinate cartesiane,

$$x^2 \cos^2\varphi + y^2 = a^2 (x^2 + y^2)^2 \, . \tag{12}$$

Ponendo

$$\begin{cases} A = \dfrac{\cos\varphi}{a} \, , \\ B = \dfrac{1}{a} \, , \end{cases}$$

la (12) diventa

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 = (x^2 + y^2)^2 \, . \tag{13}$$

La curva (13) è simmetrica rispetto all'origine e rispetto alle direzioni $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Gli assi hanno rispettivamente per valori 2A e 2B; è sempre

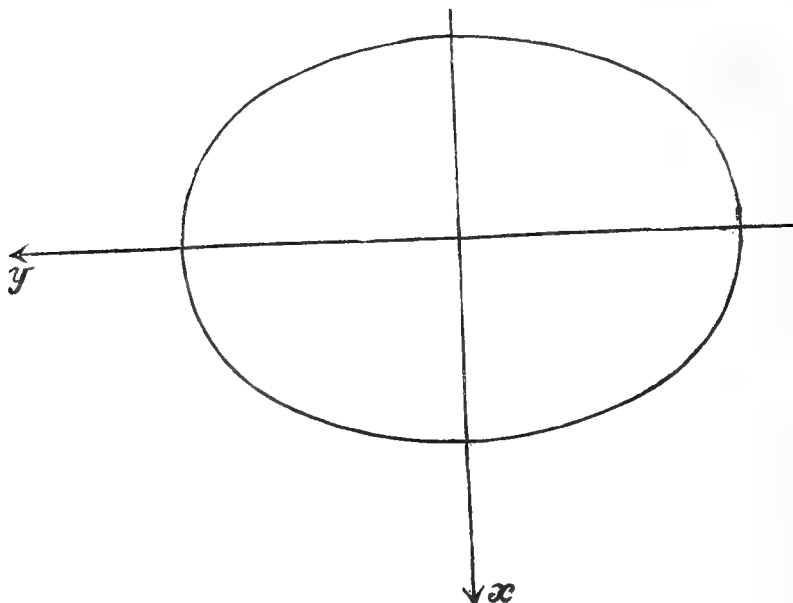
$$A < B \, .$$

Se, in particolare, l'antenna si inclina a 45° le (11) e (13) dànno

$$(W)_{\theta=0} = \frac{1}{2} (W)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \, , \tag{11'}$$

$$x^2 + 2y^2 = 2a^2 (x^2 + y)^2 \, . \tag{13'}$$

(1) Questo resultato si ottiene già senza calcoli, osservando che dell'antenna è utile la sola componente normale alla direzione di propagazione.

La linea (13′), per un valore opportuno della costante, è rappresentata dal diagramma qui appresso, il quale somiglia perfettamente ai diagrammi

ottenuti dall'Artom con un aereo costituito di due antenne inclinate all'orizzonte come quella che ha formato oggetto del nostro calcolo.

Matematica. — *Sulla sviluppabilità in serie degli integrali delle equazioni differenziali lineari.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Socio PINCHERLE.

In questa Nota ci proponiamo di studiare la sviluppabilità di una funzione, che è integrale di una equazione differenziale lineare, in una serie procedente per aggregati lineari di funzioni date, e di calcolare i coefficienti dello sviluppo in funzione dei coefficienti dell'equazione.

1. Sia una equazione differenziale lineare di ordine n

$$\Delta(y) = q \tag{1}$$

ove è

$$\Delta(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = q . \tag{2}$$

Supponiamo che $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), q(x)$ sieno funzioni analitiche della variabile complessa x, reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro un cerchio σ, avente per centro l'origine e per raggio un numero ε maggiore di 1.

Per x reale variabile da 0 ad 1, $p_1(x), \dots, p_n(x), q(x)$ saranno quindi funzioni reali finite e continue della variabile reale x.

2. Sieno inoltre

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

un sistema di funzioni analitiche della variabile complessa x, reali, per x reale, monodrome e regolari senza eccezione entro il cerchio σ sopraddetto. Faremo inoltre le ipotesi seguenti:

I. Le $\varphi_\rho(x)$ e le loro derivate, fino all'ordine $n-1$ compreso, si annullano per $x=0$.

II. Nessuna relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti leghi tra di loro un numero finito delle $\varphi_\rho(x)$.

Poniamo:

$$\psi_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu(x) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \psi_\rho(x) \int_0^1 \Delta(\psi_\rho(z))\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz}{\sqrt{\int_0^1 \left\{ \Delta(\varphi_\nu(x)) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \Delta(\psi_\rho(x)) \int_0^1 \Delta(\psi_\rho(z))\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz \right\}^2 dx}} \tag{3}$$

l'operazione Δ essendo definita dalla (2).

Nessuno dei denominatori della (3) può annullarsi. Sia infatti ν il primo indice per cui si abbia

$$\Delta(\varphi_\nu(x)) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \Delta(\psi_\rho(x)) \int_0^1 \Delta(\psi_\rho(z))\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz = 0\,.$$

$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots \psi_{\nu-1}(x)$ sono funzioni lineari ed omogenee delle $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \dots, \varphi_{\nu-1}(x)$, onde posto

$$\varphi(x) = \varphi_\nu(x) - \sum_1^{\nu-1}{}_\rho\, \psi_\rho(x) \int_0^1 \psi_\rho(z)\, \Delta(\varphi_\nu(z))\, dz\,,$$

$\varphi(x)$ risulta una funzione lineare ed omogenea delle $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$. Ma è

$$\Delta(\varphi(x)) = 0\,,$$

e siccome per $x=0$ si annullano $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$ e le loro derivate, fino all'ordine $n-1$ incluso, si annulla ancora $\varphi(x)$ e le sue prime $n-1$ derivate, e quindi è identicamente

$$\varphi(x) = 0\,,$$

cioè sussiste, contro l'ipotesi, una relazione lineare ed omogenea a coefficienti costanti fra $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$. Non è quindi possibile che si annulli alcuno dei denominatori delle (3): si ha così una formula ricorrente, che definisce, qualunque sia ν, $\psi_\nu(x)$ come funzione lineare omogenea a coefficienti costanti di $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_\nu(x)$.

Poniamo:

$$P_\nu(x) = \Delta(\psi_\nu(x))\,. \tag{4}$$

Dalle stesse (3) deduciamo subito che $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_\nu(x)$, ... costituiscono un sistema di funzioni normali ed ortogonali:

$$(5) \qquad \int_0^1 P_\mu(x)\, P_\nu(x)\, dx = 0 \quad \mu \neq 0$$
$$= 1 \quad \mu = \nu .$$

Alle ipotesi I e II aggiungiamo la III: Le funzioni

$$P_1(x)\,, P_2(x)\,, \dots, P_\mu(x)\,, \dots$$

definite dalle (3), (4) costituiscono un sistema *chiuso*, tale cioè che non esiste nessuna funzione finita e continua $\alpha(x)$, per cui si abbia

$$\int_0^1 \alpha(x)\, P_\mu(x)\, dx = 0\,, \qquad \mu = 1\,, 2\,, \dots$$

a meno che non sia $\alpha(x) \equiv 0$.

Nelle ipotesi I, II, III dimostreremo che la serie

$$(6) \qquad \psi(x) = \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_0^1 q(x)\, P_\mu(x)\, dx$$

converge assolutamente ed uniformemente nell'intervallo 01, *e rappresenta l'integrale della* (1) *che per* $x = 0$ *si annulla insieme alle sue derivate fino all'ordine* $n - 1$.

3. Premettiamo le osservazioni seguenti. Sia $H_1(x)$, $H_2(x)$, ... $H_n(x)$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione omogenea

$$(7) \qquad \Delta(y) = y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}\, y' + p_n\, y = 0\,,$$

$p_1, p_2, \dots p_n$ essendo gli stessi coefficienti della (1). Poniamo

$$(7) \qquad F(\xi, x) = \frac{\begin{vmatrix} H_1(\xi) & H_2(\xi) & \dots & H_n(\xi) \\ H_1'(\xi) & H_2'(\xi) & \dots & H_n'(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_1^{(n-1)}(\xi) & H_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & H_n^{(n-1)}(\xi) \\ H_1(x) & H_2(x) & \dots & H_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1(\xi) & H_2(\xi) & \dots & H_n(\xi) \\ H_1'(\xi) & H_2'(\xi) & \dots & H_n'(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ H_1^{(n-1)}(\xi) & H_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & H_n^{(n-1)}(\xi) \\ H_1^{(n)}(\xi) & H_2^{(n)}(\xi) & \dots & H_n^{(n)}(\xi) \end{vmatrix}}\,.$$

Consideriamo il piano complesso della variabile ξ: nell'interno del cerchio σ non cadendo alcuna singolarità dei coefficienti dell'equazione (6),

(cfr. n. 1), il denominatore dell'espressione precedente è diverso da zero. Se quindi diamo a ξ valori reali compresi tra 0 ed 1, quel denominatore è una funzione reale e continua, il cui limite inferiore è una quantità m diversa da zero.

Analogamente, ξ essendo reale e compreso fra 0 ed 1, le $H_1(\xi), \ldots H_n(\xi)$ sono funzioni reali e continue, e ciascuna di esse ha un limite superiore finito, onde è assegnabile un numero reale positivo h, tale, che il valore assoluto di ciascun elemento del determinante che comparisce al numeratore della (7) è minore di h. Per il noto teorema di Hadamard il valore assoluto di quel determinante è inferiore a $h^n \sqrt{n^n}$, onde posto $M = \frac{h^n \sqrt{n^n}}{m}$, abbiamo:

$$|F(\xi, x)| < M$$

ξ, x essendo reali e compresi tra 0 ed 1.

Analogamente si dimostra subito

$$\left|\frac{\partial^r F(\xi, x)}{\partial x^r}\right| < N, \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1)$$

N essendo un numero assegnabile, ξ e x essendo sempre reali e compresi tra 0 ed 1.

Introduciamo le funzioni $Q_r(\xi, x)$ uguali a $\frac{\partial^r F}{\partial x^r}$ per $\xi \leq x$ ed uguali a zero per $\xi > x$, avremo

$$(8) \qquad \int_0^x \left(\frac{\partial^r F(\xi, x)}{\partial x^r}\right)^2 dx = \int_0^1 (Q_r(\xi, x))^2 \, dx < A^2, \quad r = 0, 1, \ldots n-1$$

ove si è posto $\frac{\partial^0 F}{\partial x^0} = F$, ed A è un numero superiore a M e N.

4. Lemma. — Diciamo $\theta(x)$ una funzione reale finita e continua nell'intervallo 0 1, insieme alle sue prime n derivate, che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate. Poniamo

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta(\theta(x)) = g(x) \\ h(x) = \theta(x) - \int_0^x g(\xi) \, F(\xi, x) \, d\xi = \theta(x) - \int_0^1 g(\xi) \, Q_0(\xi, x) \, d\xi \\ \text{otteniamo derivando} \\ h^{(r)}(x(= \theta^{(r)}(x) - \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^r}{\partial x^r} (F(\xi, x) \, d\xi, \quad r = 1, 2, \ldots n-1 \\ h^{(n)}(x) = \theta^{(n)}(x) - g(x) - \int_0^x g(\xi) \frac{\partial^n}{\partial x^n} (F(\xi, x)) \, d\xi. \end{cases}$$

Ma F, considerata come funzione della x, è un integrale dell'equazione omogenea (6), abbiamo quindi tenuto conto della prima delle (9):

$$\Delta(h(x)) = \Delta(\theta(x)) - g(x) = 0 .$$

Per ipotesi, per $x = 0$, si annulla $\theta(x)$ insieme alle sue prime $n-1$ derivate; dalle (9) risulta allora $h(0) = h'(0) = \cdots = h^{(n-1)}(0) = 0$, onde abbiamo identicamente $h(x) \equiv 0$, e quindi

$$(10) \qquad \begin{cases} \theta(x) = \int_0^x g(\xi)\, F(\xi, x)\, d\xi = \int_0^1 g(\xi)\, Q_0(\xi, x)\, d\xi \\ \theta^{(r)}(x) = \int_0^x g(\xi) \dfrac{\partial^r}{\partial x^r}(F(\xi, x))\, d\xi = \int_0^1 g(\xi)\, Q_r(\xi, x)\, d\xi \\ \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots n-1. \end{cases}$$

Enunciamo quindi il seguente lemma: *Sia $\theta(x)$ una funzione reale arbitraria finita e continua nell'intervallo* 01 *insieme alle sue prime n derivate, che per $x = 0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate; è sempre possibile porre $\theta(x), \theta'(x), \ldots \theta^{(n-1)}(x)$ nella forma* (10), *nella quale è $g(x) = \Delta(\theta(x))$*.

5. *Convergenza delle serie.*

Ciò premesso, consideriamo la serie

$$(11) \qquad \psi(x) = \sum_1^\infty{}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_0^1 g(z)\, P_\mu(z)\, dz .$$

Per il lemma precedente è

$$\psi_\mu(x) = \int_0^1 P_\mu(\xi)\, Q_0(\xi, x)\, d\xi ,$$

onde, sostituendo, la serie precedente diviene

$$\sum_1^\infty{}_\mu \int_0^1 P_\mu(\xi)\, Q_0(\xi, x)\, d\xi \int_0^1 g(z)\, P_\mu(z)\, dz .$$

Essendo, nell'intervallo 01, $\int_0^1 (Q_0(\xi, x))^2\, d\xi < A^2$, le $P_1(x), P_2(x), \ldots$ funzioni normali ortogonali, per un teorema di Schmidt [1], essa converge assolutamente ed uniformemente in tutto l'intervallo 01. Essa quindi rappresenta in questo intervallo una funzione finita e continua $\psi(x)$.

Analogamente, essendo, sempre per il lemma precedente:

$$\psi_\mu^{(r)}(x) = \int_0^1 P_\mu(\xi)\, Q_r(\xi, x)\, d\xi , \qquad r = 1, 2, \ldots n-1 ,$$

[1] Mat. Ann., 1907.

si dimostra che convergono assolutamente ed uniformemente le serie che si ottengono dalla (11) derivando successivamente $1, 2, \ldots n-1$ volte.

Osserviamo ancora che, le φ_ρ essendo per ipotesi funzioni analitiche uniformi della variabile complessa x, regolari senza eccezione entro il cerchio σ, anche le ψ_ρ che, secondo le (3), sono combinazioni lineari di un numero finito delle φ_ρ, saranno entro lo stesso cerchio σ funzioni analitiche, uniformi della x, regotari senza eccezioni.

La serie (11) essendo convergente uniformemente, per il lemma di Weierstrass, la $\psi(x)$ sarà ancora essa una funzione analitica uniforme e regolare entro σ.

Esistono quindi della $\psi(x)$, entro σ, tutte le derivate fino all'ordine che più piace: secondo le considerazioni precedenti *le prime $n-1$ sono rappresentate dalle serie, che si ottengono dalla* (11) *derivando termine a termine.*

6. *Somma della serie.*

Detto $G(x)$ l'integrale dell'equazione proposta (1), che per $x=0$ si annulla insieme alle sue prime $n-1$ derivate, dimostriamo $G(x)$ coincide con la somma della serie (11) $\psi(x)$.

Essendo f, φ due funzioni finite e continue, derivabili n volte abbiamo la formula di integrazione per parti

$$\int_0^1 \varphi \Delta(f)\, dx = \int_0^1 f \Gamma(\varphi)\, dx + \alpha(f, \varphi), \tag{12}$$

ove è

$$\Delta(f) = f^{(n)} + p_1 f^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} f' + p_n f$$

$$\Gamma(\varphi) = p_n \varphi - \frac{d(p_{n-1}\varphi)}{dx} + \frac{d^2(p_{n-2}\varphi)}{dx^2} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n \varphi}{dx^n}$$

$$\alpha(f, \varphi) = \Bigg\{ f\left(p_{n-1}\varphi - \frac{d(p_{n-2}\varphi)}{dx} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}\right) +$$

$$+ f'\left(p_{n-2}\varphi - \frac{d(p_{n-3}\varphi)}{dx} + \cdots + (-1)^n \frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}}\right) + \cdots + f^{(n-1)}\varphi \Bigg\}_0^1 .$$

Posto quindi:

$$h(x) = G(x) - \psi(x) = G(x) - \sum_1^\infty {}_\mu\, \psi_\mu(x) \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz, \tag{13}$$

per quanto abbiamo visto nel numero precedente, la $h(x)$ è una funzione analitica monodroma e regolare entro il cerchio σ, di cui le prime $n-1$ derivate si ottengono derivando termine a termine la serie a destra. Otteniamo quindi, eseguendo operazioni di calcolo letterale, relative a serie convergenti assolutamente ed uniformemente:

$$\alpha(h, P_\nu) = \alpha(G, P_\nu) - \sum_1^\infty {}_\mu\, \alpha(\psi_\mu, P_\nu) \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz$$

per tutti i valori all' indice ν. Abbiamo poi dalla (13):

$$\int_0^1 h(x)\, \boldsymbol{\Gamma}(P_\nu(x))\, dx = \int_0^1 G(x)\, \boldsymbol{\Gamma}(P_\nu(x))\, dx -$$
$$- \sum_\mu^{1\ldots\infty} \int_0^1 \psi_\mu(x)\, \boldsymbol{\Gamma}(P_\nu(x))\, dx \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz\,,$$

e, sommando membro a membro le relazioni precedenti, ed applicando la (12):

$$\int_0^1 \Delta(h(x))\, P_\nu(x)\, dx = \int_0^1 \Delta(G(x))\, P_\nu(x)\, dx -$$
$$- \sum_\mu^{1\ldots\infty} \int_0^1 \Delta(\psi_\mu(x))\, P_\nu(x)\, dx \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz$$

per tutti i valori dell' indice ν: e siccome è $\Delta(G) = q$, $\Delta(\varphi_\mu) = P_\mu$, e le $P_1, P_2, \ldots$ sono normali ortogonali, così abbiamo

$$\int_0^1 \Delta(h(x))\, P_\nu(x)\, dx = \int_0^1 q(x)\, P_\nu(x)\, dx - \int_0^1 P_\nu(z)\, q(z)\, dz = 0\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ma il sistema delle P_ν è chiuso per ipotesi, onde risulta $\Delta(h(x)) = 0$. Per $x = 0$, si annullano, insieme alle loro derivate fino all'ordine $n-1$ incluso, $G(x)$ e tutte le $\varphi_\mu(x)$, quindi $h(x)$; segue che è identicamente $h(x) \equiv 0$, ossia *la serie* (11)

$$\psi(x) = \sum \psi_\mu(x) \int_0^1 q(z)\, P_\mu(z)\, dz$$

rappresenta l'integrale della (1), *che per* $x = 0$ *si annulla insieme alle sue prime* $n-1$ *derivate.*

7. *Integrale generale.*

Mostriamo come dalla serie (11) si possa dedurre l' integrale generale della equazione (1).

Sia $g(x)$ un integrale generico della (1): diciamo $\varphi(x)$ *una funzione finita, continua, deribabile n volte nell'intervallo* $0\,1$, *soggetta all'unica condizione che, per* $x = 0$, *si abbia*

$$\varphi(0) = g(0)\,,\ \varphi'(0) = g'(0)\,, \ldots\, \varphi^{(n-1)}(0) = g^{(n-1)}(0)\,.$$

Posto allora

$$G(x) = g(x) - \varphi(x)\quad,\quad Q(x) = q(x) - \Delta(\varphi(x)), \tag{14}$$

abbiamo

$$\Delta(G(x)) = Q(x)$$

e quindi, $G(x)$ e le sue prime $n-1$ derivate essendo nulle per $x=0$, abbiamo, applicando il teorema precedente, che $G(x)$ è rappresentato dalla serie (6)

$$G(x)=\sum_{\mu}^{1\ldots\infty}\psi_\mu(x)\int_0^1 Q(x)\,P_\mu(x)\,dx\,.$$

Tenendo conto delle (14) abbiamo quindi la formula definitiva che comprende la precedente (11) come caso particolare

$$(15)\qquad G(x)=\varphi(x)-\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\psi_\mu(x)\int_0^1 P_\mu(x)\,\Delta(\varphi(x))\,dx+ \\ +\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\,\psi_\mu(x)\int_0^1 P_\mu(x)\,q(x)\,dx\,.$$

Essendo $\varphi(x)$ *una funzione arbitraria, la* (15) *rappresenta l'integrale generale della* (1), *tale che per* $x=0$ *esso e le sue prime* $n-1$ *derivate assumono i valori* $\varphi(0),\varphi'(0),\ldots,\varphi^{(n-1)}(0)$. *Le* $\psi_\mu(x)$ *e le* $P_\mu(x)$ *sono definite dalle formule* (3), (4).

Geodesia. — *Determinazione astronomica di latitudine eseguita nella Specola geodetica dell' Università di Genova nel 1908 col metodo delle distanze zenitali in meridiano.* Nota di U. BARBIERI, presentata dal Corrispondente V. REINA.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica matematica. — *Estensione d'una formola di Fresnel ai mezzi cristallini eterogenei.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

1. In un mezzo anisotropo omogeneo si osservano due diverse specie di onde luminose piane, caratterizzate dalle due diverse velocità con le quali si propagano lungo una stessa direzione normale al piano dell'onda.

Queste due velocità sono radici dell'equazione biquadratica di Fresnel

$$(1)\qquad \frac{\lambda^2}{V^2-a^2}+\frac{\mu^2}{V^2-b^2}+\frac{\nu^2}{V^2-c^2}=0\,,$$

essendo λ,μ,ν i coseni direttori della normale alla superficie dell'onda

piana rispetto agli assi dell'ellissoide di polarizzazione, ed $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ le semi-lunghezze di questi assi.

In questa Nota mi propongo di dimostrare che l'equazione (1) di Fresnel si estende alla superficie frontale di un'onda, la quale si propaghi in un mezzo anisotropo qualunque, qualora si ammetta che le componenti α, β, γ, X, Y, Z dei vettori luminosi di Neumann e di Fresnel restano continue attraverso a tale superficie, mentre qualcuna delle loro derivate (d'ordine finito) rispetto al tempo presenta ivi una discontinuità.

Queste condizioni sono verificate per le onde piane luminose che si propagano nei mezzi anisotropi omogenei, quando le componenti dei vettori di Neumann e di Fresnel secondo gli assi cartesiani sono della forma

$$
\begin{aligned}
\alpha &= A_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right) \\
\beta &= A_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right) \\
\gamma &= A_3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right) \\
X &= B_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right) \\
Y &= B_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right) \\
Z &= B_3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V}\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 sono delle costanti convenienti), e la superficie frontale dell'onda è il piano mobile $t - \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{V} = 0$.

2. Indichiamo con x, y, z delle coordinate ortogonali (cartesiane o curvilinee), e con

$$
ds^2 = \xi^2 dx^2 + \eta^2 dy^2 + \zeta^2 dz^2 \tag{3}
$$

il quadrato dell'elemento lineare.

Siano α, β, γ, X, Y, Z le componenti dei vettori di Neumann e Fresnel secondo le normali alle superficie $x =$ cost., $y =$ cost., $z =$ cost.: esse devono

soddisfare le equazioni

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
-\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{1}{\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\zeta Z}{\partial y}-\frac{\partial.\eta Y}{\partial z}\right\}\\
-\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{1}{\zeta\xi}\left\{\frac{\partial.\xi X}{\partial z}-\frac{\partial.\zeta Z}{\partial x}\right\}\\
-\frac{\partial\gamma}{\xi t} &= \frac{1}{\xi\eta}\left\{\frac{\partial.\eta Y}{\partial x}-\frac{\partial.\xi X}{\partial y}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\zeta\gamma}{\partial y}-\frac{\partial.\eta\beta}{\partial z}\right\}\\
\varepsilon_{12}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\zeta\xi}\left\{\frac{\partial.\xi\alpha}{\partial z}-\frac{\partial.\zeta\gamma}{\partial x}\right\}\\
\varepsilon_{13}\frac{\partial X}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Y}{\partial t}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{1}{\xi\eta}\left\{\frac{\partial.\eta\beta}{\partial x}-\frac{\partial.\xi\alpha}{\partial y}\right\}.
\end{aligned}
$$

Nella teoria elettromagnetica della luce α , β , γ , X , Y , Z sono le componenti della forza magnetica ed elettrica; le ε sono funzioni di x , y , z che caratterizzano in ogni punto le proprietà elettriche del mezzo trasparente; la permeabilità magnetica di questo è costante in tutti i punti, e per comodità si pone eguale ad uno.

La condizione che α , β , γ rimangano continue al passaggio dell'onda porta alla conseguenza che l'integrale $\int(\alpha\xi\,dx+\beta\eta\,dy+\gamma\zeta\,dz)$ esteso ad un contorno arbitrario sulla superficie dell'onda rimane continuo attraverso a questa, e, pel teorema di Ampère sulle azioni elettromagnetiche, la corrente di spostamento che accompagna o costituisce la luce nel dielettrico, si chiude entro la superficie dell'onda che la propaga: e questa è l'ipotesi fondamentale della teoria di Maxwell [1].

Nella teoria elastica della luce α , β , γ si possono interpretare come componenti della velocità molecolare, ed $\varepsilon_{11}X+\varepsilon_{12}Y+\varepsilon_{13}Z$. ecc. come componenti della rotazione molecolare, essendo le ε funzioni dei coefficienti di elasticità, che variano da punto a punto. Per la natura stessa di α , β , γ conviene ammettere che siano continue al passaggio dell'onda, mentre le $\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\beta}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}$, essendo delle accelerazioni, saranno generalmente discontinue sulla superficie dell'onda. Se le accelerazioni d'ordine superiore fossero tutte continue su tale superficie fino alla n^{esima}, ma la $(n+1)^{esima}$ fosse discontinua, i calcoli seguenti varrebbero identicamente per quest'ultima.

(1) Si potrebbe considerare il caso che la discontinuità della forza magnetica sia normale alla superficie dell'onda, ma questo esame esorbita dallo scopo delle presente Nota.

Indicando per brevità con $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ i primi membri delle (5), si hanno le due relazioni evidenti

$$(6) \qquad \begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial . \eta\zeta\alpha}{\partial x}+\frac{\partial . \zeta\xi\beta}{\partial y}+\frac{\partial . \xi\eta\gamma}{\partial z}\right\}=0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial . \eta\zeta u}{\partial x}+\frac{\partial . \zeta\xi v}{\partial y}+\frac{\partial . \xi\eta w}{\partial z}\right\}=0. \end{gathered}$$

La densità dell'energia totale in ogni punto è espressa a meno di un fattore costante da

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\varepsilon_{11}X^2+\varepsilon_{22}Y^2+\varepsilon_{33}Z^2+2\varepsilon_{12}XY+2\varepsilon_{23}YZ+2\varepsilon_{13}ZX;$$

ed in ogni punto vi sono tre direzioni principali per cui si ha

$$\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{13}=0.$$

Al passaggio della superficie dell'onda la densità dell'energia rimane continua, ma diventa funzione del tempo, cosicchè si ha dell'energia che si propaga.

La superficie frontale dell'onda, ove al tempo t è giunta la luce, è una superficie mobile S, la cui equazione scriveremo

$$(7) \qquad S(t, x, y, z)=0$$

o, risolvendo rispetto al tempo,

$$(7') \qquad t-\psi(x, y, z)=0.$$

Essa si propaga con una velocità, la cui componente secondo la normale ad S è data da

$$(8) \qquad \frac{\partial S}{\partial t}+V\sqrt{\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}=0.$$

La superficie S divide lo spazio indefinito in due regioni: nello spazio 1, ove non è ancora giunta la perturbazione luminosa, le α, β, γ, X, Y, Z sono indipendenti dal tempo, e continuano a soddisfare le (4) e (5) (ammettendo, per la teoria elettromagnetica, che le forze nell'equilibrio dipendano da un potenziale): nello spazio 2 le α ..., X ... sono funzioni del tempo.

Indichiamo con gli indici 1 e 2 le α ..., X ... negli spazî 1 e 2; e poniamo per brevità α, β, γ, X, Y, Z invece di $\alpha_2-\alpha_1$, $\beta_2-\beta_1$ ... X_2-X_1, ... Le nuove α, β, γ, X, Y, Z sono definite solamente nello spazio 2, e sopra S; nello spazio 2 continuano a soddisfare le (4) e (5), sopra S si annullano, ed ammettono derivate prime non tutte nulle (Si vede facilmente che se le

derivate di α, ... X ... sono uniformi e continue nei punti dello spazio 2 sufficientemente vicini ad S, esistono pure le derivate lungo la S medesima).

3. Poniamo

$$\theta = t - \psi(x, y, z), \tag{9}$$

essendo ψ la funzione che figura nella (7'), cosicchè $\theta = 0$ è l'equazione della superficie dell'onda: e formiamo un'equazione differenziale alla quale la ψ debba soddisfare.

Indichiamo con $\overline{F}$ una funzione del tempo, e di x, y, z quando viene espressa per mezzo di θ, x, y, z come variabili indipendenti, e con F la stessa funzione espressa per mezzo di t, x, y, z.

Si ha

$$\overline{F}(\theta, x, y, z) = F(t - \psi(x, y, z), x, y, z)$$

e

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{10}$$

Derivando rapporto ad x, y, z si trova immediatamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial \overline{F}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \tag{11}$$

Osserviamo che se per $\theta = 0$, cioè sulla superficie dell'onda, è

$$\overline{F}(\theta, x, y, z) = 0,$$

questo si verifica in tutto lo spazio a tre dimensioni percorso dalla superficie dell'onda, e perciò in tutto questo spazio $\frac{\partial \overline{F}}{\partial x}, \frac{\partial \overline{F}}{\partial y}, \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}$ devono annullarsi per $\theta = 0$: allora sulla superficie dell'onda si deve avere ad ogni istante $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial x}$ ecc. Cioè le tre derivate di F rapporto ad x, y, z non possono annullarsi senza che si annulli anche $\frac{\partial \overline{F}}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial t}$; e viceversa se $\frac{\partial F}{\partial t}$ sull'onda non è nulla, una almeno delle derivate di F rispetto ad x, y, z dev'essere diversa da zero, salvo che il punto x, y, z sia un punto conico per la $t - \psi(x, y, z) = 0$, nel quale si abbia

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

4. Applichiamo le (10) ed (11) alle (4) e (5). Trasportiamo subito nei primi membri le derivate rapporto a θ, ordinandole rispetto alle lettere

α, β, γ , X , Y , Z; dopo effettuato il calcolo è inutile ritenere il tratto sopra le lettere, e possiamo sopprimerlo, ricordandoci che le derivazioni sono fatte rispetto alle θ, x, y, z come variabili indipendenti.

Si ottiene:

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}-\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial\theta}=\frac{1}{\eta\zeta}\left(\frac{\partial.\zeta Z}{\partial y}-\frac{\partial.\eta Y}{\partial z}\right)$$

$$-\frac{\partial\beta}{\partial\theta}+\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial\theta}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial Z}{\partial\theta}=\frac{1}{\zeta\xi}\left(\frac{\partial.\xi X}{\partial z}-\frac{\partial.\zeta Z}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial X}{\partial\theta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial\theta}=\frac{1}{\xi\eta}\left(\frac{\partial.\eta Y}{\partial x}-\frac{\partial.\xi X}{\partial y}\right)$$

$$(12)\qquad -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}+\varepsilon_{11}\frac{\partial X}{\partial\theta}+\varepsilon_{12}\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\varepsilon_{13}\frac{\partial Z}{\partial\theta}=\frac{1}{\eta\zeta}\left(\frac{\partial.\zeta\gamma}{\partial y}-\frac{\partial.\eta\beta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}+\varepsilon_{12}\frac{\partial X}{\partial\theta}+\varepsilon_{22}\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Z}{\partial\theta}=\frac{1}{\zeta\xi}\left(\frac{\partial.\xi\alpha}{\partial z}-\frac{\partial.\zeta\gamma}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial\theta}+\varepsilon_{13}\frac{\partial X}{\partial\theta}+\varepsilon_{23}\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\varepsilon_{33}\frac{\partial Z}{\partial\theta}=\frac{1}{\xi\eta}\left(\frac{\partial.\eta\beta}{\partial x}-\frac{\partial.\xi\alpha}{\partial y}\right).$$

Per quello che s'è già visto più sopra, facendo $\theta=0$ i secondi membri delle (12) sono nulli in tutto lo spazio a tre dimensioni percorso dalla superficie dell'onda. Affinchè le derivate di α, β, γ , X , Y , Z rapporto a θ non siano identicamente nulle per $\theta=0$ è necessario che si annulli il determinante dei coefficienti di queste derivate, ed è sufficiente che non siano nulli contemporaneamente tutti i suddeterminanti d'una stessa orizzontale. Si ha perciò l'equazione differenziale della superficie dell'onda

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z} & \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z} & 0 & -\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x} & 0 & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}=0.$$

La regola di Laplace per le due matrici di tre orizzontali mostra che i termini di sesto grado nello sviluppo del determinante si elidono, e l'equazione (13) è di quarto grado nelle derivate parziali.

Il determinante (14) si riduce facilmente alla forma

$$
(13') \quad \begin{vmatrix}
\varepsilon_{11} - \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 & \varepsilon_{12} + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \varepsilon_{13} + \frac{1}{\xi\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\
\varepsilon_{12} + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} & \varepsilon_{22} - \left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 & \varepsilon_{23} + \frac{1}{\eta\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\
\varepsilon_{13} + \frac{1}{\xi\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} & \varepsilon_{23} + \frac{1}{\eta\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z} & \varepsilon_{33} - \left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Ora ponendo $S(t, x, y, z) = t - \psi(x, y, z) = 0$ nella (8) si ricava

$$
V = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2}}
$$

e d'altra parte si ha, a meno del segno $\pm$,

$$
\lambda = \frac{V}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \mu = \frac{V}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \nu = \frac{V}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \text{con} \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1 .
$$

Sostituendo questi valori nella (13′) e moltiplicando per V^6 si ottiene

$$
(14) \quad \begin{vmatrix}
\varepsilon_{11}V^2 + \lambda^2 - 1 & \varepsilon_{12}V^2 + \lambda\mu & \varepsilon_{13}V^2 + \lambda\nu \\
\varepsilon_{12}V^2 + \lambda\mu & \varepsilon_{22}V^2 + \mu^2 - 1 & \varepsilon_{23}V^2 + \mu\nu \\
\varepsilon_{13}V^2 + \lambda\nu & \varepsilon_{23}V^2 + \mu\nu & \varepsilon_{33}V^2 + \nu^2 - 1
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Questa equazione bicubica in V si spezza nel prodotto di V^2 per una equazione biquadratica; è più generale che quella di Fresnel, e si applica a mezzi anisotropi qualsiasi; si riduce alla (1) quando in tutti i punti del mezzo rifrangente le *direzioni principali* di polarizzazione dielettrica o di elasticità coincidono con le normali alle superficie ortogonali

$$
x = \text{cost} \quad , \quad y = \text{cost} \quad , \quad z = \text{cost} .
$$

In questo caso $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{13} = 0$; l'equazione (14) divisa per

$$
V^2(\varepsilon_{11}V^2 - 1)(\varepsilon_{22}V^2 - 1)(\varepsilon_{33}V^2 - 1)
$$

diviene

$$
1 + \frac{\lambda^2}{\varepsilon_{11}V^2 - 1} + \frac{\mu^2}{\varepsilon_{22}V^2 - 1} + \frac{\nu^2}{\varepsilon_{33}V^2 - 1} = 0
$$

che coincide con la (1) di Fresnel, quando si ponga

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{a^2}\,,\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{b^2}\,,\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{c^2}$$

e si facciano le ovvie riduzioni.

5. La discontinuità dei vettori $\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \frac{\partial\beta}{\partial t}, \frac{\partial\gamma}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ giace nel piano tangente alla superficie dell'onda.

Infatti in ambedue le teorie della luce i vettori α, β, γ, u, v, w devono soddisfare non soltanto le (6), ma anche le due relazioni

$$\frac{1}{\xi\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\eta\zeta\alpha}{\partial x} + \frac{\partial.\zeta\xi\beta}{\partial y} + \frac{\partial.\xi\eta\gamma}{\partial z}\right\} = 0$$

$$\frac{1}{\xi\eta\zeta}\left\{\frac{\partial.\eta\zeta X}{\partial x} + \frac{\partial.\zeta\xi Y}{\partial y} + \frac{\partial.\xi\eta Z}{\partial z}\right\} = 0\,.$$

Applichiamo a queste due equazioni le (11) tenendo conto che per $\theta = 0$ le α, β, γ, u, v, w sono nulle in tutto lo spazio 2: otteniamo

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial\theta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial\theta} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = 0\,,$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial\theta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial\theta} = 0\,.$$

Queste due relazioni esprimono appunto la proprietà enunciata pei due vettori, e significano che l'onda è trasversale.

6. Tornando alle equazioni (7) e (8) poniamo per brevità

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p_0 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial x} = p_1 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y} = p_2 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial z} = p_3$$

e facciamo la sostituzione in (14): si ottiene così la più generale equazione differenziale per la superficie dell'onda sotto la forma

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} \varepsilon_{11}p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 & \varepsilon_{12}p_0^2 + p_1p_2 & \varepsilon_{13}p_0^2 + p_1p_3 \\ \varepsilon_{12}p_0^2 + p_1p_2 & \varepsilon_{22}p_0^2 - p_3^2 - p_1^2 & \varepsilon_{23}p_0^2 + p_2p_3 \\ \varepsilon_{13}p_0^2 + p_1p_3 & \varepsilon_{23}p_0^2 + p_2p_3 & \varepsilon_{33}p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Com'è ben noto, la $S(t, x, y, z) = 0$ è determinata da questa equazione differenziale quando si imponga la condizione che per $t = 0$ determinata si riduca ad una data superficie S_0.

In un'altra Nota esporrò le soluzioni che si ottengono in alcuni casi molto semplici, nei quali si può facilmente trovare un integrale completo della (15).

Intanto voglio rilevare il fatto che risulta dalle equazioni (14) o (15); che in un mezzo cristallino eterogeneo una data sorgente luminosa S_0 emette due sole specie di onde, le quali sono caratterizzate dalle due diverse velocità (positive) di propagazione secondo la normale.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi alternativi sotto l'azione di correnti ad alta frequenza. Nuovo rivelatore di onde hertziane.* Nota del prof. Riccardo Arnò, presentata dal Socio G. Colombo.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul fenomeno Majorana nei campi oscillatori.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

La spiegazione ormai universalmente accettata, che fa consistere il fenomeno Majorana in una orientazione, prodotta dal campo, sulle particelle sospese nella soluzione colloidale d'idrato ferrico, rende per diverse ragioni più interessanti le ricerche destinate allo studio del fenomeno nei campi variabili.

Già il Majorana stesso aveva riconosciuto che nel campo dovuto a un piccolo solenoide percorso dalle scariche d'una bottiglia di Leyda, si manifestano nettamente effetti di birifrangenza. Poco dopo Ewell (¹) dimostrò che sotto l'azione del campo prodotto da un elettromagnete traversato da correnti alternate comuni le frange del compensatore di Babinet (il cui spostamento misurava la birifrangenza acquistata dal ferro Bravais nel campo) apparivano spostate, ma molto torbide, come se fossero animate da un rapido movimento.

Seguirono le pregevolissime ricerche di Cotton e Mouton (²) sulla birifrangenza magnetica nei campi costanti, le quali dimostrarono, fra l'altro, la esistenza nel ferro Bravais di due specie diverse di particelle: le une molto piccole che sarebbero dotate di birifrangenza negativa, le altre notevolmente più grosse, e raccoglientisi perciò di preferenza nel fondo della bottiglia, e dotate invece di birifrangenza positiva. Consigliai perciò al dott. Tieri di separare, per quanto fosse possibile, dei campioni di liquido prevalentemente ricchi di particelle negative o positive e di studiare con essi l'azione dei campi variabili dovuti alle scariche oscillatorie d'alta frequenza.

Il Tieri, superando notevoli difficoltà sperimentali, ottenne dei risultati molto interessanti. Essi dimostrerebbero che anche le più piccole particelle, cioè quelle a birifrangenza negativa, non sono capaci di seguire interamente le vicissitudini del campo oscillante con la frequenza di circa un milione e mezzo di periodi per secondo. Ma sotto l'azione dei successivi impulsi (che son tutti in un senso poichè la birifrangenza è proporzionale al quadrato del

(¹) Phys. Review, t. XVIII, 1903, pag. 292.
(²) Ann. d. Chimie et de Phys., t. XI, pag. 145, 1907.

campo) la birifrangenza crescerebbe rapidamente, conserverebbe un valore sensibilmente costante (malgrado le oscillazioni del campo) e poscia decrescerebbe in modo aperiodico.

E invero le frange al compensatore di Babinet, che venivan prodotte utilizzando la luce stessa della scintilla determinante la scarica, apparivano spostate dalla posizione normale, un po' torbide, ma della larghezza normale.

I liquidi positivi non diedero traccia di birifrangenza, e i liquidi misti diedero solo una birifrangenza negativa, cosicchè parrebbe che l'azione della scarica, per la sua breve durata, basti a orientare, sebbene aperiodicamente, le particelle negative, ma non si esplichi affatto sulle particelle positive più grosse.

Contemporaneamente io eseguivo, sui medesimi campioni che servirono al Tieri, delle ricerche in campi oscillatorî persistenti, di frequenza naturalmente più bassa, e su queste mi permetto oggi di riferire brevemente.

Era utile cominciare, anzitutto, dallo studio della birifrangenza nei campi prodotti con le correnti alternate industriali; e ciò perchè Ewell aveva ricercato in blocco il ferro Bravais comune, ch'è un liquido misto, e aveva accennato solo all'intorbidamento delle frange, cosicchè non si sapeva se al passaggio del campo per zero si annullasse del tutto la birifrangenza, o se ne restasse una frazione più o meno rilevante.

Ricorsi perciò a un'elettrocalamita anulare, costruita con fili di ferro di $^2/_{10}$ di millimetro, nel cui interferro molto corto si collocava una vaschetta di vetro con la soluzione. Un fascio di luce solare traversava un nicol, la vaschetta, il compensatore di Babinet e un secondo nicol incrociato col primo. Eccitando il campo alternativo le frange si spostavano d'un tratto circa eguale al loro intervallo, manifestandosi molto torbide nella nuova posizione; cosicchè sembrava che esse oscillassero, ma di poco, senza tornar mai nella posizione normale.

Bastò ricorrere a un'illuminazione intermittente (ottenuta interrompendo il fascio con un disco rotante munito di strettissime fenditure, in modo che l'illuminazione avesse una durata brevissima), e realizzare quasi il sincronismo fra le intermittenze luminose e il semiperiodo della corrente alternata, perchè le frange apparissero immobili, o animate da un lievissimo movimento oscillatorio, come nei comuni processi stroboscopici. E così potè essere accertato il ritorno assoluto delle frange nella posizione normale a una certa fase del regime oscillatorio, dimostrandosi con ciò che la birifrangenza seguiva fedelmente le vicissitudini del campo, annullandosi con questo.

Questo risultato fu ottenuto tanto coi liquidi negativi che con quelli positivi. La frequenza era di 42 periodi per secondo; ma a causa della presenza del ferro il campo passava assai rapidamente pel valore zero, come si potè constatare col tubo di Braun.

Ottenere campi persistenti di frequenza maggiore delle industriali e di notevole intensità è molto difficile. Or a me occorreva un campo di

almeno un migliaio d'unità e di frequenza notevolmente inferiore a quella utilizzata dal Tieri. Il rallentare le scariche oscillatorie d'un condensatore, con l'inserzione di una forte self, aveva per effetto di diminuire molto la intensità della corrente di scarica, e quindi l'intensità del campo.

D'altra parte i dispositivi per la produzione di correnti persistenti, da me a lungo altra volta studiati, permettono solo di ottenere correnti di non grandissima intensità; mentre l'adozione del ferro ha il doppio effetto di rendere i dispositivi suddetti spesso impraticabili, e, in ogni caso, d'aumentare moltissimo l'induttanza del sistema oscillante, abbassando di molto la frequenza. Era inoltre necessario ricorrere a un circuito magnetico quasi chiuso, con un interferro di pochi millimetri, e lavorare con elevati valori dell'induzione; si aveva perciò, come anche pel gran numero di alternazioni a secondo, una rilevante dissipazione d'energia per isteresi.

Per utilizzare il dispositivo di Duddel costruii una piccola elettrocalamita anulare del diametro di 4 cm., e spessa circa 1 cm. Il nucleo era costituito da fili di ferro finissimi, e lasciava libero un interferro di circa 6 mm.; vi erano avvolti fino alle estremità polari due strati di filo sottile accuratamente isolato, cosicchè con la corrente di 2 o 3 ampères era possibile ottenere nell'interferro un campo cui corrispondeva una birifrangenza magnetica vivamente apprezzabile.

Con questo elettromagnete, e con una capacità di 20 microfarad, fu costituito un circuito Duddel derivato ai poli d'un arco voltaico. E con qualche tentativo, manovrando i carboni a mano, si riusciva a eccitare delle oscillazioni elettriche che duravano un tempo sufficiente per le osservazioni. Era perciò necessaria una forte capacità, che associata alla grande autoinduzione della bobinetta abbassava notevolmente la frequenza; cosicchè non poterono essere oltrepassate 1500 vibrazioni al secondo.

Per l'osservazione della birifrangenza ricorsi semplicemente ai due nicol incrociati e a un fascio di luce solare illuminante una fenditura. Il campo luminoso si illuminava vivamente all'eccitazione delle correnti di Duddel, e allora si osservava con un cannocchiale, su uno specchio girante, l'immagine della fenditura.

Questa appariva, per la rotazione dello specchio, come un nastro luminoso, solcato da tante linee nere sottili, equidistanti, parallele alla fenditura; dimostrando così che negli istanti in cui il campo passava per zero s'annullava la birifrangenza: e ciò tanto pei liquidi negativi che pei positivi.

Adunque fino alla frequenza di 1500 periodi, cui corrispondono 3000 annullamenti del campo al minuto secondo, possiamo asserire che la birifrangenza si annulla anch'essa periodicamente.

Un'ultima ricerca fu fatta ricorrendo alle correnti interrotte con l'apparecchio di Wehnelt. Fu adoperata allo scopo un'elettrocalamita anulare più grande, circa due volte e mezza, ma avente il medesimo interferro, e due

strati di filo più grosso. Così si poterono raggiungere valori del campo notevolmente più alti.

L'interruttore era costituito da un tubicino di vetro con un sottile filo di platino sporgente circa mezzo centimetro. Si ebbero così circa 1500 interruzioni al secondo con intensità di corrente non troppo elevate; e fu possibile ottenere che la durata totale dell'interruzione fosse inferiore a $^1/_{10}$ dell'intero periodo.

Il campo si annullava in un tempo che potè essere stimato di circa $\frac{1}{20,000}$ di secondo, e dopo risaliva in un tempo dello stesso ordine al valore primitivo.

Ricorsi allo stesso dispositivo ottico adoperato nella esperienza precedente. E anche qui allo specchio girante venne osservato un nastro luminoso con delle righe nere equidistanti abbastanza sottili, cosicchè anche in questo caso la birifrangenza si annullava nel brevissimo tempo in cui il campo raggiungeva il valore zero.

Questo risultato fu ottenuto coi liquidi negativi e coi positivi; cosicchè ne possiamo concludere che la birifrangenza magnetica del ferro Bravais, negativo o positivo, segue le vicissitudini del campo con un ritardo inferiore a $\frac{1}{20,000}$ di secondo; ovvero che: sopprimendo bruscamente il campo magnetico orientatore, le particelle cui è dovuta la birifrangenza (anche le più grosse) riprendono l'orientazione normale in un tempo inferiore a $\frac{1}{20,000}$ di secondo.

Ora i signori Cotton e Mouton, nella loro Memoria citata, avanzano l'idea che la forza la quale si oppone all'orientazione magnetica dei granuli risieda nel loro vivace movimento browniano; d'altra parte risulterebbe dalle loro osservazioni che le particelle più grosse, cui spetta la birifrangenza positiva, avrebbero già dimensioni microscopiche. Esaminerò in una altra Nota fino a che punto queste due idee siano tra loro conciliabili.

Fisica. — *Sulle forze quasi-elastiche dovute ai movimenti browniani*. Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

Fisica. — *Sulla natura delle particelle ultramicroscopiche che intervengono nel fenomeno Majorana, e su un nuovo metodo di studio del campo magnetico*. Nota di Mario Tenani, presentata dal Corrispondente A. Battelli.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Di un nuovo coltro dinamometrico per la determinazione di alcune caratteristiche fisico-meccaniche del terreno.* Nota del prof. FEDERICO GIORDANO, presentata dal Socio G. KÖRNER.

Chimica. — *Eteri fosforici di alcuni alcooli polivalenti e di alcuni idrati di carbonio.* Nota di ANGELO CONTARDI, presentata dal Socio G. KÖRNER.

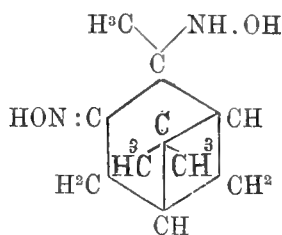
Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Isonitramminossima dell'α-pinene e suoi prodotti di decomposizione* [1]. Nota di GUIDO CUSMANO, presentata dal Corrispondente A. PERATONER.

In continuazione di un mio studio intorno al comportamento delle idrossilammine ed idrossilamminossime di fronte all'acido nitroso [2], esporrò in questa Nota i risultati ottenuti dal nuovo tipo delle orto-idrossilamminossime che da poco tempo ho fatto conoscere [3].

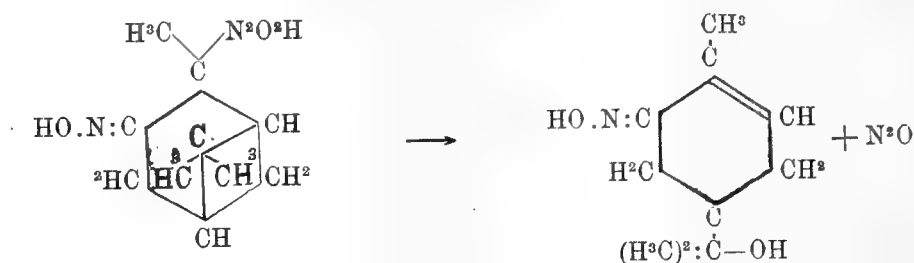
Non tutti i composti del tipo stesso reagiscono con l'acido nitroso; così, per es. fra quelli descritti finora, i derivati del limonene rimangono passivi, mentre i derivati del pinene e dell'amilene forniscono prodotti ben caratterizzati.

Sulla idrossilamminossima dell'α-pinene

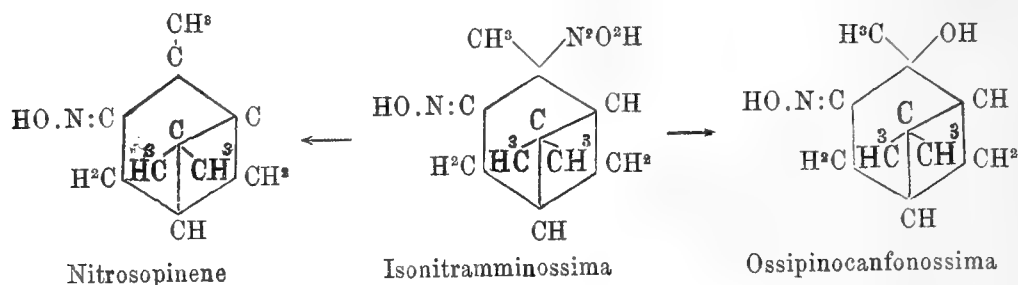
$$\begin{array}{c} H^3C \diagdown \diagup NH.OH \\ C \\ HON:C \quad \overset{}{C} \quad CH \\ \overset{3}{HC}\ \overset{3}{CH} \\ H^3C \qquad\qquad CH^2 \\ CH \end{array}$$

l'acido nitroso reagisce da prima solamente con il gruppo ossamminico. L'isonitrammina, che si ottiene, è un corpo cristallino abbastanza stabile. A secco si decompone profondamente solo a 127°. Sospesa nell'acqua, invece, basta

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Cagliari.
[2] Gazz. Chim. ital. *39*, II, 453.
[3] Gazz. Chim. ital. *40*, I.

riscaldare a b. m. per scinderla quantitativamente in ossidiidrocarvossima (¹) e ossidulo d'azoto:

$H^3C \diagdown \diagup N^2O^2H$; C ; HO.N:C ; C ; CH ; ^2HC ; HC ; CH ; CH^2 ; CH $\longrightarrow$ CH^3 ; C ; HO.N:C ; CH ; H^2C ; CH^2 ; C ; $(H^3C)^2 : C—OH$ $+ N^2O$

Agli stessi risultati si giunge mediante l'acido acetico diluito.

Gli alcali, invece, agiscono diversamente: anche essi provocano la decomposizione con grande facilità e forniscono l'ossidulo d'azoto, ma dànno simultaneamente nitrosopinene e un prodotto di sostituzione del gruppo isonitramminico con l'ossidrile, cioè l'ossima del pineneidrato (ossipinocanfonossima) finora sconosciuta. Poichè da quest'ultima non si ottiene, per disidratazione, il nitrosopinene, è da ritenere che la decomposizione mediante gli alcali segua due vie indipendenti:

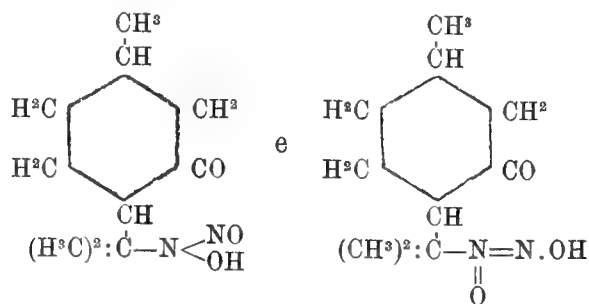
Nitrosopinene $\longleftarrow$ Isonitramminossima $\longrightarrow$ Ossipinocanfonossima

L'ossima del pineneidrato, tuttavia, è probabilmente anche il primo prodotto dell'azione degli *acidi diluiti* sull'isonitramminossima; difatti, gli acidi più deboli e diluiti (acetico, iponitroso) la *trasformano quantitativamente*, già a freddo, nell'ossidiidrocarvossima.

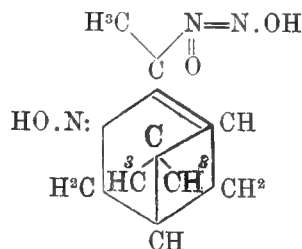
Come si è visto, l'isonitramminossima, cimentata nelle varie condizioni, espelle sempre il gruppo isonitramminico integralmente allo stato d'acido iponitroso e rispettivamente d'ossidulo d'azoto e acqua.

Ora, nella prima Nota già ricordata, ho mostrato che l'isonitrammina del pulegone (8-isonitrammino-mentone) invece si decompone in due modi: o *spontaneamente*, eliminando in prima fase acido nitroso, il quale poi determina una serie di reazioni, che in definitiva conducono all'8-ossi-, all'8-nitro e all'8-nitrosomentone, acqua e azoto; o, *per azione degli alcali*, scindendosi semplicemente in 8-ossimentone, ossidulo d'azoto ed acqua.

(¹) Questo composto è stato ottenuto da Wallach (Ann. *291*, 347 e 356) dal bisnitrosocloruro del terpineolo *α*, eliminando acido cloridrico con gli alcali; e, inoltre direttamente dall'ossidiidrocarvone.

La causa di questi due modi di decomposizione della detta isonitrammina, ritenevo doversi riportare alla possibilità di agire secondo le formole tautomeriche:

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} CH^3 \\ \dot{C}H \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ H^2C \quad\quad CO \\ CH \\ (H^3C)^2:\dot{C}-N<^{NO}_{OH} \end{array}
& \quad e \quad &
\begin{array}{c} CH^3 \\ \dot{C}H \\ H^2C \quad\quad CH^2 \\ H^2C \quad\quad CO \\ CH \\ (CH^3)^2:\dot{C}-\underset{\overset{\|}{O}}{N}=N.OH \end{array}
\end{array}
$$

di cui la prima spiegherebbe meglio l'eliminazione dell'acido nitroso e la seconda quella dell'acido iponitroso. In seguito a ciò, se si accetta quella mia ipotesi, l'isonitramminossima del pinene, eliminando sempre acido iponitroso, manifesterebbe attitudine a reagire preferibilmente nella forma:

$$
\begin{array}{c}
H^3C \quad \underset{\overset{\|}{O}}{N}=N.OH \\
C \\
HO.N: \quad C \quad CH \\
H^2C \quad HC^{\beta} \quad CH^{\beta} \quad CH^2 \\
CH
\end{array}
$$

Parte sperimentale.

Isonitramminossima dell'α-pinene.

Questo composto si ottiene, facendo gocciolare una soluzione acquosa di nitrito sodico, su una soluzione acquosa, fortemente raffreddata, del cloridrato o del solfato dell'o-idrossilamminossima dell'α-pinene. Se non si hanno a disposizione i sali, bisogna disciogliere la base nella quantità calcolata dell'acido diluito, poichè un eccesso di questo provocherebbe la decomposizione del prodotto ricercato. Questo si forma piuttosto lentamente e, operando nelle condizioni adatte, si separa cristallino e quasi puro; in condizioni meno favorevoli, pastoso: in quest'ultimo caso, però, presto indurisce. Dalle acque madri, per mezzo dell'etere si estraggono piccole quantità di ossidiidrocarvossima. L'isonitramminossima, che si ha con rendimento circa teorico, cristallizza bene dall'etere o da miscugli di questo ed etere di petrolio; e si presenta in grossi prismi incolori, i quali tuttavia, con il tempo divengono un po' rosei. Fonde decomponendosi a 127°.

Analisi: sost. gr. 0,2230; CO^2 gr. 0,4297; H^2O gr. 0,1565.

	Trovato %	Calcolato per $C^{10}H^{17}O^2N^2$
C	52,56	52,79
H	7,79	7,55

Il composto è molto solubile in alcool, anche a freddo; abbastanza in etere a caldo; quasi insolubile in ligroina. Si scioglie nei carbonati alcalini; dà la reazione di Liebermann; la sua soluzione alcoolica viene colorata in rosso vinoso dal cloruro ferrico.

Sale sodico. — Si ottiene trattando una soluzione alcoolico-eterea dell'isonitrammina con quantità equimolecolare di alcoolato sodico: forma una polvere, che riscaldata, si decompone con violenza a 92-95°. Assai solubile in alcool e in acqua, nelle cui soluzioni si altera con facilità.

Sale d'idrossilammina. — Mescolando due soluzioni equimolecolari alcoolico-eteree dell'isonitrammina e d'idrossilammina, si separa subito una massa molle, voluminosa. In breve tempo però, questa si sgretola in una polvere cristallina bianca, che fonde decomponendosi, a 110°. Si può avere in cristalli prismatici lucenti, sciogliendola a caldo in alcool assoluto e aggiungendo, poi, etere. Riduce il liquido di Fehling a freddo: dà appena la reazione di Liebermann; scaldata in soluzione acquosa si altera.

Analisi: sost. gr. 0,2284; CO^2 gr. 0,3909; H^2O gr. 0,1671.

	Trovato %	Calcolato per $C^{10}H^{17}O^2N^2 + H^2N.OH$
C	46,67	46,09
H	8,12	7,72

Decomposizione dell'o-isonitramminossima dell'α-pinene.

a) Per riscaldamento con acqua. — Si sospende in acqua la sostanza ben polverizzata e si riscalda a b. m. in un palloncino munito di tubo di sviluppo; non appena il bagno giunge presso all'ebollizione, la decomposizione comincia. Si sviluppa rapidamente un gas che viene raccolto sul mercurio; intanto, la sostanza in parte si discioglie, in parte si separa come olio. Si riscalda sino al cessare dello sviluppo gassoso; ciò che operando su un gr. di sostanza, avviene dopo circa una mezzora.

Si ottengono circa 115 cc. di gas a 0° e 760 mm., costituito interamente da ossidulo d'azoto. Per una decomposizione quantitativa se ne calcolano cc. 129.

Nel palloncino, con il raffreddamento, dalla soluzione acquosa e dalla parte oleosa cristallizza una notevole quantità di ossidiidrocarvossima pura fus. a 133-134°. La sua identità con il composto avuto per altra via da Wallach (loc. cit.), oltre che per i caratteri fisici e chimici, ho anche provato mediante l'identità dei semicarbazoni ottenuti da quell'A. direttamente dall'ossidiidrocarvone, e da me, trasformando da prima l'ossima stessa con acido nitroso in pernitroso derivato e facendo, poi, agire su questo la semicarbazide, con il metodo di Rimini [1] per passare dai pernitroso composti ai semicarbazoni.

[1] R. A. L. [5], *91*, 212.

La decomposizione con acqua a caldo non dà altri prodotti, oltre ai suddetti.

b) Per azione dell'acido acetico diluito. — La decomposizione descritta si può avere anche a freddo, mediante l'acido acetico diluito; senonchè essa procede allora con grande lentezza. Occorrono alcuni giorni per demolire gr. 0,5 d'isonitramminossima; però l'ossidulo d'azoto si elimina quantitativamente perchè se ne ottengono cc. 64 circa, mentre se ne calcolano cc. 64,5 (a 0° e 760 mm.).

L'acido acetico in soluzione acquosa al 20 %, per riscaldamento a b. m. scinde quantitativamente l'isonitramminossima ancora in ossidulo d'azoto e ossidiidrocarvossima; accanto a questa, tuttavia, si nota una piccola quantità di carvossima.

c) Per azione degli alcali a caldo. — Riscaldando a b. m. gr. 1 del sale sodico dell'isonitrammina, in soluzione d'alcool metilico o di acqua si sviluppano cc. 128 di gas misurato a 0° e 768 mm. riconoscibile per ossidulo d'azoto; esso si elimina in quantità corrispondente al teorico, che si calcola cc. 129. Dalla soluzione alcoolica o acquosa, precipita mediante aggiunta di molt'acqua, una sostanza pastosa che, distillata in corrente di vapore, fornisce una notevole quantità di *nitrosopinene* puro. Ciò che rimane nel pallone, della pasta suddetta, è insolubile negli acidi e negli alcali, fonde tra 70° e 80° e non si riesce a far cristallizzare.

La soluzione primitiva, da cui si separa la sostanza pastosa, si tratta con acido carbonico e si concentra a b. m., essa allora separa pochi cristalli di *ossi-pinocanfonossima*, prodotto che verrà in seguito descritto.

d) Per azione degli alcali a freddo. — Il rendimento dell'ossi-pinocanfonossima migliora notevolmente, se la decomposizione dei sali alcalini dell'isonitrammina si fa avvenire in soluzione acquosa a temperatura ordinaria.

In questo caso, però, lo sviluppo dell'ossidulo d'azoto dura alcuni giorni, e inoltre, si arresta, o diviene lentissimo, presso ai due terzi della quantità calcolata. Se, allora, si procede alla separazione dei prodotti della reazione con il processo indicato sotto *c*), si nota che la quantità del nitroso pinene è grandemente diminuita; si forma ancora in quantità la sostanza fus. 70°-80° (che, come ho detto, non è stata per ora ulteriormente studiata) e infine si ha circa il 20 % dell'isonitramminossima impiegata, come

Orto-ossi-pinocanfonossima

la quale costituisce il prodotto più interessante della reazione. Il composto grezzo si presenta in lamine rombiche lucenti trasparenti e fonde a 124-125°. Si purifica mediante cristallizzazione da miscugli di etere etilico ed etere di petrolio: da essi si separa in bellissimi prismi rombici, liberi e fonde allora a 128°, rammollendosi qualche grado prima.

Analisi: sost. gr. 0,2153; CO^2 gr. 0,5186; H^2O gr. 0,1843.

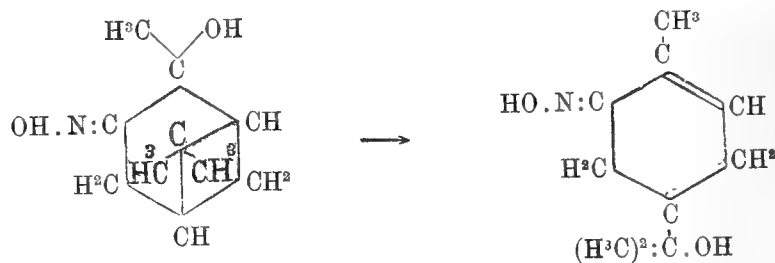
	Trovato	Calcolato per $C^{10}H^{17}O^{2}N$
C	65,68	65,49
H	9,51	9,37

Il composto rassomiglia alquanto nel comportamento al suo isomero, l'ossidiidrocarvossima; difatti, come questo è facilmente solubile in alcool, etere, acqua, come pure in idrato sodico al 5 °/₀; però, si discioglie più lentamente in HCl al 10 °/₀, in cui si decompone separando idrossilammina.

È stabile di fronte agli alcali: difatti si può riscaldare lungamente in soluzioni acquose o alcooliche a diversa concentrazione di idrati alcalini e riaverlo totalmente inalterato, mediante l'acido carbonico.

Invece, dagli *acidi è subito attaccato* con risultati diversi: come è detto innanzi, nell'acido cloridrico, anche a freddo, perde il gruppo ossimico, sviluppando odore mentaceo.

L'acido acetico diluito rispetta il gruppo ossimico, ma *trasforma integralmente l'o-ossi-pinocanfonossima in ossi-diidrocarvossima.*

H^3C OH / C / OH.N:C — C — CH / H^2C HC CH CH^2 / CH ⟶ CH^3 / C / HO.N:C — CH / H^2C — CH^2 / C / $(H^3C)^2$:C.OH

Difatti, se si riscalda a b. m. una soluzione della prima in acido acetico al 15 °/₀ circa, dopo qualche minuto la soluzione stessa intorbida; e allora con il raffreddamento separa gocce oleose, le quali in breve tempo cristallizzano. Il prodotto così ottenuto, come pure quello che si ha per svaporamento della soluzione acetica, cristallizza da miscugli di etere e ligroina in prismetti allungati riuniti in ciuffi, che fondono a 133-134° e conservano questo punto di fusione anche se mescolati con ossidiidrocarvossima; al contrario, lo abbassano a 98-100°, se mescolati con l'ossipinocanfonossima, da cui si originano.

Agli stessi risultati si giunge, lasciando per qualche ora a freddo l'ossipinocanfonossima in soluzione concentrata d'acido ossalico.

Chimica. — *Sui composti ossigenati del fluoro* (¹). Nota III di G. Gallo, presentata dal Socio G. Paternò.

In continuazione alla mia Nota pubblicata in questi Rendiconti (vol. XIX, serie V, I sem., fasc. 5°), sopra un tentativo di preparazione dei composti ossigenati del fluoro, riferisco nella presente il risultato definitivo di un'altra serie di esperienze sullo stesso argomento.

Nella mia Nota precedente avevo riferito come dopo pochi minuti dacchè il fluoro, insieme coll'ossigeno, aveva incominciato a penetrare nel tubo ozonogeno, che era sottoposto all'azione delle scariche oscure, avvenne un'eplosione che mi provocò la rottura del matraccio successivo al tubo ozonogeno stesso, e fece saltare in aria il tappo di zolfo del mio apparecchio a produzione del fluoro.

Sebbene, come avevo fatto rilevare nella Nota succitata, sia da escludere che l'idrogeno che si sviluppa al polo negativo del mio apparecchio, possa essere penetrato nello spazio anodico, e da questo nel tubo ozonogeno, arrivando così in contatto col fluoro, e coll'ossigeno, pure, allo scopo di eliminare completamente questa possibile causa di errore, ho creduto opportuno di modificare l'esperienza nel senso, di preparare prima a parte una certa quantità di fluoro, e di farlo quindi arrivare, insieme coll'ossigeno, nel tubo ozonogeno, sottoposto all'azione delle scariche oscure.

A tale scopo ho preparato nuovamente dell'acido fluoridrico anidro, per decomposizione di circa 1 kg. di fluoridrato potassico secco, e sottoposi l'acido stesso, in presenza di fluoridrato potassico, all'elettrolisi nel mio apparecchio [2].

Questo, come il solito, era immerso in cloruro di metile, in tranquilla ebollizione a -23, ed inoltre dello stesso cloruro di metile, avevo riempito il manicotto sovrastante, contenente i due serpentini, per lo sviluppo dello idrogeno da una parte e del fluoro dall'altra. La corrente impiegata, fu ancora di 40 Volt, e 2-3 Amp.

Il fluoro che si svolgeva al polo positivo, veniva fatto passare per un tubo di rame, lungo 30 cm., e contenente del fluoruro sodico secco, allo scopo di trattenere le ultime traccie di acido fluoridrico. Allorquando da questo tubo, incominciò a svolgersi una corrente regolare di fluoro, riconoscibile all'odore, e per il fatto che carbonizzava il sughero, ed accendeva del silicio cristallizzato, fissai a perfetta tenuta l'estremità del tubo di rame,

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica applicata della R. Scuola degli Ingegneri di Roma.

(²) G. Gallo, Rendiconti della R. Accad. Lincei, vol. XIX, serie V, fasc. 4°.

entro un tubo di vetro, munito di rubinetto, e che faceva parte di un tappo di vetro che chiudeva a smeriglio una bottiglia di Mariotte, del volume di 3 litri circa, e ripiena di anidride carbonica.

La bottiglia e le altre parti in vetro, erano state dapprima lavate ed asciugate molto accuratamente, poichè la minima traccia di sostanza organica, o di umidità, fornisce col fluoro, dell'acido fluoridrico, che intacca il vetro.

L'anidride carbonica era stata pure depurata, e disseccata prima con acqua, poi con acido solforico concentrato, e quindi con anidride fosforica.

Il tappo inferiore della bottiglia di Mariotte pure in vetro, si allungava all'esterno in un tubo di vetro, munito di rubinetto, e terminante con un tubetto di platino a punta. Aprendo con precauzione questo rubinetto, si provocava una leggera aspirazione alla parte superiore della bottiglia, e così, per spostamento, arrivai in breve a riempire con fluoro la bottiglia. Allorquando all'estremità di platino del tubo di vetro inferiore, ottenni un gas che accendeva il silicio a freddo, sospesi l'operazione, e chiudendo i due rubinetti potevo disporre di circa 3 litri di fluoro (1).

Per eseguire l'esperienza ricorsi quindi allo stesso apparecchio descritto nella mia precedente Nota, colla sola differenza che nel matraccio successivo al tubo ozonogeno, introdussi circa 10 gr. di idrato potassico puro, fuso di recente in crogiuolo di argento allo scopo di fissare l'eventuale composto che si fosse potuto formare; inoltre presi le necessarie precauzioni per evitare il pericolo di un'esplosione in cui ero corso nell'esperienza precedente, circondando tutto l'apparecchio con una gabbia metallica.

Disposte così le cose, adattai il tubo superiore della bottiglia di Mariotte ad uno dei tubi adduttori nell'apparecchio generatore di ozono, mentre collegai il tubo situato alla parte inferiore della bottiglia stessa, coll'apparecchio di svolgimento di anidride carbonica, depurata come sopra, ed in modo che gorgogliassero circa 60 bolle di gas per minuto. Contemporaneamente feci arrivare nel tubo ozonogeno una corrente ugualmente lenta di ossigeno, depurato e disseccato nello stesso modo. Dopo alcuni minuti misi in azione il rocchetto di Ruhmkorff, facendo scoccare la scarica silenziosa fra le due armature metalliche.

Dopo 4 o 5 minuti dall'inizio dell'esperienza, una esplosione si ripetè nell'interno del tubo, la quale ancora ebbe per risultato di mandare in pezzi il matraccio contenente l'idrato potassico, e di fare uscire con forza i tappi dalla bottiglia di Mariotte. I piccoli pezzi di idrato potassico, che ho potuto raccogliere subito dopo l'esplosione, non diedero alcuna delle reazioni caratteristiche di un composto ossigenato del fluoro, analogo all'ipoclorito, con un sale di nichel e di cobalto.

(1) Il vetro della bottiglia divenne leggermente iridiscente in qualche punto.

Resta però confermato quanto avevo riferito precedentemente; cioè, che per azione della scarica oscura, deve aver luogo la formazione di un composto endotermico estremamente instabile fra l'ossigeno ozonizzato, ed il fluoro; nello stesso tempo ho dovuto convincermi, che pur troppo era impossibile, nelle condizioni della mia esperienza, poter fissare il composto stesso, qualunque esso sia.

Sento il dovere di porgere pubblicamente i miei più vivi ringraziamenti al chiarissimo prof. Paternò, che mise a mia disposizione tutti gli apparecchi di platino necessarî alla preparazione dell'acido fluoridrico anidro, ed al chiarissimo prof. G. Giorgis, che mi ha permesso di disporre largamente di tutti i mezzi che il nostro laboratorio poteva offrire, per compiere queste lunghe e costose ricerche che furono continuate per circa tre anni.

Chimica. — *Sulla precipitazione dell'acido arsenico col molibdato ammonico.* Nota di G. MADERNA, presentata dal Socio R. NASINI.

Chimica. — *Il sistema ternario rame-antimonio-bismuto.* Nota di N. PARRAVANO e E. VIVIANI, presentata dal Socio PATERNÒ.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Petrografia. — *La melilite negli inclusi delle lave etnee* (¹). Nota preliminare del dott. FR. STELLA STARRABBA, presentata dal Corrispondente G. DE LORENZO.

Nelle lave etnee delle ultime grandi eruzioni del 1886, del 1892 e del 1910 ed in quelle della piccola corrente originatasi durante l'eruzione abortita del 1883, è assai frequente la presenza di inclusioni di natura differente, allogene, che devono considerarsi come frammenti di rocce sedimentarie o cristalline strappate e coinglobate dalle lave medesime durante il loro passaggio attraverso i terreni che formano la base del grande vulcano siciliano. Le più frequenti di tali inclusioni sono le quarzose, delle quali per la prima volta si ha notizia nei lavori di Silvestri (²) intorno all'eruzione del

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geografia fisica della Università di Napoli.

(²) O. Silvestri, *Sopra una specie di quarzite semivetrosa a struttura pomiceo-granulare contenuta nell'interno di alcune bombe projettate dall'Etna nell'eruzione del marzo 1883.* Atti dell'Accad. Gioenia, ser. III, vol. XVI, Catania, 1883 e *Sull'esplosione eccentrica dell'Etna avvenuta il 23 marzo 1883.* Catania, 1884.

1883 e in quello di G. Basile [1] sulle tombe dell'Etna; quelle delle lave del 1886 e del 1892 furono anche studiate da L. Dupare e L. Mrazec [3] e sono menzionate nella Memoria del Lacroix [2] sugli inclusi delle rocce vulcaniche. Ma oltre di queste rocce essenzialmente silicee e che possono interpretarsi come brani di arenarie, forse provenienti dai depositi eocenici della base dell'Etna, alterate dall'azione termica delle lave, in quantità molto più scarsa se ne trovano altre che constano di calcare assai alterato e qualcuna ancora di scisti silicei alternanti con straterelli di calcare più o meno marnoso. In questo ultimo genere di inclusi la parte calcareo-marnosa ha subìto una vera cottura, producendo una visibilissima serie di alterazioni nella disposizione degli straterelli degli scisti ed anche numerose fratture.

Nella superficie di contatto fra queste parti calcaree e lo scisto siliceo si osservano delle listerelle e vene minuscole di una sostanza cristallina bruna, che cogli acidi minerali, anche abbastanza diluiti, gelatinizza facilmente. Nella soluzione s'è riscontrata coi soliti metodi la presenza dell'alluminio, del ferro, del calcio e del magnesio. Dove esiste qualche vacuo della roccia le pareti si mostrano tappezzate da numerosi cristallini bruni, poco splendenti, di forma apparentemente esaedrica e strettamente addossati gli uni agli altri. Le misure goniometriche hanno stabilito che le diverse facce formano tra loro angoli praticamente uguali a 90°. I cristallini più grandi, che misurano circa 1 mm. di lato, sono assai poco trasparenti, alcuni anzi quasi opachi; i più piccoli hanno una trasparenza maggiore e possono essere senz'altro studiati al microscopio. L'esame ottico subito dimostra che essi appartengono al sistema tetragonale e che risultano dalla combinazione delle due forme }100{ e }001{. Su (100) si ha estinzione retta e si osservano alcune tracce di sfaldatura secondo la base; in luce convergente i cristalli poggiati sulla base si appalesano otticamente uniassici, negativi, con debole birifrangenza. La densità determinata col metodo della sospensione in alcuni frammentini, la purezza dei quali fu controllata al microscopio, è 2,934; la durezza è 5,5. Per questo complesso di caratteri si tratta, dunque, evidentemente, di *melilite*, minerale finora non riscontrato nella regione etnea. Sarebbe stato mio vivo desiderio di procedere ad un'analisi chimica quantitativa della nuova melilite etnea, tanto più che la costituzione di questo minerale è ora di nuovo incerta, dopo che i recenti studî del prof. Zambonini [4] hanno dimostrato che, almeno per le meliliti naturali, le idee di J. H. L.

[1] G. Basile, *Le bombe vulcaniche dell'Etna*. Atti Accad. Gioenia, ser. III, vol. XX, 1888, pag. 43.

[2] L. Dupare et L. Mrazec, *Sur quelques bombes de l'Etna provenents des éruptions de 1886 et 1892*. Arch. Sc. Phys. et Nat., 1893, vol. XXIX, n. 3.

[3] A. Lacroix, *Les enclaves des roches volcaniques*. Macon, 1893, pag. 40.

[4] F. Zambonini, *Ueber eine krystallisirte Schlacke der Seigerhütte bei Hettstedt,*

Vogt [1], secondo le quali questo minerale dovrebbe considerarsi come una soluzione solida di gehlenite ($\overset{II}{R}_3 \overset{III}{R}_2 Si_2 O_{10}$) e di åkermanite ($\overset{II}{R}_4 Si_3 O_{10}$), sono insostenibili. Ma ho dovuto rinunciare al mio desiderio, perchè la melilite dell'Etna non solo è stata, finora, rinvenuta in quantità assai piccola, ma è per giunta anche parecchio impura. Essa infatti è in buona parte rivestita e compenetrata da sostanza calcarea, che è pressochè impossibile eliminare, perchè gli acidi anche diluiti, che la sciolgono, intaccano pure la melilite, e l'acido clorico, che fu adoperato con successo dal Weinschenk [2] per liberare dalla calcite la sua Fuggerite, non risponde allo scopo, perchè nel nostro caso si ha da fare con un calcare impuro, incompletamente decomposto dal suddetto acido.

Inoltre la nostra melilite contiene anche abbondanti inclusioni, specialmente di vetro bruno, che riesce difficile separare anche ricorrendo ai liquidi pesanti.

Rimandando ad un altro lavoro più esteso la descrizione microscopica degli interclusi nei quali ho osservato la melilite, credo opportuno far sin da ora notare che questo minerale rappresenta evidentemente nel nostro caso un prodotto di contatto, risultante dalle reazioni dei calcari e degli scisti colle lave che li hanno inclusi. Sembra però che l'azione di queste ultime sia stata principalmente termica e solo pochissimo chimica. Molta analogia colla nostra melilite presenta, dal punto di vista della formazione, un prodotto dei forni da cemento Portland di Nienburg a. d. Saale, studiato da G. Bodländer [3] e che è formato, in gran prevalenza, da una melilite, la quale però è otticamente positiva, al contrario di quella etnea, che, come la maggior parte delle meliliti naturali, è negativa. Quanto alla formazione si noti che per la melilite del forno da cemento si trovavano a reagire da un canto il miscuglio di calcare ed argilla, in tali proporzioni da aversi a fine di cottura un prodotto anidro col 60 % di ossidi RO, il 14 % di R_2O_3 ed il 23 % di SiO_2 e dall'altro canto i mattoni delle pareti del forno con una percentuale di SiO_2 superiore in media a 75 % e col 5-30 % di Al_2O_3. Anche in quest'incluso la melilite si è formata al contatto fra la parte calcareo-marnosa e lo scisto siliceo pirossenico, e quindi notevolmente allumoferrifero.

---

nebst Bemerkungen über die chemische Zusammensetzung des Melilith. Zeitschr. für Kryst. XLI B., 3 H.

[1] J. H. L. Vogt, *Beiträge zur Kenntniss der Mineralbildung in Schmelzmassen und in den neovulkanischen Ergussgesteinen.* Archiv for Math og Naturvid. Kristiania, 1890, 30.

[2] E. Weinschenk, *Fuggerit, ein neues Mineral aus dem Fassathal.* Zeitschr. für Kryst. 1897, XXVII, 577.

[3] G. Bodländer, *Entstehung von Melilith beim Brennen von Portland-Cement.* Neues Jahrb. für Min. usw. Jahrg. 1892, I B., 53.

Una formazione analoga si ha in un incluso calcareo in un basalto di Ebsdorfer Grundes presso Marburg (Nassau), descritto da F. A. Hoffmann [1]. In tale incluso (di modestissime dimensioni, non superando i 3 mm. di diametro), in mezzo ad una corona di microliti pirossenici, si trovano immersi in una sostanza grigio-bruna, torbida e vetrosa dei cristalli tetragonali, interpretati da Hoffmann, per essere otticamente uniassici e negativi, con molto debole birifrangenza, come gehlenite. Ma essendo quest'ultimo minerale $Ca_3(AlO)_2 Si_2O_8$ relativamente purissimo ed essendo quindi assai difficile rinvenirlo, specialmente nel caso di una inclusione, ed essendo inoltre assai affine chimicamente alla melilite, la quale presenta altresì quasi i medesimi caratteri ottici, io sono indotto a credere doversi la gehlenite di Hoffmann riferire alla melilite, anche per analogia cogli inclusi etnei, piuttosto abbondanti di questo minerale.

Mineralogia. — *Osservazioni sui minerali delle Cave di pietra ollare al Sasso di Chiesa* (Val Malenco). Nota di L. MAGISTRETTI [2], presentata dal Corrispondente ETTORE ARTINI.

Ideale di ogni alpinista che ami le sue montagne, è di conoscerle e farle conoscere.

Sooio della Stazione Universitaria del C. A. I. che tanta opera di propaganda e di educazione alpinistica svolge nella classe studentesca, mi pare che ad Essa debba naturalmente dedicarsi questo piccolo studio di minerali alpini.

Le ricchezze mineralogiche della Valle Malenco e delle valli tributarie sono ormai in buona parte note; pure ebbi la fortuna, durante la scorsa estate, di imbattermi in un giacimento che per i minerali forniti merita di essere ricordato.

Voglio parlare dei cristalli di Apatite e di Ilmenite rinvenuti in una cava di recente attivata sopra Chiesa.

Nè l'uno, nè l'altro di questi minerali sono nuovi per la Val Malenco. Ma i cristalli di Apatite trovati in altri punti di essa (con Epidoto, Granato ecc.) non possono gareggiare con questi per nitidezza e numero di forme; e l'Ilmenite, se è conosciuta e comune in noduli inclusi qua e là nei talcoscisti e negli scisti cloritici della valle, non forma però altrove, che io sappia, cristalli così distinti e buoni.

(1) F. A. Hoffmann, *Petrographische Untersuchung der Basalte des Ebsdorfer Grundes bei Marburg*. N. Jahrb. für Min. etc., X BB., 1895-1896.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia del Museo Civico di Storia Naturale in Milano.

La cava dove raccolsi questi minerali, è la più alta fra quelle situate sul versante Sud del Sasso di Chiesa e si può raggiungere direttamente salendo per il sentiero che dall' Hôtel guadagna le cave in esercizio. Superatele si raggiunge la cava in un quarto d'ora.

Oppure si può giungervi più comodamente dall'Alpe del Pirlo per le cave di pietra ollare contigue, proseguendo sul sentiero piano che conduce all'Alpe Giumellino (20 minuti circa).

La quota d' imbocco della cava, da confronti fatti colle quote delle cave sottostanti, credo poco diversa da 1700^m.

Del resto la topografia della località risulta chiara dal Foglio 523 *bis* (Chiesa) della Carta dell'Ist. Topografico Federale Svizzero (1897) su levata dell'Ist. Geografico Militare Italiano (1890).

La pietra ollare di questa cava (come osservai su un mucchio di materiale estratto) e di quelle più basse del medesimo gruppo è, per la natura dei minerali interclusi, ben distinta da quella di altre cave.

Infatti alle cave dell'Alpe Pirlo (levante della nostra) nello scisto cloritico sono disseminati abbondantemente cristalli di Pirite, e sono comuni l'Epidoto e la Titanite; il primo forma nitidi cristallini nei litoclasi, la seconda è in grandi individui (talora 2-3 cm.) tabulari giallo grigi interclusi. Nè manca la Magnetite talora in netti ottaedri.

Lo stesso si nota sulla pietra delle cave di Val Giumellino (ponente della nostra).

Nelle cave in questione, invece, non mi fu dato di osservare Pirite, Titanite e Epidoto se non d' importanza affatto secondaria; mentre prevalgono, incluse, la Magnetite e la Ilmenite; Magnetite in grossi noduli; Ilmenite in cristalli distintamente tabulari.

Là dove la roccia si presenta cavernosa o fessurata (cava alta) le pareti delle cavità sono rivestite abbondantemente da aggregati scagliosi o a rosetta di Clorite, fra i quali si annidano nitidi cristalli di Apatite limpida e magnifici cristalli tabulari di Ilmenite.

Con queste talora si presenta in piccoli individui prismatici l'Aragonite, che manca affatto alle cave dell'Alpe Pirlo e dell'Alpe Giumellino.

Nella cava immediatamente sottostante a quella in questione potei raccogliere qualche esemplare con cristalli di Granato e fascetti di cristalli prismatici di Vesuvianite. Esemplari poco appariscenti, specie al paragone degli ottimi esemplari della cava superiore. Li cito per dare un' idea della paragenesi dell'Apatite e della Ilmenite.

Riservandomi di dare presto in altro lavoro lo studio completo dei cristalli di Ilmenite raccolti in questa località, credo utile render note fin d'ora le mie osservazioni sulla Apatite e sui minerali che l'accompagnano.

Essi sono dunque:

Aragonite in XX limpidi racchiusi fra gli aggregati di Clorite. Essi

presentano un abito prismatico e si assottigliano talora verso l'estremità terminata. Altre volte sono piuttosto appiattiti e cuneiformi per grande sviluppo di due faccie di una bipiramide romba acuta non misurabile esattamente.

Granato. (Essonite) in XX trasparenti da giallo miele a color topazio carico. L'abito è rombododecaedrico. Notai faccette di icositetraedro.

Associata ad esso si trova, nella cava sottostante la studiata, *Vesuvianite* in fascetti di XX prismatici striati. Colore giallo bruniccio. Su alcuni frammenti del minerale notai: Birifrazione piuttosto debole; Estinzione parallela all'allungamento; Carattere ottico negativo. Su alcune sezioncine parallele alla base si osserva una figura di interferenza uniassica alquanto deformata.

La *Clorite*, che è in queste geodi il minerale più abbondante, si presenta in pile di lamelle curve o raggiate a ventaglio. Il contorno è spesso distintamente esagono. Le lamelle di sfaldatura basale presentano la nota struttura ottica a settori birifrangenti di diversa orientazione. La birifrazione è in generale abbastanza viva.

La bisettrice acuta (negativa) nella maggior parte delle lamine esce sensibilmente obliqua alla base. L'angolo degli assi ottici, pur variando da lamina a lamina, è abbastanza grande. In essenza di Cannella si constata che γ è sensibilmente maggiore di 1,586.

Questi caratteri coinciderebbero dunque abbastanza bene con quelli del Clinocloro.

È poi frequente il caso che l'angolo degli assi ottici diminuisca dalla periferia verso il centro della lamina, fino ad essere questa in questo punto quasi perfettamente uniassica.

Apatite. I cristalli di Apatite di questa località (di cui raccolsi e osservai un forte numero) sono per la maggior parte incolori e limpidi, raramente rivestiti da un leggero velo limonitico.

Essi non presentano grande varietà di aspetto, nè per diversità di forme semplici, nè per il diverso sviluppo di queste. L'abito è costantemente prismatico tozzo.

Mi pare che un carattere speciale di questa nostra Apatite sia la costante presenza di bipiramidi ottuse di III ordine ($\{21\bar{3}2\}$, talora $\{31\bar{4}2\}$).

La fig. 1, colla quale mi sono sforzato di rendere il vero aspetto dei cristalli, ne rappresenta l'abito più comune.

Meno frequente è l'abito presentato nella fig. 2; abito che osservai solo su tre dei cristalli raccolti.

Finalmente la fig. 3 rappresenta fedelmente un frammento di cristallo che pure osservai.

Le imagini fornite dalle faccie di questa Apatite sono buone e nette, così che mi parve opportuno misurarne un certo numero di spigoli nella attesa che una determinazione quantitativa di alogeni confermi le deduzioni che il valore della costante cristallografica mi permise di fare.

Il valore di questa (ricavato dall'angolo $(10\bar{1}1):(0001)$ misurato 28 volte e con buoni risultati è):

$$\frac{c}{a} = 0{,}728673 \, .$$

Tale valore farebbe ritenere, secondo la teoria di Pusyrewsky ([1]) confermata dal Baumhauer ([2]) che lega la costante cristallografica dell'Apatite

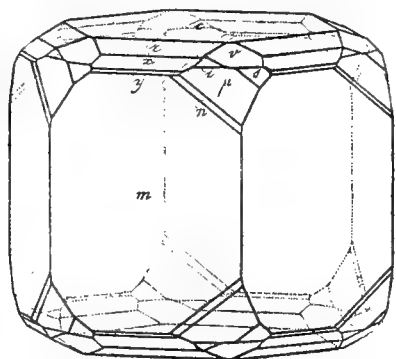



FIG. 1.

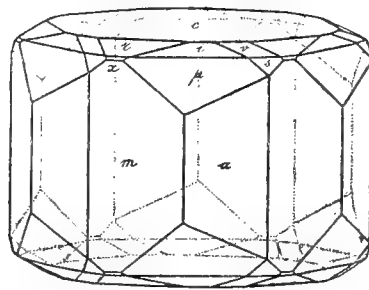



FIG. 2.

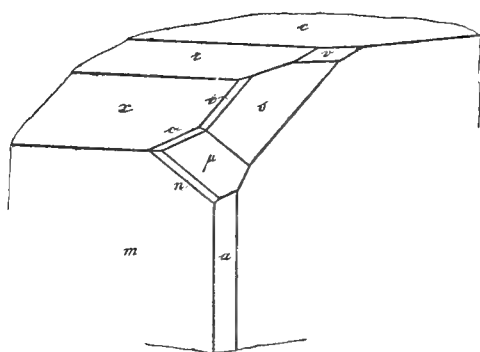



FIG. 3.

al suo contenuto in cloro; che la studiata sia una caratteristica clorapatite, appunto perchè il valore di

$$(10\bar{1}1):(0001) = 40°4'\,{}^{4}/_{6}$$

è fra i minori osservati.

Tale Apatite si accosterebbe dunque a quelle di Achmatowsk, Rothenkopf, di Val di Ala e sopratutto a quella della C. Robert presso Avigliana studiata dal Boeris ([3]) alla quale l'Apatite di Chiesa si avvicina anche per la caratteristica analogia di giacimento con Granato, Vesuvianite, Ilmenite in roccia cloritica.

A conferma di tale ipotesi milita pure il peso specifico di

3,151

([1]) Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands*, V, 86.

([2]) *Ueber die Winkelverhältnisse des Apatit von verschiedenen Fundorten.* Zeitschrift für Kryst. und Min., XVIII, 31.

([3]) G. Boeris, *Nuove osservazioni sopra i minerali della Comba di Compare Robert.* Accad. Sc. Torino, 1898-99.

ottenuto da varî frammenti purissimi con soluzione Klein. Questo valore si accorda bene con quelli

3,153 3,149

delle Apatiti di Sulzbach e di Rothenkopf.

Le forme osservate sui cristalli di questa Apatite sono:

$c = \{0001\}$	$r = \{10\bar{1}2\}$	$\nu = \{11\bar{2}2\}$	$\mu = \{21\bar{3}1\}$
$m = \{10\bar{1}0\}$	$x = \{10\bar{1}1\}$	$s = \{11\bar{2}1\}$	$i = \{21\bar{3}2\}$
$a = \{11\bar{2}0\}$	$y = \{20\bar{2}1\}$	$n = \{31\bar{4}1\}$	$o = \{31\bar{4}2\}$

Faccio seguire una tabella di valori angolari osservati, messi a confronto coi calcolati partendo dalla costante da me determinata:

	Spigoli misurati		Limiti di osservazione	Valori osservati (medie)	Valori calcolati	N.
m m'	$10\bar{1}0$	$01\bar{1}0$	59°.57′-60°.23′	60°. 4′	60°.00′	12
m a	$10\bar{1}0$	$11\bar{2}0$	29.58-30.29	30. 5	30.00	6
c x	0001	$10\bar{1}1$	39.46-40.28	40°.4′.38″	*	28
r c	$10\bar{1}2$	0001	22.10-23.15	22.49	22.49	32
r x	$10\bar{1}2$	$10\bar{1}1$	17.00-17.33	17.13	17.15	18
c s	0001	$11\bar{2}1$	55. 3-55.48	55.30	55.31	16
c v	0001	$11\bar{2}2$	35.50-36.49	36. 2	36. 4	11
x s	$10\bar{1}1$	$11\bar{2}1$	26.46-26.53	26.49	26.47	10
s α	$11\bar{2}1$	$11\bar{2}0$	34.11-34.25	34.20	34.27	7
s μ	$11\bar{2}1$	$21\bar{3}1$	13.56-14.26	14. 1	13.58	9
μ m	$21\bar{3}1$	$10\bar{1}0$	30.14-30.33	30.21	30.27	14
n m	$31\bar{4}1$	$10\bar{1}0$	22.24-23.21	22.54	22.47	11
n μ	$31\bar{4}1$	$21\bar{3}1$	7.35- 7.39	7.37	7.40	7
y c	$20\bar{2}1$	0001	58.40-59.51	59.20	59.17	18
ν' m	$1\bar{2}12$	$10\bar{1}0$	89.57-90.11	90. 1	90.00	5
y s	$20\bar{2}1$	$11\bar{2}1$	25.26-25.29	25.27	25.27	3
μ c	$21\bar{3}1$	0001	65.27-65.56	65.47	65.49	16
s m	$11\bar{2}1$	$10\bar{1}0$	44.19-44.28	44.23	44.26	19
i s	$21\bar{3}2$	$11\bar{2}1$	11.11-11.37	11.22	11.21	9
i c	$21\bar{3}2$	0001	47.43-48.41	48. 8	48. 4	12
i m	$21\bar{3}2$	$10\bar{1}0$	45.18-45.43	45.24	45.20	5
i μ	$21\bar{3}2$	$21\bar{3}1$	17.31-17.53	17.44	17.45	8
i x	$21\bar{3}2$	$10\bar{1}1$	15.16-15.33	15.24	15.26	4
n c	$31\bar{4}1$	0001	71.20-71.44	71.35	71.46	5
n s	$31\bar{4}1$	$11\bar{2}1$	21.29-21.37	21.34	21 38	6
m ν	$10\bar{1}0$	$11\bar{2}2$	59. 9-59.35	59.22	59.20	2
ν' x	$2\bar{1}\bar{1}2$	$10\bar{1}1$	18.36-18.51	18.43	18.47	6
r r'	$10\bar{1}2$	$01\bar{1}2$	22. 9-22.28	22.19	22.21	4
μ μ'	$21\bar{3}1$	$21\bar{3}\bar{1}$	47.38-48.51	48.14	48.22	2

Fisiologia — *Modificazioni del ricambio respiratorio in dipendenza della temperatura* [1]. Nota di G. Cristina, presentata dal Corrispondente F. Bottazzi.

Tra i due principali prodotti delle combustioni organiche, i quali fanno parte del ricambio respiratorio, e cioè l'anidride carbonica e l'acqua, solo la prima è stata in modo esauriente studiata. Le determinazioni dell'acqua, che evapora dalla superficie polmonare, sono state invece assai scarse, principalmente per le difficoltà che in pratica presentano tali esperimenti, i quali a prima vista sembrerebbero così facili.

Per riguardo alla eliminazione dell'anidride carbonica a differenti temperature, citerò solo le ricerche più recenti di Abegg [2], che furono eseguite sulle rane, sui conigli e sui cani. Da esse risultò che i processi ossidativi che conducono alla formazione di CO^2, si intensificano con l'aumento della temperatura, in modo che il coefficiente di temperatura per l'eliminazione di questo prodotto di combustione resta nei limiti stabiliti dalla regola di Van't Hoff. Abegg trovò che questo coefficiente è

per le rane 2,0
per i conigli 1,9

Io ho voluto ripetere consimili esperimenti, unendo alle determinazioni dell'anidride carbonica espirata, determinazioni dell'acqua, che pure si trova nell'aria espirata.

A tal fine ho scelto un animale, in cui l'evaporazione cutanea è assai piccola, che raramente evacua feci ed orina, e che può restare per molte ore perfettamente immobile. Tali requisiti, come si può facilmente comprendere, erano indispensabili per l'esattezza degli esperimenti che mi ero proposto di fare, e tali appunto li ho trovati nello *Zamenis viridiflavus*.

Metodo di ricerca.

L'animale, prima rinchiuso in un sacchetto di garza, era collocato sotto una piccola campana chiusa a tenuta d'aria, a mezzo di mastice di lacca, e questa campana veniva immersa in un bagno, che si portava alla temperatura voluta.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della R. Università di Napoli, diretto dal prof. Gino Galeotti.

[2] Zeitschr. f. Elektrochemie, vol. XI, pag. 823 (1905).

L'aria destinata all'animale veniva insufflata nella campana mediante un apparecchio a caduta d'acqua, dopo che era passata attraverso una serie di boccie di lavaggio con soluzione di potassa e con H^2SO^4 concentrato e poi attraverso un lungo serpentino immerso nel bagno, ove l'aria si metteva in equilibrio di temperatura. La campana, contenente l'animale, portava nella parte superiore un tappo di gomma con tre fori, dei quali uno serviva per il termometro e gli altri due davano passaggio a due tubetti di vetro in accordo uno col sistema che forniva l'aria pura, l'altro col sistema destinato a raccogliere l'aria e l'acqua espirate dall'animale. L'acqua di espirazione era raccolta su cloruro di calcio, e l'anidride carbonica veniva fissata con soluzione di KOH, contenuta in una serie di palline di Mohr. Le determinazioni si facevano per pesata. Dopo che l'animale era stato introdotto entro la campana, si aspettava almeno 6 ore, sino a che la temperatura si fosse messa in equilibrio. I singoli esperimenti duravano 1-3 giorni. La temperatura al di sopra di 15° si otteneva, riscaldando il grande bagno-maria entro cui stava immersa la campana con l'animale. Gli esperimenti a 15° furono eseguiti, tenendo la campana immersa in una vasca ove affluiva una certa quantità di acqua fredda. Con questo semplice metodo si potè ottenere una temperatura di 15° con oscillazioni di mezzo grado. La pesata dei tubi a cloruro di calcio e delle bolle di Mohr furono fatte ogni 12 o 24 ore.

Gli animali restavano in completo digiuno.

Negli esperimenti a 30° si ebbero lievi perdite di H^2O, che si condensava nell'interno del tubicino di deflusso.

Descrizione degli esperimenti.

Esperimento I. — *Zamenis* del peso di 139 gr. Si tiene in esperimento per circa 15 giorni, durante i quali si fanno 4 determinazioni alla temperatura di 15°, 20°, 25°, 30°. Alla fine dell'esperimento l'animale pesa 120 gr.

Riporto nella seguente tabella i risultati ottenuti:

Temperatura	Durata dell'esperimento	CO^2 eliminato durante l'esperimento in gr.	H^2O eliminata in gr.	CO^2 eliminato per ora in gr.	H^2O eliminata per ora in gr.	CO^2 eliminato per ora e per chilo di animale	H^2O eliminata per ora e per chilo di animale
14°,5 a 15°	79 ore	0,2860	0,6122	0,0036	0,0077	0,0259	0,0554
20° a 21°	35 ore	0,3158	0.5338	0,0090	0,0152	0,0649	0,1093
26°	59 ore	0,6269	0,3470	0,0125	0,0069	0,0870	0,0498
30°	72 ore	2,0839	1,1808	0,0289	0,0164	0,2072	0,1179

Esperimento II. — Animale del peso di gr. 255. È tenuto in prigionia da circa 45 giorni e non ha preso cibo da questo tempo. Si tiene in esperimento per 15 giorni. Alla fine dell'esperimento pesa 220 gr. I resultati delle varie determinazioni sono riassunti nella seguente tabella:

Temperatura	Durata dell'esperimento	CO^2 eliminato durante l'esperimento	H^2O eliminata durante l'esperimento	CO^2 eliminato per ora e in grammi	H^2O eliminata per ora e in grammi	CO^2 eliminato per ora e per chilo di animale	H^2O eliminata per ora e per chilo di animale
15°	49 ore	0,2976	0,2444	0,0060	0,0049	0,0235	0,0196
20°	29 ore	0,6064	1,2008	0,0209	0,0414	0,0819	0,1629
25°	50 ore	0,9226	1,2292	0,0184	0,0245	0,0836	0,1113
30°	57 ore	2,7624	2,2926	0,0484	0,0402	0,1898	0,1604

I resultati di questi esperimenti si possono così riassumere:

1) Per l'anidride carbonica i risultati delle determinazioni sono stati concordanti nei due esperimenti. La quantità di CO^2 eliminata per ora e kgr. di peso del corpo è stata in media:

a 15° 0,024
a 20° 0,073
a 25° 0,085
a 30° 0,198

Da queste cifre si vede anche, che la quantità di anidride carbonica eliminata aumenta uniformemente con il crescere della temperatura.

2) Il coefficiente della eliminazione dell'anidride carbonica in dipendenza della temperatura sta nei limiti della regola di Van't Hoff. Q_{10} infatti assume i valori segnati nella seguente tabella:

	Intervallo della temperatura	Quantità di CO^2 eliminata per ora alle due temperature precedenti	Q_{10}
Esp. I . . .	15° - 25°	0,0036 - 0,0119 (1)	3,3
	20° - 30°	0,0090 - 0,0289	3,2
Esp. II . . .	15° - 25°	0,0060 - 0,0184	3,4
	20° - 30°	0,0209 - 0,0484	2,3

(1) Valore ottenuto per interpolazione.

3) Per l'eliminazione dell'acqua non ho trovato nè concordanza tra i due esperimenti (nelle cifre riportate all'unità di peso degli animali), nè comportamento uniforme con le variazioni di temperatura; per quanto, anche in questo caso, si noti un certo aumento della eliminazione per ora, con il salire della temperatura; e questo fatto sta probabilmente in rapporto con l'affrettarsi degli atti respiratorî negli animali riscaldati.

4) Mentre adunque l'eliminazione di uno dei prodotti delle combustioni organiche, cioè della anidride carbonica, obbedisce alla regola di Van't Hoff, l'eliminazione dell'altro prodotto che è l'acqua, è da questa regola indipendente. E si comprende che così debba essere, poichè l'eliminazione dell'anidride carbonica è la semplice espressione del fenomeno chimico delle combustioni organiche, mentre l'acqua, che dalle stesse combustioni si produce, si unisce all'altra acqua dell'organismo, nè per questo provoca una maggiore eliminazione dell'acqua stessa, di cui l'uscita è regolata da tanti altri più complessi meccanismi, indipendenti dalla respirazione. In altre parole, la quantità dell'acqua che si trova nell'aria espirata non ci può dare la misura dell'acqua, che si produce per le reazioni chimiche dell'organismo.

Viticoltura. — *La vegetazione invernale delle viti a Catania.* Nota di F. Sannino, presentata dal Socio G. Cuboni.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Istologia. — *Studio istologico del bottone d'Oriente e dell'adenite sintomatica.* Nota del prof. U. Gabbi e del dott. F. Lacava, presentata dal Socio B. Grassi.

1. *Esame del bottone.* — Nella clinica chirurgica di Roma venne estirpato il bottone d'Oriente al malato, del quale venne dato all'Accademia dei Lincei una comunicazione preliminare la prima domenica dello scorso aprile.

Il bottone estirpato in toto venne passato in sublimato alcoolico Schaudinn, poi nella serie degli alcool e quindi incluso in paraffina.

Le sezioni vennero colorate:

a) con i metodi comuni: emallume eosina, ecc.;

b) con i metodi di van Gieson e di Traina per il connettivo;

c) col metodo di Weigert per la fibrina ed il tessuto elastico;

d) col metodo di Giemsa — ultima modificazione — per i parassiti di Wright.

Ecco i risultati ottenuti:

All'esame delle sezioni si nota che lo strato superficiale è scomparso. Lo strato corneo appare in qualche punto rilevato con quà e là degli elementi cellulari e lievi grumi di fibrina.

Lo strato delle cellule reticolate appare in alcuni punti assottigliato, in altri inspessito ed è qui che si trova una infiltrazione di elementi cellulari rotondi.

Lo strato papillare appare rigonfio e così l'interpapillare. Nel reticolo Malpighiano appaiono i segni dell'infiltrazione edematosa; le cellule sembrano tumefatte e con contorni poco netti; il pigmento nelle cellule profonde non si osserva quasi affatto. Tanto i vasi che gli spazi linfatici appaiono dilatati e riempiti di numerosi elementi cellulari (linfociti) specie attorno ai follicoli dei peli. Le cellule dei follicoli sembrano presentare segni di riproduzione.

Nel connettivo sottocutaneo si osservano zone necrotiche ed in vicinanza di esse, meno raramente nel centro delle vere cellule giganti, le une con nucleo in geminazione, le altre con nuclei e frammenti di nuclei. Parassiti si osservano fra gli elementi cellulari e ad un attento esame qualcuno ne appare ripieno. Col metodo di Weigert lo stato elastico appare in qualche punto alterato.

Quanto ai vasi sanguigni si osserva in qualche tratto un restringimento in qualche altro una vera e propria obliterazione la quale deve, come la flogosi, determinare necrosi delle corrispondenti zone di tessuto (capillarite obliterante).

Le mentovate alterazioni istologiche sono identiche a quelle che furono già segnalate da Riehl prima di tutti, e poi da Unna, Leloir, Kuhn, Ullmann, Plehn e Jeanselme.

2. *Adenite sintomatica* (g. epitrocleare). — L'esistenza di una linfangioite e di una adenite più o meno cospicua nel bottone d'Oriente furono segnalate da tempo, ma solo Jeanselme ne ha fatto uno studio accurato. Per uno studio nosografico completo di questo, come di altri casi che trovammo in Calabria e Sicilia, estirpammo il ganglio epitrocleare (dott. Lacava) e ne esaminammo il succo e la lesione istologica.

Il ganglio un po' duro, lasciò gemere, spremuto, scarso succo col quale preparammo varî strisci che colorammo col Giemsa.

All'esame trovammo:

a) presenza di numerosi parassiti di Wrigt in accumuli od isolati;

b) cellule linfatiche a piccolo nucleo, poche a grosso nucleo e quasi nessuno conservante il protoplasma;

c) qualche raro globulo rosso.

Non abbiamo trovato grandi cellule ripiene di Leishmanie che in numero assai lieve, ma pensiamo che esse dovettero essere presenti però di-

strutte dall'azione meccanica dello striscio. In un polinucleato trovammo pure presente la Leishmania Wright. Non fu dato di rinvenire negli strisci alcuna formazione a rosetta. Il parassita ha presentato le note caratteristiche, ma abbiamo notato che il blefaroblasto in qualche caso non presentava contorni netti.

Il *ganglio* venne fissato e colorato cogli stessi metodi usati per il bottone. All'esame delle sottili sezioni trovammo:

1) Aumento degli elementi cellulari della sostanza follicolare.

2) Tumefazione delle cellule endoteliali dei seni tra loro addossate, di rado disgiunte (*catarro dei seni*).

3) Grande ricchezza dei linfociti in arrivo.

4) Aumento lieve del connettivo delle maglie.

Nelle sezioni colorate col Giemsa non si osservarono che scarse Leishmanie. Non osservammo nè focolai emorragici, nè zone necrotiche.

Le nostre indagini istologiche confermano quelle del Jeanselme, l'unico che se ne sia occupato prima di noi. L'adenite e quindi la linfangioite non sono rare come pensa Plehn. Noi le abbiamo trovate presenti in tre su quattro dei casi osservati.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

M. Traube Mengarini. *Azione dell'acqua distillata, sola e contenente elettroliti, sul piombo metallico*. Pres. dal Socio P. Blaserna.

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1° Sem. Fasc. 11°.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1910). Fasc. 1°-2°.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. Fasc. 3°.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta l'Italia di L. **10**; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti editori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.° — ***Roma, Torino*** e ***Firenze.***

ULRICO HOEPLI. — ***Milano, Pisa*** e ***Napoli.***

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 giugno 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.

Pubblicazione bimensile. *Roma 16 giugno 1910.* N. 12.

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII

1910

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1910.

Volume XIX.° — Fascicolo 12°
e Indice del volume.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

ESTRATTO DAL REGOLAMENTO INTERNO

PER LE PUBBLICAZIONI ACCADEMICHE

I.

Col 1892 si è iniziata la *Serie quinta* delle pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei. Inoltre i *Rendiconti* della nuova serie formano una pubblicazione distinta per ciascuna delle due Classi. Per i *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali valgono le norme seguenti:

1. I *Rendiconti* della Classe di scienze fisiche matematiche e naturali si pubblicano regolarmente due volte al mese; essi contengono le Note ed i titoli delle Memorie presentate da Soci e estranei, nelle due sedute mensili dell'Accademia, nonchè il bollettino bibliografico.

Dodici fascicoli compongono un volume, due volumi formano un'annata.

2. Le Note presentate da Soci o Corrispondenti non possono oltrepassare le 12 pagine di stampa. Le Note di estranei presentate da Soci, che ne assumono la responsabilità, sono portate a 6 pagine.

3. L'Accademia dà per queste comunicazioni 75 estratti gratis ai Soci e Corrispondenti, e 50 agli estranei: qualora l'autore ne desideri un numero maggiore, il sovrappiù della spesa è posta a suo carico.

4. I *Rendiconti* non riproducono le discussioni verbali che si fanno nel seno dell'Accademia; tuttavia se i Soci, che vi hanno preso parte, desiderano ne sia fatta menzione, essi sono tenuti a consegnare al Segretario, seduta stante, una Nota per iscritto.

II.

1. Le Note che oltrepassino i limiti indicati al paragrafo precedente, e le Memorie propriamente dette, sono senz'altro inserite nei Volumi accademici se provengono da Soci o da Corrispondenti. Per le Memorie presentate da estranei, la Presidenza nomina una Commissione la quale esamina il lavoro e ne riferisce in una prossima tornata della Classe.

2. La relazione conclude con una delle seguenti risoluzioni. - *a*) Con una proposta di stampa della Memoria negli Atti dell'Accademia o in sunto o in esteso, senza pregiudizio dell' art. 26 dello Statuto. - *b*) Col desiderio di far conoscere taluni fatti o ragionamenti contenuti nella Memoria. - *c*) Con un ringraziamento all' autore. - *d*) Colla semplice proposta dell' invio della Memoria agli Archivi dell' Accademia.

3. Nei primi tre casi, previsti dall' art. precedente, la relazione è letta in seduta pubblica, nell' ultimo in seduta segreta.

4. A chi presenti una Memoria per esame è data ricevuta con lettera, nella quale si avverte che i manoscritti non vengono restituiti agli autori, fuorchè nel caso contemplato dall'art. 26 dello Statuto.

5. L'Accademia dà gratis 75 estratti agli autori di Memorie, se Soci o Corrispondenti, 50 se estranei. La spesa di un numero di copie in più che fosse richiesto è messa a carico degli autori.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1910.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle superficie rigate applicabili sul catenoide.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. La classe completa delle superficie rigate applicabili sul catenoide è formata, come ben si sa, dalle superficie luogo delle binormali delle curve a torsione costante.

Una semplice proprietà geometrica che caratterizza queste rigate è data, come mi propongo qui di dimostrare, dal seguente teorema:

Sopra due qualunque asintotiche curvilinee di queste rigate è costante l'angolo che formano le coppie di piani osculatori alle due asintotiche in punti situati sopra una medesima generatrice; e viceversa se una rigata gode di tale proprietà, per tutte le coppie di asintotiche curvilinee, essa è applicabile sul catenoide.

Sia R una qualunque rigata, γ la sua linea di stringimento; indichiamo con v l'arco di γ contato da un punto fisso, con u la lunghezza di generatrice a partire da γ (dal punto centrale), e sia $\theta = \theta(v)$ l'angolo d'inclinazione della generatrice sopra γ. Per l'elemento lineare di R avremo

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\theta\, du\, dv + (M^2 u^2 + 1)\, dv^2, \tag{1}$$

dove anche M sarà funzione della sola v (cfr. le mie *Lezioni di geometria*

differenziale, t. I, Cap. VIII). La curvatura K della rigata R è data da

$$K = -\frac{M^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^2},$$

onde pei coefficienti D , D′ della seconda forma fondamentale risulta

$$D = 0 \quad , \quad D' = \frac{M \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}} .$$

Per il terzo coefficiente D″ vale poi la formola di Codazzi

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \frac{\partial D'}{\partial v} + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] D',$$

che sostituendo i valori effettivi dei simboli di Christoffel per la (1)

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{M^2 u \cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{M^2 u}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta},$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{MM'u^2 + M^2 u\cos\theta + \theta' \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta},$$

diventa

$$\frac{\partial D''}{\partial u} = \frac{M^2 u}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta} D'' + $$
$$+ \frac{M^2(M\cos\theta \,.\, \theta' - M'\operatorname{sen}\theta)(u^2 - \operatorname{sen}^2\theta) - 2M^3 u \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

dove gli accenti indicano derivazioni rapporto a v.

Integrando l'equazione superiore, lineare in D″, si trova subito

$$(2) \quad D'' = \sqrt{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\left\{\Phi(v) + \frac{(M'\operatorname{sen}\theta - M\cos\theta \,.\, \theta')u + M\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\right\},$$

dove $\Phi(v)$ è una funzione arbitraria di v, che fissa la forma della rigata R di elemento lineare (1) che si considera. Con questo valore (2) di D″ l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee di R

$$2D'du + D''dv = 0$$

si scrive

$$(3) \quad 2M\operatorname{sen}\theta\frac{du}{dv} + \Phi(v)(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta) +$$
$$+ (M'\operatorname{sen}\theta - M\cos\theta \,.\, \theta')\, u + M\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 .$$

Per la nostra ricerca, in luogo della funzione incognita u di v, conviene introdurre l'angolo Ω che il piano tangente, in un punto qualunque

(u, v) della rigata, forma col piano tangente nel punto centrale $(0, v)$, ciò che si fa colla formola di Chasles

$$\operatorname{tang} \Omega = \frac{\mathrm{M} u}{\operatorname{sen} \theta} .$$

Di qui si ha

$$u = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\mathrm{M}} \operatorname{tang} \Omega$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{\mathrm{M} \cos \theta . \theta' - \mathrm{M}' \operatorname{sen} \theta}{\mathrm{M}^2} \operatorname{tang} \Omega + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\mathrm{M}} \frac{1}{\cos^2 \Omega} \frac{d\Omega}{dv} ,$$

e sostituendo nella (3) e moltiplicando per $\cos^2 \Omega$, si ha l'equazione differenziale delle asintotiche curvilinee sotto la forma cercata:

$$(4) \qquad 2 \operatorname{sen}^2 \theta \frac{d\Omega}{dv} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\mathrm{M}} (\mathrm{M} \cos \theta . \theta' - \mathrm{M}' \operatorname{sen} \theta) \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega + \\ + \Phi(v) \operatorname{sen}^2 \theta + \mathrm{M} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos^2 \Omega = 0 .$$

Ora, affinchè la rigata R goda della proprietà enunciata nel teorema, occorre e basta che, detta Ω_1 una soluzione particolare della (4), la soluzione generale sia

$$\Omega = \Omega_1 + \mathrm{cost} ,$$

per la qual cosa i coefficienti della equazione differenziale (4) non dovranno contenere Ω. Le condizioni necessarie e sufficienti si traducono dunque nelle due relazioni

$$\mathrm{M} \cos \theta . \theta' - \mathrm{M}' \operatorname{sen} \theta = 0 \quad , \quad \mathrm{M} \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 ,$$

e queste, escludendo il caso delle sviluppabili, danno

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \mathrm{M} = \mathrm{cost} ,$$

valori che caratterizzano appunto le superficie delle binormali delle curve a torsione costante $\frac{1}{\mathrm{M}}$.

Il teorema è così dimostrato.

2. Alla proprietà riconosciuta caratteristica per le deformate rigate del catenoide si può dare una nuova forma, ricorrendo alla teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie.

Per questo considererò qui una classe di deformazioni infinitesime delle superficie rigate in generale, a cui già ho accennato a pag. 53 del vol. II delle *Lezioni*, e ricercherò la più generale deformazione infinitesima di una rigata R nella quale gli spostamenti dei singoli punti avvengono normalmente alle generatrici.

Riferiamo la rigata R alle sue generatrici (v) ed alle trajettorie ortogonali (u), e sia

$$ds^2 = du^2 + \{(u-\alpha)^2 + \beta^2\}\, dv^2 \tag{5}$$

il quadrato dell'elemento lineare di R, dove α, β sono funzioni della sola v. Pei coefficienti D, D', D'', posto

$$G = (u-\alpha)^2 + \beta^2,$$

abbiamo

$$D = 0 \quad , \quad D' = \frac{\beta}{\sqrt{G}}, \tag{6}$$

mentre la seconda equazione di Codazzi dà

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G}}\right) = \frac{\partial}{dv}\left(\frac{\beta}{G}\right). \tag{7}$$

In ogni punto della rigata introduciamo il triedro trirettangolo formato dalla direzione (X_1, Y_1, Z_1) della generatrice, da quella (X_2, Y_2, Z_2) della tangente alla linea (u) e dalla normale (X_3, Y_3, Z_3) alla superficie; sussistono allora le formole (cfr. *Lezioni*, vol. II, pag. 90)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X_1 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{G}\, X_2, \tag{α}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = 0 \ , \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{\beta}{G} X_3 \ , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = -\frac{\beta}{G} X_2, \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{u-\alpha}{\sqrt{G}} X_2 + \frac{\beta}{\sqrt{G}} X_3 \ , \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{u-\alpha}{\sqrt{G}} X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}} X_3, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\frac{\beta}{\sqrt{G}} X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}} X_2, \text{ ecc.} \end{aligned}\right. \tag{β}$$

Ora, si consideri in ogni punto (u, v) di R una direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ normale alla generatrice ed inclinata dell'angolo $\sigma = \sigma(u, v)$ sulla superficie, sicchè avremo

$$\overline{X} = \cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3, \tag{8}$$

e derivando rapporto ad u, v coll'osservare le (β)

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{X}}{\partial u} = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\beta}{G}\right)(-\operatorname{sen}\sigma\, X_2 + \cos\sigma\, X_3) \\ &\frac{\partial \overline{X}}{\partial u} = -\left(\cos\sigma\,\frac{u-\alpha}{\sqrt{G}} + \operatorname{sen}\sigma\,\frac{\beta}{\sqrt{G}}\right) X_1 + \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D''}{\sqrt{G}}\right)(-\operatorname{sen}\sigma\, X_2 + \cos\sigma\, X_3). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Cerchiamo ora come dobbiamo prendere la funzione incognita $\sigma(u, v)$, affinchè esista una deformazione infinitesima di R nella quale gli spostamenti dei singoli punti (u, v) avvengano nella direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$. Le componenti dello spostamento saranno

$$\overline{x} = \varrho \overline{X} \ , \ \overline{y} = \varrho \overline{Y} \ , \ \overline{z} = \varrho \overline{Z} \ ,$$

ove ϱ è l'ampiezza. Scrivendo le tre condizioni caratteristiche per le deformazioni infinitesime (*Lezioni*, vol. II, pag. 4)

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} = 0 \ , \ \Sigma \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} = 0 \ , \ \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\right) = 0 \ ,$$

coll'osservare le (α) e le (9), si vede che la prima di esse è un'identità e le altre due dànno

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log(\varrho \cos\sigma)}{\partial u} = 2\dfrac{\beta}{G}\operatorname{tang}\sigma + \dfrac{u-\alpha}{G} \ , \\[2ex] \dfrac{\partial \log(\varrho \cos\sigma)}{\partial v} = \dfrac{D''}{\sqrt{G}}\operatorname{tang}\sigma \ . \end{cases}$$

Basta dunque che σ soddisfi alla condizione d'integrabilità per le (10), che servendosi della equazione (7) di Codazzi diventa

$$(11) \quad \frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{2\beta}{G}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right) + \cos^2\sigma\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{G}\right) .$$

Ad ogni soluzione σ di questa equazione del 1° ordine corrisponde dunque una deformazione infinitesima della rigata R della specie voluta. La soluzione σ risulta determinata se si fissa (ad arbitrio) il valore di σ lungo una generatrice; abbiamo dunque il risultato:

Qualunque rigata R *ammette deformazioni infinitesime nelle quali i punti si spostano normalmente alle generatrici, e lungo una generatrice si possono assegnare ad arbitrio le direzioni degli spostamenti normali alla generatrice.*

È da osservarsi che in queste deformazioni infinitesime delle rigate le generatrici non restano rettilinee.

3. Possiamo trasformare il risultato ora ottenuto in un altro che corrisponde al teorema generale secondo cui le deformazioni infinitesime si collegano alle congruenze W (*Lezioni*, vol. II, pag. 52).

Ad ogni punto $P \equiv (u, v)$ della rigata si faccia corrispondere quel punto $P_1 \equiv (u_1, v)$, situato sulla medesima generatrice (v), nel quale la normale $(X_3^{(1)}, Y_3^{(1)}, Z_3^{(1)})$ ha la direzione $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ dello spostamento in P e dimostriamo il seguente teorema:

Quando il punto P *descrive un'asintotica curvilinea, il punto corrispondente* P_1 *descrive un'altra asintotica.*

Troviamo in primo luogo le formole effettive di corrispondenza osservando che pei valori $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_3^{(1)}$ di X_1, X_2, X_3 nel punto P_1 si ha

$$(12)\qquad \begin{cases} X_1^{(1)} = X_1(u_1, v) = X_1 \\ X_2^{(1)} = X_2(u_1, v) = \operatorname{sen}\sigma\, X_2 - \cos\sigma\, X_3 \\ X_3^{(1)} = X_3(u_1, v) = \cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3 . \end{cases}$$

Per la formola (β) è

$$\frac{\partial X_1^{(1)}}{\partial v} = \frac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} X_2^{(1)} + \frac{\beta}{\sqrt{G_1}} X_3^{(1)} \quad (G_1 = (u_1 - \alpha)^2 + \beta^2)$$

e quindi

$$\frac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} (\operatorname{sen}\sigma\, X_2 - \cos\sigma\, X_3) + \frac{\beta}{\sqrt{G_1}} (\cos\sigma\, X_2 + \operatorname{sen}\sigma\, X_3) =$$
$$= \frac{u - \alpha}{\sqrt{G}} X_2 + \frac{\beta}{\sqrt{G}} X_3 ,$$

onde segue

$$\begin{cases} \dfrac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} \operatorname{sen}\sigma + \dfrac{\beta\cos\sigma}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{u - \alpha}{\sqrt{G}} \\ -\dfrac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} \cos\sigma + \dfrac{\beta\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{\beta}{\sqrt{G}} . \end{cases}$$

Risolvendo queste ultime, abbiamo le formole di corrispondenza cercate

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{(u - \alpha)\operatorname{sen}\sigma - \beta\cos\sigma}{\sqrt{G}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{G_1}} = \dfrac{(u - \alpha)\cos\sigma + \beta\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}} , \end{cases}$$

ovvero anche

$$(13^*)\qquad \frac{u_1 - \alpha}{\sqrt{G_1}} = \frac{\dfrac{u - \sigma}{\beta}\operatorname{tg}\sigma - 1}{\dfrac{u - \alpha}{\beta} + \operatorname{tg}\sigma} .$$

Indichiamo ora Ω, Ω_1 gli angoli d'inclinazione dei piani tangenti in P, P_1 sul piano centrale, onde per la formola di Chasles

$$\operatorname{tang}\Omega = \frac{u - \alpha}{\beta} \quad , \quad \operatorname{tg}\Omega_1 = \frac{u_1 - \alpha}{\beta} ,$$

e la (13*) equivale perciò alla seguente

$$(14)\qquad \Omega_1 \equiv \frac{\pi}{2} + \Omega + \sigma .$$

Differenziando la (12_3) ed osservando le (β), viene

$$dX_3^{(1)} = -\frac{\beta}{G_1} X_2^{(1)} du_1 - \left(\frac{\beta}{\sqrt{G_1}} X_1^{(1)} + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} X_2^{(1)}\right) dv ,$$

dove D_1'' indica il valore di D'' in P_1. Se si applicano le medesime formole (β) al secondo membro della (13_3) e si paragona col risultato precedente, si ottiene l'identità

$$(15)\qquad \frac{\beta}{G_1} du_1 + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} dv = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\beta}{G}\right) du + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial v} + \frac{D''}{\sqrt{G}}\right) dv .$$

Dobbiamo dimostrare che se $P \equiv (u, v)$ descrive un'asintotica curvilinea, anche $P_1 \equiv (u_1, v)$ descrive un'altra asintotica; ciò equivale a dire che se è verificata l'equazione differenziale

$$(16)\qquad \frac{2\beta}{G} du + \frac{D''}{\sqrt{G}} dv = 0 ,$$

lo sarà anche l'altra

$$\frac{2\beta}{G_1} du_1 + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}} dv = 0 ,$$

ovvero, per la (15), e per la (16) stessa

$$(17)\qquad d\sigma + \frac{\beta}{G_1} du_1 - \frac{\beta}{G} du = 0 .$$

Così dunque tutto si riduce a provare che dalla (16) segue la (17).

Differenziando

$$u_1 = \alpha + \beta \operatorname{tg} \Omega_1 ,$$

coll'osservare che

$$\frac{1}{\cos^2 \Omega_1} = \frac{G_1}{\beta^2}$$

risulta

$$\frac{\beta}{G_1} du_1 = d\Omega_1 + \frac{\beta}{G_1} (\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1)\, dv .$$

Similmente abbiamo

$$\frac{\beta}{G} du = d\Omega + \frac{\beta}{G} (\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\, dv ,$$

e sottraendo dalla precedente, coll'osservare la (14), viene

$$\frac{\beta}{G_1}du_1 - \frac{\beta}{G}du = d\sigma - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega) + \frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1),$$

sicchè la (17) si cangia nell'altra equivalente

$$2d\sigma - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\, dv + \frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1)\, dv = 0\,,$$

od anche

$$2\frac{\partial\sigma}{\partial u}du + 2\frac{\partial\sigma}{\partial v}dv - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\, dv + \frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1)\, dv = 0\,.$$

Sostituendo in questa, per du, dv, le quantità proporzionali, secondo la (16),

$$du : dv :: \frac{D''}{\sqrt{G}} : -\frac{2\beta}{G}\,,$$

siamo ridotti a verificare che si ha identicamente

$$\frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{2\beta}{G}\frac{\partial\sigma}{\partial v} = \frac{\beta}{G}\left\{\frac{\beta}{G_1}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega_1) - \frac{\beta}{G}(\alpha' + \beta' \operatorname{tg} \Omega)\right\}.$$

Se si osserva l'equazione differenziale (11) cui soddisfa σ e le formole

$$\frac{\beta^2}{G} = \cos^2 \Omega \quad , \quad \frac{\beta^2}{G_1} = \cos^2 \Omega_1\,,$$

l'identità da verificarsi diventa

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\sigma \cos\sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right) + \cos^2\sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{G}\right) &= \\ = \frac{1}{G}\left\{\alpha'(\cos^2 \Omega_1 - \cos^2 \Omega) + \beta'(\operatorname{sen} \Omega_1 \cos \Omega_1 - \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega\right\} &= \\ = \frac{1}{G}\operatorname{sen}(\Omega_1 - \Omega)\left\{-\alpha' \operatorname{sen}(\Omega_1 + \Omega) + \beta' \cos(\Omega_1 + \Omega)\right\}&,\end{aligned}$$

alla quale, per la (14), si può dare la forma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right) + \cos\sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{G}\right) &+ \\ + \frac{1}{G}\left\{\alpha'(\cos 2\Omega + \sigma) + \beta' \operatorname{sen}(2\Omega + \sigma)\right\} &= 0\,,\end{aligned}$$

o in fine

$$\operatorname{sen}\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right)+\frac{1}{G}(\beta'\cos 2\Omega-\alpha'\operatorname{sen}2\Omega)\right\}+$$

$$+\cos\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{G}\right)+\frac{1}{G}(\alpha'\cos 2\Omega-\beta'\operatorname{sen}^2 2\Omega)\right\}=0\,.$$

Ma da $\operatorname{tg}\Omega=\frac{u-\alpha}{\beta}$ segue

$$\operatorname{sen}2\Omega=\frac{2\beta(u-\alpha)}{G}\quad,\quad\cos 2\Omega=\frac{\beta^2-(u-\alpha)^2}{G}\,,$$

e l'ultima identità da verificarsi resta quindi

$$\operatorname{sen}\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\beta}{G}\right)+\frac{\beta'[\beta^2-(u-\alpha)^2]-2\beta\alpha'(u-\alpha)}{G^2}\right\}+$$

$$\cos\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u-\alpha}{G}\right)+\frac{2\beta\beta'(u-\alpha)+\alpha'[\beta^2-(u-\alpha)^2]}{G^2}\right\}=0\,.$$

Ora qui i due coefficienti di $\operatorname{sen}\sigma$, $\cos\sigma$ sono identicamente nulli ed il nostro teorema è dimostrato.

4. Resta così provato che nella corrispondenza di punto a punto, stabilita sulla rigata R al principio del n. 3, vengono conservate insieme le asintotiche rettilinee (generatrici) e quelle curvilinee. Essa è d'altronde *la più generale trasformazione* della rigata in sè che conservi le asintotiche dei due sistemi; e in vero si è visto al n. 2 che l'angolo σ resta affatto arbitrario lungo una generatrice, cioè resta arbitraria *per una generatrice* la legge di corrispondenza dei punti P, P_1. Dopo queste osservazioni, possiamo caratterizzare le deformazioni infinitesime delle rigate al n. 2 colla costruzione geometrica seguente:

Di una qualunque rigata R *si consideri una trasformazione in sè medesima che conservi le generatrici e le asintotiche curvilinee, e del resto arbitraria; ne resta individuata una deformazione infinitesima della rigata nella quale ciascun punto* P *si sposta nella direzione parallela alla normale nel punto corrispondente* P_1.

Sotto questa forma il nostro risultato corrisponde perfettamente alla costruzione generale che collega le deformazioni infinitesime delle superficie alle congruenze W (*Lezioni*, vol. II, pag. 52); soltanto, nel caso attuale, avviene che la doppia infinità di raggi della congruenza W si riduce alla semplice infinità dei raggi della rigata.

Ritorniamo in fine alle speciali rigate deformate del catenoide ed alla loro proprietà caratteristica del n. 1. Se per una tale rigata fissiamo la legge di corrispondenza dei punti P, P_1 lungo una generatrice in guisa che

le normali in P, P_1 formino fra loro un angolo costante arbitrario (non nullo), lo stesso avverrà per qualunque altra generatrice, e l'angolo resterà il medesimo.

Possiamo dunque enunciare la proprietà dimostrata al n. 1 sotto quest'altra forma equivalente:

Le superficie rigate applicabili sul catenoide, e queste soltanto, ammettono delle deformazioni infinitesime nelle quali gli spostamenti dei singoli punti avvengono in direzione normale alle generatrici ed inclinata di un angolo costante arbitrario (non retto) sulla superficie.

Matematica. — *Sugli ordini degli infiniti.* Nota del Corrispondente G. Peano.

1. Come è noto, dicesi che la funzione fx diventa infinita di ordine m, per x vergente ad infinito, quando il limite di $\frac{fx}{x^m}$ è una quantità finita non nulla.

Possiamo limitarci al caso in cui la variabile assuma soli valori interi; la funzione si suol chiamare una successione. Si può supporre che fx assuma soli valori positivi; altrimenti basta parlare del suo modulo. Allora, adottati i simboli del *Formulario matematico*, da me edito, ediz. 5ª, 1908, si ha:

$$(1) \qquad f \varepsilon \mathrm{QFN}_0 \,.\, m \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset : \mathrm{ord}\, f = m \,.=.\, \lim \frac{fx}{x^m} \Big| x \varepsilon \mathrm{Q} \,.$$

Il numero m può essere intero o fratto o irrazionale, positivo o negativo. La funzione il cui ordine di infinito è negativo, si suol dire infinitesima.

Non sempre esiste nel campo delle quantità reali, indicate col simbolo q, il numero m, che soddisfa alla condizione (1). Allora Du Bois-Reymond, ed altri, introdussero gli ordini colle definizioni seguenti:

$$(2) \qquad f, g \varepsilon \mathrm{QFN}_0 \,.\, \supset : \mathrm{ord}\, f > \mathrm{ord}\, g \,.=.\, \lim \frac{fx}{gx} \Big| x = \infty$$

$$(3) \qquad \text{"} \quad = \quad \text{"} \qquad \text{"} \qquad \varepsilon \mathrm{Q}$$

$$(4) \qquad \text{"} \quad < \quad \text{"} \qquad\qquad = 0 \,.$$

Cioè ad ogni funzione f si fa corrispondere un nuovo ente, detto suo ordine.

Date due funzioni f e g, si dirà che l'ordine di f è maggiore, o eguale, o minore, dell'ordine di g, secondochè il limite del rapporto $\frac{fx}{gx}$, variando x (verso l'infinito), è infinito, o ha un valore finito, o è uguale a zero. Le definizioni (2), (3) e (4) sono definizioni per astrazione.

Gli ordini delle funzioni costituiscono una categoria di enti, chiamati ancora grandezze, più ampia della categoria q delle quantità reali.

Gli ordini di e^x, e^{x^2}, ... sono tutti infiniti, ognuno più grande del precedente. Gli ordini di $\log x$, $\log\log x$, ... sono grandezze, maggiori di 0, e minori d'ogni numero reale positivo, e ognuno è minore del precedente. Così si presentano degli infiniti e infinitesimi attuali.

La somma degli ordini delle funzioni fx e gx si suol definire come l'ordine del prodotto $fx \times gx$, ove varii x:

$$\text{ord}\, f + \text{ord}\, g = \text{ord}\, fx \times gx | x . \tag{5}$$

Questa definizione ha il difetto formale di esprimere $\text{ord}\, f + \text{ord}\, g$ non già mediante ord f e ord g, ma bensì mediante f e g, che non sono individuate dai loro ordini. In altre parole, la definizione (5) deve essere accompagnata dalla dimostrazione che la somma considerata non varia, se al posto di f e di g pongo altre funzioni aventi lo stesso ordine. E la cosa è facile a farsi.

La difficoltà incomincia colla definizione del prodotto degli ordini.

Il Borel, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris, 1910, ha ripreso a trattare la teoria degli ordini degli infiniti. Egli definisce, a pag. 20, il prodotto degli ordini di fx e gx come l'ordine della funzione di funzione fg, cioè:

$$\text{ord}\, f \times \text{ord}\, g = \text{ord}\, f(gx) | x.$$

Questa definizione ha lo stesso difetto formale della (5); ma questo difetto ora è reale. Il sig. V. Mago, nella sua tesi manoscritta per la laurea all'università di Torino, osserva che effettivamente $\text{ord}\, f \times \text{ord}\, g$ non è funzione di ord f, e di ord g, ma dipende dalla scelta delle funzioni f e g; ossia sostituendo f e g con funzioni f' e g', tali che $\text{ord}\, f = \text{ord}\, f'$, e $\text{ord}\, g = \text{ord}\, g'$, non segue $\text{ord}\, f \times \text{ord}\, f' = \text{ord}\, g \times \text{ord}\, g'$. Basta verificarlo sull'esempio:

$$fx = f'x = e^x \quad , \quad gx = x \quad , \quad g'x = 2x .$$

Lo stesso inconveniente presenta la definizione che il Borel dà a pag. 37, che equivale a scrivere:

$$(\text{ord}\, f) \times (\text{ord}\, g) = \text{ord}\, e^{\frac{\log fx \times \log gx}{\log x}} | x ,$$

che dà la moltiplicazione di due numeri, ma in cui il secondo membro non si presenta, e non si può ridurre ad essere una funzione di ord f, e di ord g. Risulta dallo stesso esempio.

2. Il fatto che si può definire la somma, ma non il prodotto di due ordini ci conduce all'osservazione che la definizione dell'uguaglianza degli

ordini ha dell'arbitrario. Le funzioni f e g hanno lo stesso ordine, se il limite del loro rapporto è finito; ma questo caso si può distinguere in altri, secondochè il rapporto è minore o maggiore di 1, ed essendo l'unità, secondochè vi converge crescendo o decrescendo, ecc. Invece del rapporto, prendendo i logaritmi, si può considerare la differenza fra due funzioni. Così si è condotti ad unire ad ogni funzione un nuovo ente, che rappresenta l'ultimo modo di comportarsi della funzione, e che, in mancanza di termine più appropriato, dirò suo *fine*, e che si definisce per astrazione come segue.

Il fine d'una funzione avente il valore costante a è questa costante.

Il fine d'una funzione f è maggiore, o eguale, o minore del fine d'una funzione g, se si può determinare un indice m, tale che per ogni indice x da m in poi, sempre si abbia

$$fx > gx\,, \quad \text{o} \quad fx = gx\,, \quad \text{o} \quad fx < gx\,.$$

In simboli:

(1) $$a \varepsilon \mathrm{q} \,.\, \supset .\, \mathrm{fine}\,(\iota\, a; \mathrm{N}_0) = a$$

$f, g \,\varepsilon\, \mathrm{q\,F\,N}_0 \,.\, \supset :$

(2) $$\mathrm{fine}\, f > \mathrm{fine}\, g \,.=\, \exists\, \mathrm{N}_0 \cap m \ni (x \varepsilon m + \mathrm{N}_0 \,.\, \supset_x .\, fx > gx)$$

(3) $$=\qquad\qquad\qquad\qquad =$$

(4) $$<\qquad\qquad\qquad\qquad <$$

Ad ogni successione f corrisponde allora un nuovo ente, suo fine; e questi enti hanno le stesse proprietà delle quantità reali, salvochè non necessariamente il fine di una prima successione f dovrà essere o maggiore, o eguale, o minore del fine d'una seconda; come già avveniva per gli ordini.

Due funzioni, per aver fini eguali, non è necessario che siano sempre eguali; basta lo siano da un certo valore della variabile in poi; ossia il fine di una successione è un ente diverso dalla successione.

Fra i fini delle successioni, ci sono le quantità reali, come risulta dalla (1).

I fini delle funzioni x, x^2, ... sono infiniti, e ognuno di essi è maggiore dei precedenti. I fini delle funzioni $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, ... sono enti maggiori di 0, secondo le definizioni (1) e (2), e minori d'ogni quantità positiva.

Si presentano così nuove categorie di enti infiniti e infinitesimi attuali, o costanti. E si vede che la differenza fra gl'infiniti attuali o costanti, e quelli potenziali o variabili, questione che ha tanto appassionato e ancora appassiona i filosofi matematici, sia una questione di puro linguaggio. La funzione $\frac{1}{x}$, per x tendente ad infinito, è un infinitesimo variabile; il suo fine è un infinitesimo costante.

Sopra i fini possiamo definire tutte le operazioni algebriche:

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & \text{fine}\, f + \text{fine}\, g = \text{fine}\,(fx + gx) | x \\
& \text{fine}\, f \times \text{fine}\, g = \text{fine}\,(fx \times gx) | x\,, \\
& \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

Si riconosce facilmente che i secondi membri sono funzioni di fine f, e fine g, cioè non si alterano sostituendo a f e g altre funzioni aventi lo stesso fine.

La definizione del fine d'una funzione è indipendente dall'idea di limite; anzi si può definire questo mediante quello:

$$f \varepsilon \mathrm{q F N_0} \,.\, \Im \,.\, \max \mathrm{Lm}\, f = \mathrm{l_1 q} \cap a \ni (\text{fine}\, f < a)$$

cioè il massimo limite, « la plus grande des limites » secondo Cauchy, è il limite inferiore delle quantità reali, più grandi del fine della funzione.

Mediante il fine, si può definire l'ordine d'una funzione

$$\text{ord}\, f = \text{fine} \frac{\log fx + hx}{\log x}\,,$$

ove hx è una funzione arbitraria, avente un limite finito: $\lim h \varepsilon \mathrm{q}$.

L'ordine si presenta come una classe di fini.

L'affermazione che l'ordine del logaritmo è un infinitesimo costante, si traduce allora nell'altra: $\dfrac{\log \log x}{\log x}$ è un infinitesimo variabile.

Topografia. — « *Media Pars Urbis* ». *Rilievo planimetrico ed altimetrico eseguito dagli allievi della Scuola d'applicazione per gli ingegneri di Roma, colla guida del prof. U. Barbieri e dell'ing. G. Cassinis.* Nota del Corrispondente V. Reina.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Cristallografia — *Forma cristallina del salicilato di colesterina.* Nota del Corrispondente Ettore Artini.

Le sostanze appartenenti con sicurezza alla classe pediale del sistema triclino sono relativamente così poco numerose, che credo non inutile descriverne cristallograficamente una nuova, da aggiungersi alle già note, tanto più trattandosi di una sostanza otticamente attiva. È questa l'estere salicilico della colesterina comune (dalla bile); i cristalli studiati furono preparati nel laboratorio di Chimica agraria di questa R. Scuola superiore di Agricoltura, dal prof. A. Menozzi insieme col dott. A. Moreschi: ringrazio qui i gentili colleghi che vollero affidarmi lo studio di questo, come degli altri derivati delle colesterine da loro preparati, e mi comunicarono i dati chimici che qui sotto riporto.

Secondo il dott. L. Golodetz (¹) l'estere salicilico della colesterina comune fonde a 173° C., è anidro, e risponde alla composizione:

$$C_{26}H_{43} \,.\, OOC \,.\, H_4C_6 \,.\, OH \,.$$

Il prodotto da me studiato, preparato secondo il metodo indicato dal Golodetz — per fusione di acido salicilico e colesterina a 170° C. — fonde a 180° C., è pure anidro, e risponde, secondo l'analisi elementare, e i dati di una saponificazione con potassa, alla formula:

$$C_{27}H_{45} \,.\, OOC \,.\, H_4C_6 \,.\, OH \,.$$

Devia a sinistra il piano di polarizzazione della luce:

conc. = 7,66 °/₀ cc. di cloroformio
lunghezza del tubo = 1 decimetro
temperatura = 15° C.
$\alpha = -4°,12$,

da cui

$$\left[\alpha\right]_D^{15°\,C.} = -53°,78 \,.$$

I cristalli studiati, limpidi, incolori, piccoli ma nitidi, furono ottenuti da diversi solventi (etere acetico, cloroformio ecc.): ma nè il loro abito nè le forme semplici presentarono sensibile variabilità.

(¹) *Mitteilung aus D.r Unnas Dermatologicum, in Hamburg.* Rif. in Chemiker Zeitung, 1907, II, 1215.

Sistema triclino, classe pediale:

$$\alpha = 92^\circ,55',24''$$
$$\beta = 101^\circ,58',32''$$
$$\gamma = 95^\circ,14',10''$$
$$a:b:c = 0,77364:1:0,50407\,.$$

Forme osservate:

$\{100\}, \{010\}, \{0\bar{1}0\}, \{\bar{1}\bar{1}0\}, \{\bar{1}\bar{2}0\}, \{001\}, \{00\bar{1}\}, \{0\bar{1}1\}, \{01\bar{1}\}$.

L'abito più comune è rappresentato dalla fig. 1.

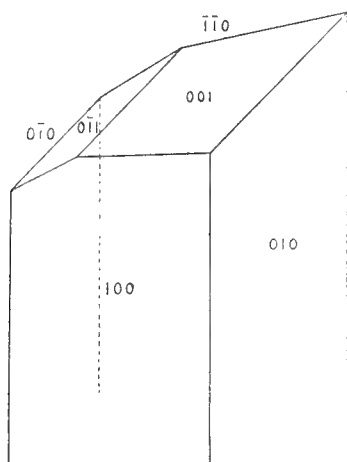
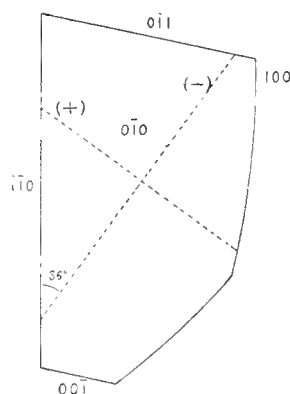



Fig. 1. Fig. 2.

I cristalli sono normalmente ben terminati ad una sola estremità di z; all'altra si presentano di solito facce curve, irregolarmente convergenti verso l'estremità negativa dell'asse verticale. Le forme $\{00\bar{1}\}$ e $\{01\bar{1}\}$ sono cioè ordinariamente mancanti; anche $\{100\}$, nitida e piana verso l'estremità superiore, si incurva fortemente all'estremità inferiore. La mancanza assoluta delle faccie parallele a $\{\bar{1}\bar{1}0\}$ e a $\{100\}$ è sicura e costante nei più nitidi dei cristalli studiati; in taluni dei più grossi e imperfetti se ne osservano traccie; queste faccie incerte e non misurabili evidentemente non sono equivalenti alle parallele, sempre ampie e brillanti.

Chi voglia altra prova della mancanza di centro di simmetria nei cristalli del salicilato di colesterina, può facilmente procurarsela, facendo cristallizzare sopra un portaoggetti qualche goccia di soluzione satura a caldo in una miscela di etere acetico e alcool etilico: si formano così, per raffreddamento, innumerevoli nitidissimi cristallini lamellari, del tipo di quello rappresentato dalla fig. 2. Mentre a sinistra la faccia $(0\bar{1}0)$ è nettamente delimitata dallo spigolo $[0\bar{1}0\,.\,\bar{1}\bar{1}0]$, a destra si vede la traccia di (100) che solo in alto è retta, e si curva rapidamente in basso, dove le fa seguito un'altra traccia curva, discontinua colla prima, di altro pedion indeterminabile.

Nel quadro seguente sono esposti i risultati del calcolo, messi a riscontro colle osservazioni goniometriche.

Spigoli misurati	N.	Limiti delle osservazioni	Angoli misurati Medie	Angoli calcolati
100 . 010	9	83°,50′ - 84°,13′	84°, 1′	*
100 . 001	7	77,33 - 77,52	77,41	*
001 . 010	8	85,44 - 86,11	85,53	*
$\bar{1}\bar{1}0$. $0\bar{1}0$	10	48,49 - 49,17	49, 5	*
$0\bar{1}1$. $0\bar{1}0$	7	66,39 - 67,16	67, 0	*
$0\bar{1}1$. 100	6	81,15 - 81,38	81,24	81°,25′
$\bar{1}\bar{1}0$. 001	6	101,33 - 101,50	101,42	101 ,44
$0\bar{1}1$. 001	7	26,55 - 27,19	27, 6	27 , 7
$\bar{1}\bar{1}0$. $0\bar{1}1$	5	83.28 - 83,45	83,40	83 ,36
$\bar{1}\bar{2}0$. $0\bar{1}0$	1	—	31,41	31 ,33

Sulla $(0\bar{1}0)$ una direzione di estinzione (la negativa) fa un angolo di 36° (luce gialla) con lo spigolo $[\bar{1}\bar{1}0 . 0\bar{1}0]$ nell'angolo ottuso che questo fa con lo spigolo $[0\bar{1}0 . 0\bar{1}1]$ (cfr. fig. 2). La dispersione delle bisettrici è abbastanza sensibile. Un asse ottico emerge molto obliquamente da $(0\bar{1}0)$, ai margini del campo di vista.

Chimica. — *Sopra la decomposizione di alcuni sali d'argento* [1]. Nota del Corrispondente A. Angeli e di L. Alessandri.

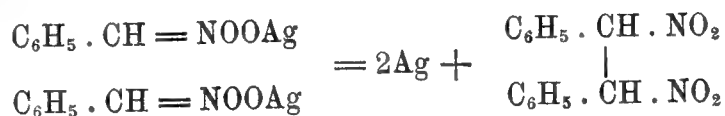
Gli studî che formano l'oggetto delle presenti ricerche, sono una continuazione di quelli eseguiti negli anni precedenti, e riguardano la decomposizione che possono subire taluni sali d'argento che derivano da acidi molto deboli e metalli poco elettroaffini [2]. Come venne già accennato a suo tempo, queste decomposizioni presentano una grande analogia con quelle che in altri casi si sono potute realizzare per mezzo della corrente elettrica.

Nella fine dell'ultima Nota [3] venne dimostrato che il sale d'argento dell'isofenilnitrometano in piccola parte perde nitrito d'argento con formazione di stilbene:

$$\begin{matrix} C_6H_5 . CH = NOOAg \\ C_6H_5 . CH = NOOAg \end{matrix} = \begin{matrix} C_6H_5 . CH \\ \| \\ C_6H_5 . CH \end{matrix} + 2 Ag NO^2$$

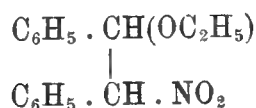
[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studî superiori di Firenze.
[2] Questi Rendiconti, 1909, XVIII, 2° sem., pag. 38; cfr. anche 1908, XVII, pag. 695.
[3] Ibidem, 1909, XVIII, 2° sem , pag. 38.

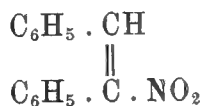
ed il rimanente perde argento per dare origine a due binitroderivati stereoisomeri:

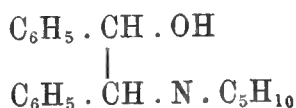
$$\begin{matrix} C_6H_5 . CH = NOOAg \\ C_6H_5 . CH = NOOAg \end{matrix} = 2Ag + \begin{matrix} C_6H_5 . CH . NO_2 \\ | \\ C_6H_5 . CH . NO_2 \end{matrix}$$

i cui caratteri fisici corrispondono a quelli di due prodotti che vennero preparati da I. Schmidt ([1]) facendo reagire l'acido nitroso sullo stilbene.

Dai dati che si riscontrano nella letteratura c'era però una divergenza: i binitroderivati ottenuti dallo stilbene per azione degli alcali si resinificavano e nello stesso tempo si formava aldeide benzoica: i nostri prodotti invece per azione dello stesso reattivo, nelle opportune condizioni, davano origine a sostanze ben definite. Per tale ragione abbiamo fatto uno studio comparativo sull'azione degli alcali sui binitro derivati da noi preparati e quelli ottenuti per azione dell'acido nitroso sullo stilbene. In tutti i casi siamo arrivati a prodotti perfettamente identici.

Infatti per azione dell'etilato sodico sull'α-binitroderivato si è potuto ottenere il composto:

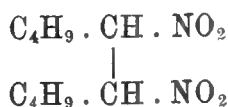
$$\begin{matrix} C_6H_5 . CH(OC_2H_5) \\ | \\ C_6H_5 . CH . NO_2 \end{matrix}$$

Per azione della piperidina su ambedue i binitroderivati si è pervenuti al nitrostilbene:

$$\begin{matrix} C_6H_5 . CH \\ \| \\ C_6H_5 . C . NO_2 \end{matrix}$$

ed insieme alla medesima base priva di residui nitrici

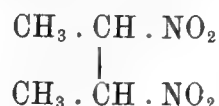
$$\begin{matrix} C_6H_5 . CH . OH \\ | \\ C_6H_5 . CH . N . C_5H_{10} \end{matrix}$$

Resta quindi dimostrato che nella decomposizione del sale d'argento dell'isofenilnitrometano si ottengono due binitrostilbene stereoisomeri che senza dubbio stanno fra di loro come l'acido mesotartrico alla forma racemica.

In modo perfettamente analogo procede la scissione dei nitroderivati della serie alifatica.

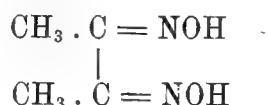
Il nitropentano (Kahlbaum) fornisce un olio da cui si separa un prodotto che fonde a 110°:

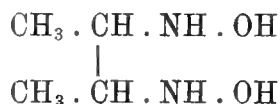
$$\begin{matrix} C_4H_9 . CH . NO_2 \\ | \\ C_4H_9 . CH . NO_2 \end{matrix}$$

([1]) Berliner Berichte, XXXIV, 1901, pag. 3537.

Nello stesso modo dal nitroetano si ottiene un binitrobutano:

$$\begin{array}{l} CH_3 . CH . NO_2 \\ \quad\quad | \\ CH_3 . CH . NO_2 \end{array}$$

Allo scopo di dimostrare in modo rigoroso che al nuovo composto spetta realmente questa struttura, abbiamo giudicato opportuno trasformarlo in un derivato già noto e di costituzione ben definita, la diossima del diacetile. A tale scopo l'abbiamo ridotto con la quantità calcolata di idrogeno, facendo reagire sopra la soluzione alcoolica di una molecola della sostanza in presenza di polvere di zinco quattro molecole di acido acetico, quante cioè sono necessarie per eliminare due atomi di ossigeno.

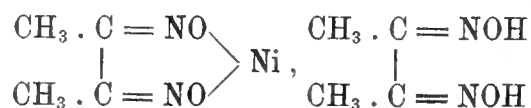
Però anche seguendo esattamente queste precauzioni non ci fu possibile pervenire in modo diretto alla diacetildiossima

$$\begin{array}{l} CH_3 . C = NOH \\ \quad\quad | \\ CH_3 . C = NOH \end{array}$$

ed in sua vece si ottenne un residuo solubile in acqua, che possiede fortissima proprietà riducente; dapprima si credette che si fosse formata idrossilammina, ma il prodotto non presentava le reazioni caratteristiche di questa sostanza: molto probabilmente il potere riduttore accenna ad una sostanza della forma:

$$\begin{array}{l} CH_3 . CH . NH . OH \\ \quad\quad | \\ CH_3 . CH . NH . OH \end{array}$$

vale a dire ad una idrossilammina sostituita.

Se la nostra supposizione era vera, quest'ultimo composto doveva fornire la diossima per mezzo di un processo d'ossidazione: ma naturalmente si doveva ricorrere a mezzi blandi, giacchè anche le diossime sono a loro volta suscettibili di venire ulteriormente ossidate con gran facilità. Perciò ricorremmo da prima all'ossigeno dell'aria: ma il prodotto di riduzione anche lasciato qualche settimana in capsula all'aperto non accenna ad alterarsi: non si formano i cristalli caratteristici della diossima in parola, e conserva la sua solubilità nell'acqua. Allora ricorremmo ad un artificio che ci condusse subito al resultato cui miravamo.

Dalle belle ricerche di Tschugaeff [1] è noto che la diacetildiossima coi sali di nichel, fornisce con tutta facilità un composto rosso caratteristico:

$$\begin{array}{l} CH_3 . C = NO \\ \quad\quad | \\ CH_3 . C = NO \end{array} \!\!\!> Ni \, , \quad \begin{array}{l} CH_3 . C = NOH \\ \quad\quad | \\ CH_3 . C = NOH \end{array}$$

[1] Berliner Berichte, XXXVIII, 1905, pag. 2520.

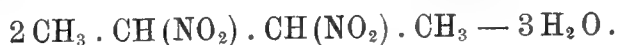
e perciò si fece passare una corrente d'aria nel liquido ottenuto, sciogliendo in acqua il prodotto di riduzione addizionato di solfato di nichel, ammoniaca e cloruro ammonico. Mantenendo calda la soluzione a bagno-maria, la ossidazione procede rapidissima, e dopo pochi minuti si osserva la formazione del prodotto di Tschugaeff.

Il composto per decomposizione con acidi minerali diluiti, mette subito in libertà la diacetildiossima purissima.

A questo riguardo faremo notare che, nel caso nostro, la presenza dei sali di nichel pare che eserciti una doppia azione: quella che permette di isolare la diossima non solo, ma anche quella di favorire l'ossidazione della diidrossilammina. Infatti, come si è accennato, questa non viene modificata dall'ossigeno dell'aria, mentre invece in presenza dei sali di nichel subito dà la diossima: questo metallo, nel caso da noi studiato, agirebbe perciò anche come catalizzatore.

Accenneremo infine che il binitrobutano solido prima descritto per azione della potassa, in soluzione alcoolica, dà nitrito ed il liquido rimane incoloro od appena si colora. Se invece si fa reagire la potassa alcoolica sul miscuglio greggio direttamente ottenuto dal nitroetano, allora si ottiene un magnifico sale che si presenta in grandi cristalli colorati intensamente in giallo; è eminentemente esplosivo e facilmente alterabile: anche conservato in essiccatore perde acido nitroso, ed il colore giallo passa al bianco.

Per queste ragioni ne abbiamo appena iniziato lo studio, ma dai pochi dati analitici, che ci fu possibile avere, sembra che esso derivi da un prodotto di condensazione del binitrocomposto primitivo:

$$2\,CH_3\,.\,CH(NO_2)\,.\,CH(NO_2)\,.\,CH_3 - 3\,H_2O\,.$$

Anche l'ossima del piperonalio, il nitrostirolo ed il diazobenzolnitroetano formano sali di argento facilmente alterabili: ma dai loro prodotti di decomposizione non si pervenne a nulla di caratteristico.

Parte sperimentale.

Azione dell'etilato sodico su α-dinitrostilbene. — Mescolando una soluzione alcoolica di α-dinitrostilbene con una soluzione di sodio in alcool nella quantità corrispondente a due atomi del metallo per ogni molecola del dinitroderivato, si ottiene con leggero riscaldamento un liquido colorato lievemente in giallo, che non intorbida per aggiunta d'acqua, ma precipita con acidi: si separa così un olio che presto solidifica, mentre nel liquido si riscontra la presenza di acido nitroso. Impiegando etilato sodico nelle proporzioni di un atomo di sodio per ogni molecola di α-dinitrostilbene, si ottenne invece un miscuglio contenente del binitrocomposto inalterato. Il prodotto purificato dall'alcool, nel quale è assai solubile, si presenta in aghetti

incolori, che fondono a 92°, stabilissimi al permanganato: dà nettamente la reazione di Konowalow.

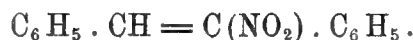
Gr. 0,1950 di sostanza dettero cc. 9,2 di azoto a 17° e 757 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{16}H_{17}NO_3$
N	5,53	5,16

Per questi dati analitici e le proprietà fisiche e chimiche, questo composto è da ritenersi identico con quello preparato già da Meisenheimer ed Heim [1] per azione della potassa etilalcoolica sul 7.Nitrostilbene.

Azione della Piperidina sopra i dinitrostilbeni. — Aggiungendo della piperidina in lieve eccesso ad una soluzione alcoolica di α o di β-dinitrostilbene si nota un forte ingiallimento del liquido: lasciandolo a sè si depositano dei cristallini aghiformi gialli, che purificati dall'alcool fondono a 73°. Questo prodotto è evidentemente identico a quello ottenuto dai sopracitati Meisenheimer ed Heim [2] facendo reagire il metilato sodico sopra i binitrostilbeni, ed a quello preparato da Knoevenagel e Walter [3] da benzaldeide e fenilnitrometano in presenza di metilammina. Ha dunque la costituzione già accennata:

$$C_6H_5 \, . \, CH = C(NO_2) \, . \, C_6H_5 \, .$$

Dalle acque madri per aggiunta d'acqua ne precipita ancora, ma assai meno puro: cristallizzandolo dall'alcool si potè separare facilmente da esso una piccola quantità di una sostanza molto meno solubile che fonde a 155°. Questa, purificata da molto alcool, si presenta in ciuffetti d'aghi finissimi incolori col p: f: 156-157°.

Gr. 0,1046 di sostanza dettero cc. 4,2 di azoto a 15° e 760 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{19}H_{23}NO$
N	4,76	4,98

La sostanza non contiene più gruppi nitrici, e ciò spiega come non dia la reazione di Konowalow.

Decomposizione del sale argentico del nitroetano. — Si mescolano agitando e raffreddando con ghiaccio due soluzioni acquose ben fredde del sale sodico del nitroetano e di nitrato d'argento, presi in quantità corrispondenti ai loro pesi molecolari. Si deve aver cura di saturar prima con etere

(1) Liebig's Annalen, 355, pag. 269.

(2) Liebig's Annalen, 355, pag. 269.

(3) Berliner Berichte, XXXVII, 1904, pag. 4502.

la soluzione del sale sodico: infine tutto si lascia a sè in ghiaccio, sotto uno strato d'etere.

Il sale argentico precipita subito come una massa caseosa bianca, la quale rapidamente imbrunisce: a decomposizione completa il colore del precipitato divenuto polverulento è perfettamente nero, e sulle pareti del recipiente si son formati specchi d'argento metallico ridotto.

Nelle nostre preparazioni non partimmo mai da più di gr. 30 di nitroetano, nè son consigliabili proporzioni maggiori di sostanze per la difficoltà di ben raffreddare la massa semisolida del sale d'argento durante la sua così rapida decomposizione.

Per separare i prodotti formatisi, dopo aver decantato quanto è possibile l'etere soprastante, si estrae ripetutamente la poltiglia che rimane pure con etere, avendo la precauzione d'usare il medesimo solvente ridistillandolo dopo ogni estrazione, perchè i prodotti son trasportati dal vapor di etere; le acque madri estratte, gialle per piccolissima quantità di sali di argento, si trascurano senz'altro.

Evaporato l'etere delle estrazioni rimane un olio assai denso, colorato debolmente in giallo, che possiede un odore pungente caratteristico, ed anche fortemente raffreddato non cristallizza: ne venne distillata allora nel vuoto una piccola quantità, ed alla pressione di 2 cm. ca. di mercurio passò quasi completamente alla temperatura intorno a 120°: si notò in fine però una decomposizione con sviluppo di vapori nitrosi. Per orientarci sulla sua composizione ne determinammo l'azoto, dopo averlo tenuto nel vuoto su acido-solforico.

Gr. 0,2545 di sostanza dettero cc. 38,4 di azoto a 10° e 756 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_8N_2O_4$
N	18,10	18,91

Desumendo da questa analisi che al dinitroderivato corrispondente alla formula $C_4H_8N_2O_4$ fosse mescolato un prodotto meno ricco d'azoto per la perdita di acido nitroso subìta nella decomposizione accennata, si provò a distillare di nuovo frazionatamente, sempre a pressione ridotta (20-30 mm. di mercurio) una maggior quantità dell'olio greggio.

Una prima frazione passò in gran parte sotto 80° e da 80° a 100° si raccolsero solo poche goccie, di una seconda si raccolse ciò che distillava fra 60° e 90° e fra 90° e 120°. Una determinazione di azoto eseguita sulla porzione passata fra 80° e 110° dette numeri che si accordano colla formula $C_4H_7NO_2$ vale a dire per un mononitrodimetiletilene $CH_3 . CH = C(NO_2) . CH_3$; in appoggio a tale ipotesi sta il fatto che la sostanza è instabilissima al permanganato ed assorbe rapidamente i vapori di bromo.

Un'ultima porzione passata nella distillazione fra 110° e 125° dopo breve tempo si rapprese in una massa cristallina e venne purificata separandone prima l'olio che l'impregnava, poi sciogliendola in pochissimo etere e ricristallizzandola dallo stesso solvente. Separata infine dalle acque madri, ben spremuta fra carta asciugante e seccata su lastra porosa la sostanza, in grandi e bellissimi prismi appiattiti incolori, fonde a 41° e si decompone a 150° ca.; è pochissimo solubile anche a caldo in etere di petrolio, da cui ricristallizza in lamine; molto più solubile in etere etilico, non molto in alcool a freddo. Dà nettamente la reazione di Konowalow.

Gr. 0,1174 di sostanza dettero cc. 18,8 di azoto a 10° e 746 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_8N_2O_4$
N	18,96	18,91

La soluzione alcoolica del composto medesimo dà con potassa metilalcoolica un precipitato bianco, che si discioglie per aggiunta di acqua: aggiungendo alla soluzione divenuta così limpida dell'acido solforico diluito essa intorbida e colora in azzurro una cartina amidoiodurata: si è liberato dunque acido nitroso.

Un poco del precipitato bianco ottenuto in soluzione alcoolica, separato per filtrazione, dà con nitrato di cobalto, acetato sodico ed acido acetico il precipitato di cobaltinitrito potassico: si tratta quindi di nitrito potassico.

Il liquido filtrato si estrasse con etere: si ottenne per svaporamento del solvente un olio giallo di odore pungentissimo: il liquido estratto acidificato con acido solforico intorbidò per separazione di un olio che si mostrò in tutto simile al precedente. Queste sostanze oleose ottenute in piccola quantità, assai volatili, non cristallizzarono nè furono analizzate.

Molto diversamente si comporta con la potassa metilalcoolica l'olio greggio quale si ottiene direttamente dalla decomposizione del sale argentico del nitroetano. Un poco di esso diluito con alcool venne trattato con potassa metilica fino a completa precipitazione di un prodotto cristallino giallo che subito si separa. Si aggiunse infine dell'etere solforico, ed il composto venne separato rapidamente per filtrazioue alla pompa, lavato con etere, alcool e pochissima acqua e posto in essiccatore su acido solforico: possiede un color giallo intenso, esplode violentemente per riscaldamento e per percussione, è instabile alla luce anche diffusa: la luce solare diretta lo colora in rosso bruno: lasciato a sè nel vuoto su acido solforico non perde di peso neppure in 12 ore; dopo diverse settimane però, conservato in essiccatore all'oscuro, si trovò che si decomponeva lentamente con sviluppo di vapori nitrosi e decoloramento dei cristalli.

Esso non è molto solubile a freddo in acqua, dalla quale in piccola quantità può venir ricristallizzato e da cui si ottiene in prismi molto bril-

lanti e rifrangenti; ma la sua soluzione acquosa, specialmente se in gran massa e concentrata, per riscaldamento già avanti l'ebullizione si decompone vivamente e rapidamente, sviluppando ossido d'azoto ed odore di diacetile, mentre il liquido si decolora e si separano gocciolette oleose, volatili in parte in corrente di vapore. Le determinazioni di azoto e di potassio dettero i seguenti risultati.

Gr. 0,1334 di sostanza dettero cc. 19,2 di azoto ad 11° e 758 mm.
" 0,1385 di sostanza dettero gr. 0,0765 di solfato potassico.
In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_8H_8N_4O_5K_2$
N	17,26	17,61
K	24,76	24,53

Le acque madri di questo sale avevano un odore pungente: furono estratte con etere e questo per svaporamento lasciò un olio appena colorato, i vapori del quale attaccano fortemente le mucose; dopo lungo tempo, all'aria, cominciarono a cristallizzare grossi prismi incolori, che purificati fondevano a 40° anche mescolati con quelli descritti precedentemente: le due sostanze son dunque identiche. Si può quindi separare il dinitrobutano solido dall'olio ottenuto direttamente dalla decomposizione del sale argentico del nitroetano, anche con questo procedimento purchè non si aggiunga eccesso di potassa alcoolica nel precipitare il sale giallo.

Riduzione dei dinitroderivati. — Una molecola del dinitroderivato solido (p. f. 41°) viene sciolta in alcool e trattata con leggero eccesso di polvere di zinco, poi goccia a goccia raffreddando ed agitando si aggiungono 4 molecole di acido acetico glaciale; infine si scalda lievemente, si filtra ed il liquido vien concentrato sino a consistenza sciropposa. Si riprende questo sciroppo con acqua e qualche goccia di acido cloridrico diluito fino a scomparsa dell'intorbidamento bianco, che da prima si forma. Alla soluzione, che riduce fortemente a freddo il liquido del Fehling, si aggiunge cloruro ammonico in eccesso, ammoniaca e solfato di nichel: si osserva allora che lentamente alla superficie va formandosi una polvere pesante colorata in rosso. Questa polvere viene separata per filtrazione, lavata bene con acqua e sospesala in acqua distillata vien decomposta con acido solforico diluito tanto che scompaia il color rosso; estraendo poi con etere per evaporazione del solvente si ottengono cristalli incolori che fondono a 230° con decomposizione. Si può affrettare la formazione del composto rosso di Tschugaeff operando a caldo e facendo passar nel liquido una corrente d'aria. La dimetilgliossima ottenuta fu bollita con poco etere per lavarla: allora fuse a 233-234° con decomposizione e seccata a 100° fornì i seguenti dati analitici.

Gr. 0,1514 di sostanza dettero cc. 30,2 di azoto a 12° e 772 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_4H_8N_2O_3$
N	24,27	24,13

Bollita con acido cloridrico diluito riduce a freddo il liquido del Fehling e nello stesso tempo si manifesta l'odore caratteristico del diacetile.

Decomposizione del sale argentico del nitropentano. — Il sale argentico del nitropentano, preparato nello stesso modo e nelle stesse condizioni descritte per quello del nitroetano, precipita lievemente colorato in giallo ed imbrunisce con minor rapidità.

A decomposizione completa si estraggono i prodotti formatisi col procedimento già descritto: però l'olio ottenuto per svaporamento dell'etere, lasciato a sè in essiccatore, depone lentamente dei cristalli incolori, che si separano per filtrazione alla pompa e si asciugano bene su lastra porosa.

Il composto è assai solubile in etere etilico, poco in alcool anche a caldo: lo si cristallizzò da poco etere e si ottenne così in bei prismi incolori, che fondono a 109-110°.

Gr. 0,1323 di sostanza dettero cc. 13,4 di azoto a 9° e 751 mm.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{10}H_{20}N_2O_4$
N	12,12	12,07

Presenta la reazione di Konowalow.

La sua soluzione alcoolica dà con potassa metilica un precipitato bianco che si discioglie per aggiunta di acqua: con acido solforico diluito il liquido acquoso alcoolico limpido intorbida per separazione di un olio e contiene acido nitroso. Il precipitato bianco, analogamente a quanto si osservava nello stesso trattamento sul dinitrobutano (p. f. 41°), era dunque nitrito potassico.

L'olio, che rimane dopo aver separato il composto cristallino (p. f. 109-110°), con potassa metilica dà invece un sale potassico giallo, che cristallizza in scagliette madreperlacee, non è deliquescente, esplode per riscaldamento con minor violenza ed è più stabile del sale corrispondente fornito dal nitroetano.

Sale argentico del nitrostirolo. — Fu preparato dal sale potassico del nitrostirolo secondo le indicazioni di Thiele [1] partendo da nitrobenzaldeide (orto) e nitrometano. Da esso per doppia mutua decomposizione si ottenne, nelle condizioni e colle cautele descritte pel nitroetano, il sale argentico, colorato appena in giallo, che imbrunì lentamente; dopo due giorni, essendo ormai completa la decomposizione, si estrasse ripetutamente con etere, ma

[1] Berliner Berichte XXXII (1899) pag. 1293.

questo per svaporamento dette un olio rossastro, che non accenna a cristallizzare anche dopo molto tempo.

Sale argentico del diazobenzol-nitroetano. — Il sale argentico del diazobenzolnitroetano già conosciuto, fu descritto prima da V. Meyer (1) e venne da noi preparato secondo le indicazioni sue, per mutua decomposizione dal sale potassico, valendoci per questo anche delle norme date da Bamberger (2). Appena precipitato è rosso mattone scuro, ma anche in ghiaccio annerisce assai rapidamente; si notò un forte sviluppo di gas incoloro. L'estratto etereo dei composti formatisi è uno sciroppo colorato intensamente in arancio, che non cristallizza anche se lasciato lungamente a sè: ha odore di acido acetico. Uno sciroppo del tutto simile si ha pure dal composto libero diazobenzolnitroetano lasciato a sè per lenta ossidazione all'aria, come era già stato osservato da V. Meyer (3).

Sale argentico dell'ossima del piperonalio. — Il sale argentico dell'ossima del piperonal ottenuto per doppia decomposizione dal sale sodico è appena colorato ed imbrunisce lentamente.

Dall'estratto etereo cristallizzò un po' di ossima inalterata, acido piperonilico ed esso stesso odorava fortemente di piperonal. Le acque madri contenevano acido nitroso.

Continueremo lo studio di queste interessanti decomposizioni.

Chimica. — *Sopra l'ossidazione degli azoderivati nei corrispondenti azossicomposti.* Nota del Corrispondente A. Angeli.

Nella maggior parte dei trattati di chimica organica viene riferito che gli azossicomposti, oltre alle reazioni generali che permettono di prepararli dai nitroderivati ovvero dai nitrosocomposti ed idrossilammine, si possono altresì ottenere per diretta ossidazione degli azoderivati. Se però si esaminano i lavori originali che si riferiscono all'argomento, si nota subito che i dati in proposito sono quanto mai scarsi ed incerti e che in ogni caso si tratta di ossidazioni energiche, compiute per mezzo di ossidanti forti ed a temperature elevate.

Così riguardo all'ossidazione dell'azobenzolo si trova questo solo accenno di H. Petriew (4) che risale all'anno 1873: « ossidando l'azobenzolo in soluzione acetica ed in tubo chiuso a 150-250°, si ottiene azossibenzolo ».

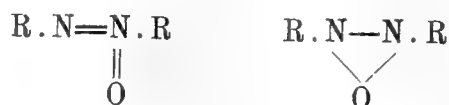
Così per i composti che Willgerodt (5) ottenne per azione dell'acido

(1) Ibid. VIII (1875) pag. 1073.
(2) Ibid., XXXI (1898) pag. 2626.
(3) Ibid., VIII (1875) pag. 1073.
(4) Berliner Berichte, VI (1873), aag. 557.
(5) Journal für prak. Chemie (2), 44, 77 e seg.

nitrico fumante per alcuni azoderivati e che egli riguardava come azossicomposti, venne in seguito riconosciuto che loro spetta una costituzione del tutto diversa (1).

La reazione procede meglio in un caso studiato da Werner e Stiasny (2); questi chimici infatti, facendo reagire l'acido nitrico rosso e fumante sul paradinitroazobenzolo, hanno ottenuto il paradinitroazossibenzolo. Si vede subito però che per questo mezzo si può pervenire solamente a derivati nitrici.

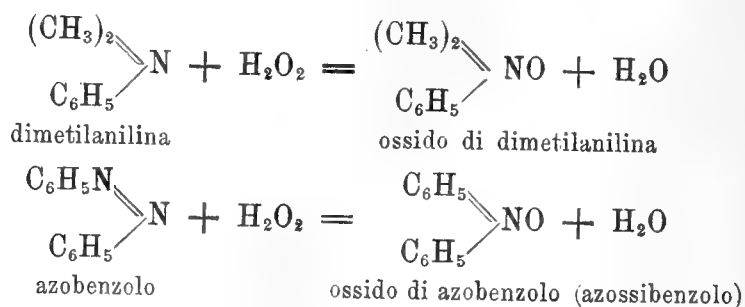
Siccome regna ancora del dubbio intorno a quale delle due forme

$$R.N{=}N.R \quad (\text{con } O \text{ legato con doppio legame a un } N) \qquad R.N{-}N.R \quad (\text{con } O \text{ a ponte fra i due } N)$$

si debba attribuire a questa classe di sostanze, io mi sono occupato per trovare una reazione che permetta in modo netto, operando con mezzi blandi ed a bassa temperatnra, di effettuare l'ossidazione in parola, ed ho potuto constatare che l'acqua ossigenata si presta assai bene per realizzare questa trasformazione.

Basta infatti sciogliere l'azobenzolo in acido acetico ed alla soluzione aggiungere circa il doppio del suo peso d'acqua ossigenata al 30 °/₀ (peridrol Merck); se anche una parte dell'azoderivato si separa non importa, perchè esso lentamente ed a temperatura ordinaria passa egualmente in soluzione. Dopo qualche giorno la reazione è compiuta. Si versa allora in acqua, si estrae con etere e l'estratto etereo viene lavato con carbonato sodico allo scopo di togliere tutto l'acido acetico. Per raffreddamento il residuo si rapprende in una massa cristallina costituita da azossibenzolo puro. Non ho potuto notare la formazione dell'isomero descritto recentemente da Reissert (3).

Questo modo di formazione presenta in questo caso un interesse del tutto speciale e rassomiglia perfettamente all'ossidazione che subiscono le ammine terziarie per azione dello stesso reattivo da me impiegato, l'acqua ossigenata. Come è noto per tale mezzo si ottengono gli ossidi, che contengono l'azoto pentavalente. Considerando per es. il caso della dimetilanilina e dell'azobenzolo, l'analogia viene subito posta in rilievo dalle due eguaglianze:

$$\underset{\text{dimetilanilina}}{\begin{matrix}(CH_3)_2\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>\!N} + H_2O_2 = \underset{\text{ossido di dimetilanilina}}{\begin{matrix}(CH_3)_2\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>\!NO} + H_2O$$

$$\underset{\text{azobenzolo}}{\begin{matrix}C_6H_5N\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>\!N} + H_2O_2 = \underset{\text{ossido di azobenzolo (azossibenzolo)}}{\begin{matrix}C_6H_5\\ C_6H_5\end{matrix}\!\!>\!NO} + H_2O$$

(1) Journal für prak. Chemie (2), 55, 395.
(2) Berliner Berichte 32 (1899), 3256.
(3) Berliner Berichte, 42 (1909), 1364.

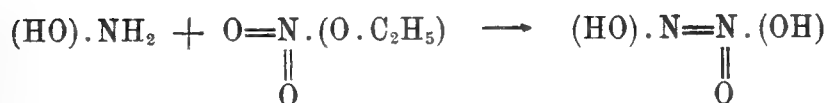
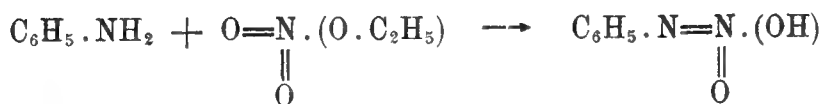
e porta una nuova conferma alle vedute di quei chimici che ammettono che anche negli azossicomposti un atomo di azoto funzioni da pentavalente.

Ciò sta d'altra parte in buona armonia anche col metodo di formazione di queste sostanze che io ho descritto alcuni anni or sono e che consiste nel far reagire il nitrobenzolo sull'anilina in presenza di sodio metallico [1] e con le altre reazioni analoghe che si possono riassumere nelle eguaglianze da me stabilite in precedenti lavori [2]:

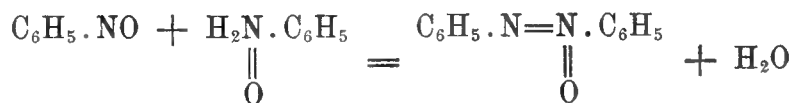
$$C_6H_5.NH_2 + O{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5 \longrightarrow C_6H_5.N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5$$

$$(HO).NH_2 + O{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5 \longrightarrow (HO).N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5$$

$$C_6H_5.NH_2 + O{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.(O.C_2H_5) \longrightarrow C_6H_5.N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.(OH)$$

$$(HO).NH_2 + O{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.(O.C_2H_5) \longrightarrow (HO).N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.(OH)$$

Si capisce che la seconda e la terza conducono a prodotti isomeri e non identici.

La formola degli azossicomposti contenente un anello di due atomi di azoto ed uno di ossigeno, venne stabilita in modo arbitrario ancora quando queste sostanze si preparavano per riduzione dei nitrocomposti; questa reazione, il cui meccanismo è oscuro e complicato molto probabilmente si può far rientrare nella prima delle equazioni soprascritte ovvero in quella scoperta da Bamberger (azioni dei nitrosoderivati sulle corrispondenti idrossilammine sostituite) e che si può formulare anche nel seguente modo:

$$C_6H_5.NO + H_2\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5 = C_6H_5.N{=}\underset{\underset{O}{\|}}{N}.C_6H_5 + H_2O$$

Continuerò lo studio di questi processi di ossidazione estendendoli anche agli azoderivati della serie alifatica.

[1] Questi Rendiconti (1906), 1° sem., 480.

[2] A. Angeli, *Ueber einige sauerstoffhaltige Verbindungen des Stickstoffs* (Stuttgart, 1908).

Chimica-fisica — *Sulle proprietà colloidali, e particolarmente sul trasporto elettrico dell'amido.* Nota del Corrispondente F. Bottazzi e di C. Victorow (da Kasan).

Chimica-fisica. — *Ricerche chimico-fisiche sulla lente cristallina.* Nota del Corrispondente Filippo Bottazzi e di Noè Scalinci.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le successioni minimizzanti nel calcolo delle variazioni.* Nota di Guido Fubini, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. Mi riferirò dapprima al problema di Dirichlet: i risultati sono, come vedremo, senz'altro estendibili a problemi più generali. Sia D un campo del piano (x, y), e ne sia C il contorno. Sia $\{f\}$ l'insieme delle funzioni $f(x, y)$ limite e continue insieme alle loro prime derivate in D [1], che nei punti di C (escluso al più un aggregato di punti di C linearmente nullo [2], che potrà anche variare da funzione a funzione di $\{f\}$), assumono valori prefissati a priori. Posto

$$J(f)=\int\int_{D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}\right]dx\,dy\,,$$

sia d il limite inferiore dei valori $J(f)$, quando $f(x, y)$ varia in $\{f\}$.

Diremo *minimizzante* ogni successione di funzioni $f_1, f_2, f_3, \ldots$ di $\{f\}$ tale che $\lim_{n=\infty} J(f_n) = d$. In alcune Memorie [3] ho studiato i rapporti tra una tale successione minimizzante, e una funzione limite F, appartenente a $\{f\}$, soddisfacente alla $J(F) = d$, e armonica quindi p. es. in ogni cerchio

[1] Si potrebbero imporre a queste derivate condizioni meno restrittive.

[2] Dico che un aggregato di punti di C o di D è linearmente nullo, se i valori di un parametro α, tali che la retta $x=\alpha$ (o la retta $y=\alpha$, o il cerchio $x^2+y^2=\alpha$, ecc.) contenga almeno un punto dell'aggregato stesso, formano un insieme di misura nulla.

[3] Cfr. in particolar modo: *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza* ecc. Rend. del Circolo Matem. di Palermo, tomo 23; *Nuove applicazioni del principio di minimo,* Annali di Matem , tomo 14 della 2ª serie ecc.

formato da punti tutti appartenenti a D. Il teorema fondamentale (dal quale si può anche dedurre il *teorema di esistenza* per la F) è il seguente:

I) *Sia* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *una successione minimizzante; sia cioè* $J(f_i) = d + \varepsilon_i$, *dove* $\lim_{i=\infty} \varepsilon_i = 0$. *Si estragga da essa una successione subordinata* $f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3}, \ldots$, *tale che la serie* $\sum_n \varepsilon_{i_n}^{\frac{1}{3}}$ *sia convergente (ciò che è possibile in infiniti modi, perchè* $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$). *In ogni punto di* D *(escluso al più un aggregato* E *di punti di* D *linearmente nullo) vale la* $\lim_{n=\infty} f_{i_n} = F$.

II) *Il limite per* $n = \infty$ *dell'integrale di* f_{i_n}, *esteso ad una qualsiasi linea o superficie* A, *i cui punti appartengono tutti a* D, *è proprio uguale al corrispondente integrale di* F. *Se* A *è un'area, questa proprietà vale anche per derivate prime omologhe di* f_{i_n} *e di* F.

2. Le ricerche di questa Nota partono dalla seguente osservazione:

III) *Le proprietà del teorema* II *del* § 1 *non sono vere soltanto per la successione subordinata delle* f_{i_n}, *ma anche per la successione delle* f_n, *cioè per ogni successione minimizzante.*

Questo teorema si può estendere (teor. IV) dalle successioni agli insiemi minimizzanti più generali: cioè ad ogni insiemi di funzioni $f(x, y)$ di $\}f\{$ tale che, se ε è un numero piccolo a piacere, esiste in esso una funzione $f(x)$ tale che $J(f) - d \leq \varepsilon$.

IV) *Fissata la linea od area* A, *allora, dato un numero* σ *piccolo a piacere, si può trovare un numero* ε *tale che, se* f *è una funzione di* $\}f\{$ *soddisfacente alla* $J(f) - d \leq \varepsilon$, *gli integrali di* f *e di* F, *estesi a* A, *differiscano per meno di* σ. *E un teorema analogo vale, se* A *è un'area, per gli integrali di derivate prime omologhe di* f *e di* F.

Dimostriamo il teorema III per la parte che riguarda F e le f_i: una dimostrazione analoga vale per le loro derivate. Se il teorema III non fosse vero, nella successione delle f_n esisterebbe una successione subordinata $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots$ tale che il limite per $n = \infty$ dell'integrale di f_{j_n} esteso a A esisterebbe, e sarebbe distinto dall'integrale di F esteso a A. E questo avverrebbe per ogni successione contenuta nella successione delle f_{j_n}. La successione *minimizzante* delle f_{j_n} non soddisferebbe dunque al teorema II del § 1: ciò che è assurdo. Similmente, se il teorema IV non fosse vero, si potrebbero trovare infinite funzioni $f_1, f_2, \ldots$ tali che $\lim_{n=\infty} [J(f_n) - d] = 0$, e che la differenza degli integrali di f_n e di F estesi a A sarebbe per ogni valore di n maggiore di σ. La successione *minimizzante* delle f_n contradirebbe ai teoremi II e III: ciò che è assurdo.

Tutti questi risultati si estendono al caso più generale, in cui si voglia rendere minimo un integrale, il cui integrando sia una forma (quadratica) positiva nelle derivate del primo ordine di f, *e quindi alle*

più generali equazioni lineari differenziali del 2° ordine, che provengono da un problema di calcolo delle variazioni.

E ne risulterà in particolare, che, se la successione $f_1, f_2, \dots$ è minimizzante per il problema studiato, la media dei valori di f_n presa in un qualsiasi campo $\mathcal{A}$ lineare o superficiale di punti appartenenti a D, o i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier (o serie analoga) di f_n su una circonferenza formata da punti appartenenti a D, *hanno per* $n = \infty$ *un limite uguale alla media corrispondente, o ai coefficienti del corrispondente sviluppo in serie per la funzione* F. E il teorema IV estende questi risultati *agli insiemi minimizzanti più generali.*

L'integrando dell'integrale $J(f)$, che si vuol rendere minimo sia invece una forma quadratica *definita* delle derivate di $f(x, y)$ di ordine $k > 1$ (cfr. la Memoria citata, dove come esempio è studiato il problema delle funzioni biarmoniche). L'equazione differenziale corrispondente $G(F) = 0$ sarà di ordine $2k > 2$. Sia $\{f\}$ il campo delle funzioni $f(x, y)$, che su C assumono valori prefissati insieme alle derivate di ordine $1, 2, \dots, k-1$ (escluso al più per le derivate di ordine $k-1$ un aggregato linearmente nullo di punti di C, anche variabile da funzione a funzione di $\{f\}$), e che sono p. es. entro D finite e continue insieme alle derivate di ordine $1, 2, \dots, k$. Sia d il limite inferiore di $J(f)$, quando f varia in $\{f\}$. Esiste una funzione F di $\{f\}$ soddisfacente alle $J(F) = d$, $G(F) = 0$. Vale allora (cfr. loc. cit.) un teorema analogo al I del § 1, con questa sola variante che la $\lim_{n=\infty} f_{i_n} = F$ è vera in *ogni* punto di D (*nessun* punto escluso). Anzi una proprietà simile vale per le derivate di ordine $1, 2, \dots, k-2$; le proprietà date nei teoremi I, II del § 1 per le f_{i_n} e loro derivate prime si dimostrano nel caso attuale rispettivamente per le derivate di ordine $k-1$ e k delle f_{i_n}. Coi metodi precedenti troveremo dunque:

Teoremi III e IV^{bis}. *Per ogni punto* A *di* D, *dato un numero* σ *piccolo a piacere, si può trovare un numero* ε *tale che, se* $J(f) - d < \varepsilon$, *i valori di* f *ed* F *in* A *differiscono per meno di* σ. *E altrettanto avviene per le loro derivate omologhe di ordine* $1, 2, \dots, k-2$. *Se* $f_1, f_2, \dots$ *è una successione minimizzante, il limite per* $n = \infty$ *del valore di* f_n *in ogni punto* A *di* E *è proprio il valore di* F *in* A. *Altrettanto avviene per i valori in* A *delle derivate di* f_n, F *di ordine* $1, 2, \dots, k-2$, *per gli integrali omologhi lineari o superficiali delle derivate di* f_n, F *di ordine* $k-1$, *e per gli integrali omologhi superficiali delle derivate di* f_n, F *di ordine* k.

Da questo teorema è così esaurita nel modo più generale la teoria delle successioni e degli insiemi minimizzanti.

I risultati di una mia Nota recente [1] *permettono di estendere questi teoremi anche a problemi che*, come il problema di Plateau, *conducono ad*

[1] *Il teorema di Osgood* ecc. Questi Rendiconti, 17 aprile 1910.

equazioni differenziali non lineari, purchè si ammetta il relativo teorema di esistenza (per la funzione F).

3. In una recente e importante Memoria: *Sur le principe de minimum* (1), il sig. Zaremba osserva anzitutto (nel caso del problema di Dirichlet) che l'esistenza di punti sul contorno C di D, ove la F non assume i valori prefissati, è un fatto insito nella natura stessa del problema che esaminiamo, almeno fino a che non si fa qualche particolare ipotesi su D. Se infatti al § 1 avessimo anche supposto che ogni funzione $f(x, y)$ di $\{f\}$ avesse valori prefissati in ogni punto di C, la funzione limite F potrebbe non assumere tali valori in un aggregato di punti di C linearmente nullo. Ciò avviene p. es. nel punto $x = y = 0$, se il campo D è il luogo dei punti soddisfacenti alle $0 < x^2 + y^2 \leq 1$. E lo Zaremba si propone quindi la domanda: *Se* P *è il problema al contorno* (Randwerthaufgabe) *corrispondente a un dato problema di calcolo delle variazioni* (p. es. il problema di Dirichlet corrispondente al problema di rendere minimo l'integrale $J(f)$ del § 1) *è possibile far corrispondere ad una qualsiasi successione minimizzante* $f_1, f_2, \ldots$ *un'altra successione* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *convergente in tutti i punti di* D, *tale che la funzione* $F = \lim\limits_{n=\infty} \varphi_n$ *risolva un problema* P′ *equivalente al problema* P, *quando quest'ultimo è risolubile?*

E lo Zaremba risponde affermativamente a questa domanda per il caso del problema di Dirichlet nel seguente modo. Per ogni punto A *interno* a D si costruisca un cerchio, formato di punti tutti appartenenti a D; e si definiscano le φ_n, assumendo come valore di φ_n in A la media dei valori di f_n in tale cerchio. Questo risultato dello Zaremba si deduce immediatamente dai precedenti teoremi. Che esista infatti il $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n$ si deduce tosto dal teorema III e dalle ultime osservazioni del § 2. Anzi il teorema IV estende questo teorema ad ogni insieme minimizzante. Che poi sia proprio $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n = F$ dipende da ciò che la media dei valori della funzione armonica F nel solito cerchio di centro A (media che per il teorema III è uguale a $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n$) coincide per noti teoremi col valore di F nel punto A. Si può evidentemente poi dire che F soddisfa ad un problema P′ equivalente al problema P di Dirichlet, se questo è risolubile; si può p. es. enunciare il problema P′ dicendo che $J(F) = d$, oppure che in ogni cerchio formato di punti tutti appartenenti a D la F è armonica. Quanto poi alle condizioni, cui deve soddisfare la F sul contorno C di D, queste si possono enunciare dicendo che la F assume in C i valori prefissati eccetto che in un aggregato di punti di misura lineare nulla, oppure si possono trasformare in una uguaglianza tra integrali di F e integrali di una funzione φ che su C as-

(1) Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie, juillet 1909.

suma i valori assegnati, come appunto fa lo Zaremba. E la ragione intima che rende possibile tale trasformazione di condizioni sta in ciò che gli aggregati di misura nulla non influiscono sui valori di un integrale.

4. Ora noi ci chiediamo: *Si può rispondere affermativamente alla domanda posta dal prof. Zaremba anche in casi più generali?*

Riferiamoci a problemi (definiti) di calcolo delle variazioni, che corrispondono ad equazioni differenziali lineari ([1]). Per i teoremi III e IV^{bis}) la domanda posta dallo Zaremba ha interesse soltanto per quelli di questi problemi che conducono a equazioni differenziali del secondo ordine ([2]). In tal caso si può ancora, come sopra, costruire la successione delle φ_n; questa è ancora convergente, ma il suo limite $\Phi = \lim \varphi_n$ non coincide più generalmente con la funzione minimizzante F cercata. E ciò, perchè per problemi distinti dal problema di Dirichlet non è più vero che la funzione cercata F abbia come valore nel punto A la media dei valori da essa assunti in un cerchio di centro A. La F si potrebbe bensì definire come il limite di Φ, quando i raggi dei cerchi costruiti col centro nei varî punti A del campo D tendono a zero, oppure in altro modo partendo dai teoremi dei §§ 1-2. Ma, se noi volessimo proprio costruire la successione delle φ_n tale che $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n = F$, potremmo usare il seguente procedimento, che noi esporremo dapprima per il caso classico del problema di Dirichlet. Per ogni punto A interno a D costruiamo una circonferenza L avente A per centro, una funzione R delle coordinate di A per raggio, tale che ogni punto interno a L, o posto su L, appartenga a D.

Se u è una qualsiasi funzione *armonica* entro L, e se ϱ, θ sono coordinate polari col centro in A, la formola di Green ce ne dà il valore $u(A)$ nel punto A sotto forma di un integrale definito $\int Q(u)\,\varrho\, d\theta$ esteso ad una qualsiasi circonferenza concentrica e interna a L, dove $Q(u)$ è funzione di ϱ, θ e dipende in più dalla u e dalle sue prime derivate. Quindi

$$u(A) = \frac{1}{R}\int_0^R d\varrho \int_0^{2\pi} Q(u)\,\varrho\, d\theta = \frac{1}{R}\int_{(L)} Q(u)\, d\sigma,$$

dove $d\sigma = \varrho\, d\varrho\, d\theta$ è l'elemento d'area, e l'integrazione è estesa a tutto il cerchio (L) limitato dalla circonferenza L. La successione delle φ_n, costruita assumendo $\frac{1}{R}\int_{(L)} Q(f_n)\, d\sigma$ come valore di φ_n in A, gode per i teoremi del

([1]) Quelle delle seguenti considerazioni, che non ricorrono all'uso della formola di Green, o altra formola analoga, si possono anche applicare a problemi di variazione, che conducono ad equazioni differenziali non lineari, purchè si ammetta il corrispondente teorema di esistenza.

([2]) Del resto queste considerazioni valgono anche per equazioni differenziali di ordine superiore al secondo, ma perdono in tal caso quasi ogni importanza.

§ 2 la proprietà richiesta dal prof. Zaremba [1]. E si ricorse per costruirla a integrali superficiali (e non curvilinei), perchè $Q(f_n)$ dipende anche dalle derivate di f_n. E il metodo qui svolto è generalizzabile, perchè ad ognuna delle equazioni differenziali citate si può estendere la formola di Green. Per estendere il metodo dello Zaremba (che in sostanza suppone di saper calcolare il valore di una funzione armonica nel centro di un cerchio, quando se ne conoscano i valori alla periferia) si richiederebbe in modo analogo di saper risolvere in qualche caso particolare il problema studiato.

Matematica. — *Sul problema di Hurwitz*. Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

1. Supponiamo che l'equazione algebrica

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

abbia tutti i suoi coefficienti positivi. Essa non avrà certamente radici nulle nè positive; ma noi non possiamo senz'altro giudicare se abbia o non abbia radici complesse con parte reale nulla o positiva. Si presenta dunque il problema, che Hurwitz ha, da tempo, elegantemente risoluto [2] di cercare condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione (1) abbia soltanto negative le sue radici reali, e le parti reali delle sue radici complesse.

L'importanza di questo problema, anche nel campo dell'immediata pratica, è molto notevole; già Hurwitz nella sua Memoria ne fa cenno, ed io posso ora aggiungere che sono stato condotto a studiarlo, lavorando, per conto della Brigata Specialisti, sulla stabilità dell'aeroplano.

Intanto, se l'equazione (1) deve avere negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse, allora il polinomio $f(x)$ deve potersi decomporre in fattori del tipo $x + \alpha$ e del tipo $(x + \alpha)^2 + \beta^2$: dunque non potrebbe avere coefficienti non positivi (ammesso, si capisce, che a_0 sia positivo).

Consideriamo ora il determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix},$$

[1] Dai teor. II, III si deduce infatti che il $\lim_{n=\infty} \varphi_n$ nel punto generico A esiste, ed è uguale a $\frac{1}{R}\int_{(L)} Q(F)d\sigma$, ossia, per la formola di Green, è uguale proprio al valore di F nel punto A.

[2] Mathematische Annalen. 1895, pp. 273-284.

e chiamiamo genericamente D_ν il minore principale formato colle prime ν linee e colle prime ν colonne del determinante D_n. Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) abbia soltanto negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che siano positivi tutti gli elementi della catena

$$a_0\,, D_1\,, D_2\,, D_3\,, \ldots, D_{n-1}\,, D_n\,.$$

Questa elegante soluzione di Hurwitz lascia tuttavia in una certa oscurità l'essenza del problema; e non credo inutile presentare una soluzione nuova, la quale, sebbene conduca, in pratica, a calcoli, spesso, lunghi e complicati, è teoricamente più intuitiva e più diretta.

2. Se $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots, \alpha_n$ sono le n radici, non necessariamente fra di loro diverse, di $f(x)=0$, noi diremo *equazione alle semisomme* un'equazione, $F(x)=0$, di grado $\frac{n(n-1)}{2}$, la quale abbia per radici le $\frac{n(n-1)}{2}$ semisomme $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\,, \frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\,, \ldots, \frac{\alpha_{n-1}+\alpha_n}{2}$. Questa equazione si può fòrmare, senza risolvere $f(x)=0$, con un metodo perfettamente analogo a quello che serve a formare l'equazione di Lagrange, *ai quadrati delle differenze.*

Poniamo

$$(2) \qquad K(x)=\left(\frac{x+\alpha_1}{2}\right)^k+\left(\frac{x+\alpha_2}{2}\right)^k+\cdots+\left(\frac{x+\alpha_n}{2}\right)^k$$

$$s_\nu=\alpha_1^\nu+\alpha_2^\nu+\cdots+\alpha_n^\nu$$

$$S_\nu=\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)^\nu+\left(\frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right)^\nu+\cdots+\left(\frac{\alpha_{n+1}+\alpha_n}{2}\right)^\nu.$$

Queste $s_\nu\,, S_\nu$ sono le cosiddette *somme delle potenze simili*; esse sono legate ai coefficienti dalle note e fondamentali formule di Neewton.

Sviluppando colla formula del binomio i varî termini che costituiscono $K(x)$, otteniamo

$$2^k K(x)=\sum_{\mu=1}^{n}\left[x^k+\binom{k}{1}x^{k-1}\alpha_\mu+\binom{k}{2}x^{k-2}\alpha_\mu^2+\cdots+\alpha_\mu^k\right]$$

$$=s_0\,x^k+\binom{k}{1}s_1 x^{k-1}+\binom{k}{2}s_2 x^{k-2}+\cdots+s_k\,.$$

Da ciò risulta subito

$$K(\alpha_1)+K(\alpha_2)+\cdots+K(\alpha_n)=\frac{s_0\,s_k+\binom{k}{1}s_1 s_{k-1}+\cdots+s_k s_0}{2^k}\,.$$

Intanto osserviamo che $K(\alpha_1) + K(\alpha_2) + \cdots + K(\alpha_n)$ vale $s_k + 2S_k$, come risulta dalla semplice ispezione della formula (2), dunque otteniamo

$$S_k = -\frac{1}{2} s_k + \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} s_\nu s_{k-\nu} . \tag{3}$$

Notiamo che nelle formule di Neewton il coefficiente a_r non si presenta se non quando giungiamo a considerare s_r. Tale osservazione permette di dedurre proprietà utili; ma sarebbe forse inopportuno farne qui cenno.

3. Formata che sia l'equazione alle semisomme, noi possiamo subito trovare una condizione necessaria e sufficiente perchè $f(x) = 0$ abbia soltanto negative le parti reali delle radici. Intanto bisogna che siano positivi (o almeno di ugual segno) tutti i suoi coefficienti: ciò risulta, come abbiamo osservato anche prima, dalla sua decomposizione in fattori di primo e di secondo grado. Supposti positivi tutti i coefficienti di $f(x) = 0$, resta senza altro esclusa la possibilità di radici reali nulle o positive. Potrebbero, caso mai, presentarsi radici complesse coniugate $\lambda + i\mu$, $\lambda - i\mu$, con λ nullo o positivo; vediamo in che modo ne risentirebbe l'equazione $F(x) = 0$, alle semisomme: essa dovrebbe presentare la radice *reale* λ, nulla o positiva. Se, invece, l'equazione $f(x) = 0$ non ha radici con parte reale nulla o positiva, allora la $F(x) = 0$ non potrà avere radici reali nulle o positive.

Tutto si riduce all'esame della possibilità che $F(x) = 0$ abbia radici *reali nulle o positive.* Ora basta che $F(x)$ abbia tutti i suoi coefficienti di ugual segno (positivi) perchè tale possibilità sia esclusa.

Finora dunque risulta che, se $F(x)$ ha tutti i coefficienti di ugual segno, ciò è *sufficiente* perchè le radici reali e le parti reali delle radici complesse di $f(x) = 0$ siano negative. Ma ciò è anche *necessario*, perchè, se $F(x) = 0$ avesse i coefficienti non tutti di ugual segno, allora dovrebbe avere qualche radice positiva o nulla, o almeno qualche radice complessa con parte reale positiva o nulla (per l'osservazione già due volte esposta); ma queste non potrebbero essere che semisomme di radici positive o nulle o di radici con parte reale positiva o nulla di $f(x) = 0$.

Riassumendo, noi possiamo enunciare un teorema, teoricamente molto semplice, cioè:

Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione a coefficienti reali

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

abbia soltanto negative le radici reali e le parti reali delle radici complesse è che essa abbia tutti i coefficienti diversi da zero e di ugual segno, e che l'equazione alle semisomme abbia anch'essa tutti i coefficienti diversi da zero e di ugual segno.

4. L'equazione alle semisomme ci può dare alcuni criterî, che, pur non avendo molta eleganza teorica, servono assai efficacemente nelle questioni applicative. Il problema di Hurwitz serve essenzialmente in pratica per le considerazioni seguenti:

Se

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = 0 \tag{4}$$

è un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, il suo integrale generale è

$$y = \mathrm{P}_1(t)\, e^{\beta_1 t} + \mathrm{P}_2(t)\, e^{\beta_2 t} + \cdots + \mathrm{P}_\nu(t)\, e^{\beta_\nu t}, \tag{5}$$

dove le β sono le radici *diverse* dell'equazione caratteristica

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

e $\mathrm{P}_1(t), \mathrm{P}_2(t), \ldots, \mathrm{P}_\nu(t)$ sono polinomî che hanno i gradi inferiori di 1 all'ordine di multiplicità delle rispettive radici β.

Noi diremo, per visibili riferimenti a questioni di meccanica [1], che l'espressione (5) costituisce una soluzione *stabile* del problema che conduce a (4) quando le radici reali dell'equazione caratteristica sono tutte negative, e le parti reali delle radici complesse sono tutte negative. Ma la stabilità non lascia di essere piccola e praticamente spesso inutile [2] quando almeno una di queste grandezze negative è molto vicina a zero. Quasi altrettanto importante come la loro qualità di essere negative è la loro qualità di essere lontane dallo zero; infatti y, pur tendendo a zero per $t = \infty$, può, se le parti reali delle β sono vicine a zero, acquistare prima valori molto considerevoli.

Si presenta dunque la questione di sapere se, fra zero e un numero negativo fisso $-\lambda$, esistano radici reali o parti reali di radici di $f(x) = 0$. In caso che ciò avvenga, la trasformata $f(x - \lambda) = 0$ avrà qualche radice positiva o qualche parte reale positiva di radici complesse. Ora l'equazione alle semisomme di $f(x - \lambda) = 0$ è evidentemente la trasformata $\mathrm{F}(x - \lambda) = 0$ dell'equazione alle semisomme di $f(x) = 0$. Calcolata $\mathrm{F}(x) = 0$, resta poi agevole calcolare $\mathrm{F}(x - \lambda) = 0$. Il segno dei coefficienti di $f(x - \lambda)$ e di $\mathrm{F}(x - \lambda)$ permetterà di decidere, a norma del teorema del n. 3, se fra 0

[1] Cfr. la Dinamica del Routh.

[2] Per esempio, gli aeroplani tipo Wright, che hanno il timone anteriore poco o nulla inclinato sulla direzione del movimento, sono poco stabili o poco instabili l'una e l'altra qualità sono quasi equivalenti, perchè (senza una costante attenzione da parte dell'aviatore) equivalgono ad una scarsa sicurezza. Essi guadagnano, viceversa, in agilità quello che per dono in sicurezza.

e $-\lambda$ esistano o non esistano radici reali di $f(x)=0$ o parti reali di radici complesse coniugate.

Tutto ciò riesce tanto più praticabile quanto più basso è il grado di $f(x)$; fortunatamente sono proprio le equazioni di grado piuttosto basso quelle che più ricorrono nelle questioni applicative. In un lavoro, che forse pubblicherò prossimamente, darò una tabella di equazioni alle semisomme, corrispondenti alle equazioni dei primi dieci gradi.

Fisica. — *Sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi alternativi sotto l'azione di correnti ad alta frequenza. Nuovo rivelatore di onde hertziane* [1]. Nota del prof. RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio G. COLOMBO.

Siano S_1 e S_2 (fig. 1) due spirali identiche fra di loro per dimensione e numero di spire, di cui l'una S_1 munita di un piccolo nucleo N_1 di materiale magnetico sezionato in modo che in esso non si possano produrre correnti indotte di Foucault (costituito, per esempio, da un piccolo fascio di

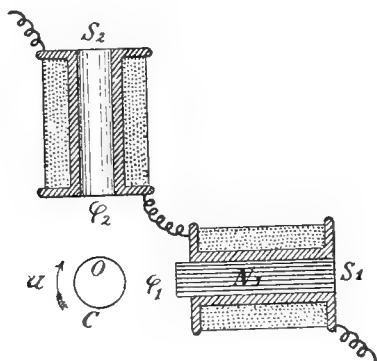



FIG. 1.

di fili sottili di ferro con vernice isolante); e l'altra spirale S_2 senza nucleo magnetico. Si dispongano le due bobine con i loro assi in direzioni normali, e — collegate fra di loro in serie — si facciano percorrere da una medesima corrente alternativa.

Per effetto dell'isteresi del materiale magnetico di cui è costituito il nucleo N_1, il flusso φ_1 generato dalla corrente percorrente la spirale S_1, presenta un determinato ritardo di fase rispetto al flusso φ_2 generato dalla stessa corrente percorrente la spirale S_2: e però i due campi magnetici al-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrotecnica del R. Istituto tecnico superiore di Milano.

ternativi così ottenuti si compongono nel punto O di intersezione degli assi delle due spirali, dando origine ad un campo magnetico rotante nel verso *u*.

Se quindi si trova sospeso in O un piccolo cilindro metallico *c*, leggero e bene equilibrato (nel caso dell'esperimento un cilindretto cavo di argento), l'equipaggio mobile — per effetto del campo rotante di cui si è detto — subisce una deviazione nello stesso senso *u* di rotazione del campo stesso.

Ed è chiaro inoltre come con la introduzione graduale di un nucleo N_2 (fig. 2) di materiale magnetico perfettamente identico al nucleo N_1, anche nella spirale S_2 (tali nuclei vennero ricavati da una treccia analoga a quella impiegata nel *Detector* magnetico di Marconi), sia possibile non solo diminuire la deviazione dell'equipaggio mobile dell'apparecchio, ma anche annullare la deviazione stessa, ed ancora cambiarne il senso.

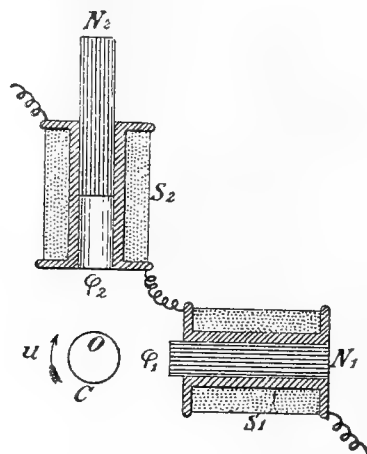



Fig. 2.

Tale disposizione, che costituisce un modo semplice di ottenere un campo magnetico rotante per mezzo di un'unica corrente alternativa, è stata indicata fin dal 1888 dall'ingegnere Borel, ed applicata per la costruzione di un contatore per correnti alternative (1). E della disposizione stessa, il prof. Vanni — che da parecchi anni eseguisce l'esperienza di cui si tratta, presentandola brillantemente in lezione — ne fece un'altra interessante applicazione ad un suo nuovo galvanometro atto all'accertamento ed alla misura di correnti alternative di debole intensità (2).

Si prenda ora a considerare l'esperimento nel caso in cui i due nuclei magnetici N_1 e N_2 si trovino in egual modo introdotti nelle rispettive spirali S_1 e S_2 (figg. 3 e 4), così da costituire un sistema di due piccoli elettromagneti assolutamente identici fra di loro elettricamente e magneticamente.

(1) Brevetto inglese Borel. Panaud, n. 1383 dell'anno 1888.

(2) Brevetto italiano dell'anno 1907.

In tali condizioni naturalmente l'equipaggio mobile dell'apparecchio rimane a riposo: infatti i due flussi φ_1 e φ_2 sono allora esattamente in fase, poichè i due nuclei magnetici N_1 e N_2 presentano il medesimo ritardo di magnetizzazione.

Ciò premesso, si osservi che la curva normale di magnetizzazione di un fascio di fili di ferro, dovuta ad un campo magnetico variabile in modo lento e ciclico fra limiti determinati, si altera fortemente, allorchè venga mandata una corrente alternata in un avvolgimento silenoidale intorno al nucleo di materale magnetico. Gerosa, Finzi e Mai ottennero tale interessante risultato da ricerche sulla variazione della intensità di magnetizzazione del ferro ricotto nel caso che esso venga sottoposto alla induzione di correnti alternate durante un determinato ciclo magnetico.

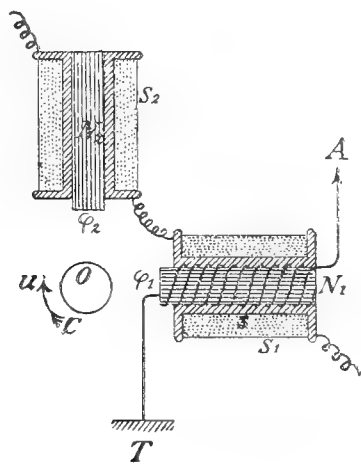



Fig. 3.

Ma l'alterazione del ciclo di isteresi si verifica anche se la corrente alternata secondaria è ad alta frequenza, nel qual caso l'intensità di tale corrente può essere straordinariamente piccola, come si verifica allorquando si tratta di un impulso elettromagnetico o sistema di onde hertziane. A tale conclusione pervennero il Rutherford, il Wilson ed il Marconi in loro importanti ricerche.

Si immagini dunque, nel caso dell'esperimento ultimo citato (figg. 3 e 4), di modificare ancora l'esperimento stesso in guisa da sottoporre il nucleo di ferro di una delle due bobine, per esempio il nucleo N_1, oltre che all'azione della corrente alternata percorrente la spirale S_1, anche a quella di una corrente oscillante ad alta frequenza: e ciò facendo percorrere a questa corrente un avvolgimento secondario s, aperto e di poche spire, le cui estremità siano poste rispettivamente in comunicazione con la terra e l'antenna ricevitrice delle onde hertziane, generate da un ordinario oscillatore comunicante a sua volta da una parte con la terra e dall'altra con l'antenna trasmettitrice.

Siccome per quanto più sopra è stato ricordato, il ciclo di isteresi del materiale magnetico, di cui è costituito il nucleo N_1, dovuto alla corrente alternata principale, dovrà subire — per effetto della corrente secondaria ad alta frequenza — una forte alterazione: ne consegue che il flusso magnetico φ_1 generato dalla corrente percorrente la spirale S_1, dovrà risultare spostato di fase rispetto al flusso magnetico φ_2 generato dalla corrente percorrente la

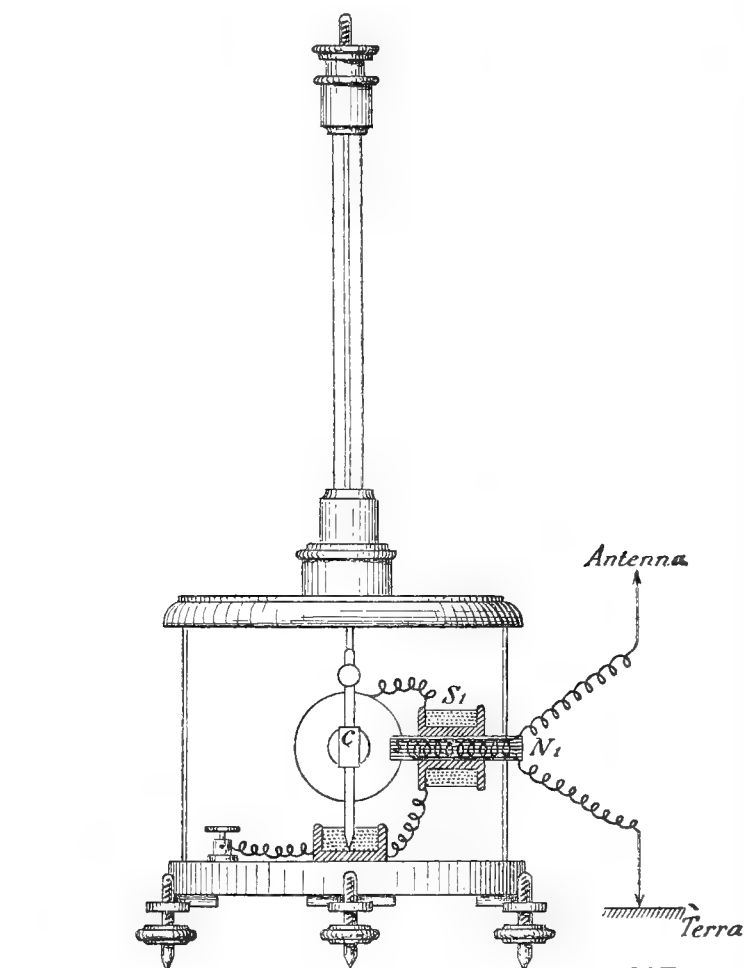



Fig. 4.

spirale S_2. E per tale spostamento di fase fra i due flussi φ_1 e φ_2, si dovrà quindi ancora — come nelle precedenti esperienze — ottenere in O un campo magnetico rotante, per effetto del quale l'equipaggio mobile dell'apparecchio dovrà conseguentemente subire una deviazione.

Le esperienze [1] confermarono pienamente queste mie previsioni. E con tale disposizione di apparecchio, ho potuto effettivamente ottenere, sotto l'azione di un sistema di onde hertziane — ed anche ad una certa distanza fra

[1] Ringrazio gli egregi miei assistenti ingegneri Comboni e Giulietti per la loro gentile e valida collaborazione nella preparazione di queste esperienze.

l'antenna trasmettitrice e la ricevitrice — una sensibile deviazione dell'equipaggio mobile dell'apparecchio. La sensibilità, già attualmente buona, ritengo potrà essere in seguito notevolmente accresciuta: e però già sin da ora si può dire che l'apparecchio viene a costituire un nuovo tipo di *rivelatore di onde hertziane*, asaai semplice, di facilissimo uso pratico, e perciò utilissimo per ricerche e misure in radiotelegrafia. In ogni modo mi pare di poter sin da ora prevedere, col mio nuovo dispositivo, una importante applicazione nello studio interessantissimo del comportamento dei corpi magnetici in campi alternativi, sotto l'azione di correnti interrotte, alternate, e di onde hertziane.

E questo nuovo studio verrà ad aggiungersi a quello già da me precedentemente fatto sulla variazione di isteresi nei corpi magnetici in campi Ferraris, sotto l'azione di correnti interrotte ed alternate di ordinaria e ad alta frequenza.

È intanto del massimo interesse porre mente al fatto veramente notevole che la deviazione dell'equipaggio mobile avviene sempre, nelle condizioni in cui sono state eseguite le mie esperienze, nel verso u: lo che prova che in tali condizioni, il flusso φ_1 risulta in ritardo di fase rispetto al flusso φ_2; e che perciò la corrente oscillante ad alta frequenza, percorrente l'avvolgimento secondario s, ha per effetto di provocare un aumento e del ritardo di magnetizzazione nel corrispondente nucleo N_1 di materiale magnetico.

Agronomia e Fisica. — *Di un nuovo coltro dinamometrico per la determinazione di alcune caratteristiche fisico-meccaniche del terreno.* Nota del prof. Federigo Giordano, presentata dal Socio G. Körner.

I.

La maggiore difficoltà che si presenta nello studio sperimentale comparativo delle macchine destinate alla lavorazione del suolo, è notoriamente quella di *definire* in modo preciso, razionale il terreno, determinandone i caratteri fisici che hanno effetto sul funzionamento dei loro organi operatori. Solo per quanto riguarda il *peso specifico* ed il *complesso scheletrico* non vi è luogo a discussione — mentre, per le caratteristiche le quali hanno più diretto rapporto con la resistenza opposta dal terreno alle azioni di penetrazione, di rivolgimento, di sminuzzamento, di urto, ecc. effettuate dagli organi di lavoro delle macchine, sono molto incerti o manchevoli i procedimenti di misura, ambigue talvolta le definizioni. Alludesi alle determinazioni della *resistenza d'attrito* nei confronti di quella *d'adesione*, e alle definizioni e

determinazioni importantissime della cosiddetta *tenacità* o *coesione* — per non dire delle ricerche sulla resistenza alla *compressione*, alla *flessione* (Rezek) ed anche alla *elasticità* del terreno che i più moderni sistemi di coltura meccanica, a velocità sino di m. 2,50 al 1″, non permettono più di trascurare.

È nei riguardi della *coesione* o *tenacità* delle terre che le idee appaiono più discordi e irrazionali. Si è, per esempio, ammesso da alcuni agronomi che della tenacità delle terre possano dare almeno un concetto comparativo gli sforzi di rottura per flessione (Schübler-De Gasparin) o per schiacciamento (Haberlandt), oppure la lentezza più o meno grande di trapanazione (Passerini) — eseguendo le menzionate prove secondo convenzionali modalità e su prismi di terra compressa, essiccata, ecc., in modi del pari convenuti. Si opera così su terreno che è fuori delle condizioni naturali, pur non essendo affatto dimostrato che vi sia una dipendenza semplice e diretta fra quei modi di rottura o di disgregazione e la *tenacità* intesa nel senso, che pare concordemente ammesso dagli agronomi, di resistenza specifica al *distacco* effettuato secondo un piano per azione di un coltello cuneiforme (*resistenza di penetrazione* o *Eindringungswiderstand* dei tecnologi tedeschi, la quale infatti, *considerata a sè*, direttamente dipende dal modo di aggregazione, di varia natura, delle particelle costituenti il terreno).

Di conseguenza è ben naturale che godano ancora il maggior favore dei tecnici i procedimenti della *vanga dinamometrica* e del *coltro dinamometrico*, suggeriti da Coulomb e Poncelet e studiati ed attuati poi dal Conte De Gasparin. Non vi ha dubbio anzi che il coltro dinamometrico, opportunamente applicato ad un carrello, rappresenti quanto di meglio sin qui si è saputo fare dai pochi sperimentatori che, provando macchine agrarie, rammentarono la necessità di saggiare in qualche modo la coesione del terreno (Niccoli).

Senonchè — come anni sono, chi scrive, ebbe già a far rilevare [1] — il coltro dinamometrico non ha fornito sinora dei numeri veramente o sicuramente comparabili, perchè i vari operatori nei loro scritti non ne definirono mai gli elementi dai quali dipende lo sforzo che a quel *cuneo* od a quella lama con *tagliente cuneiforme* si deve applicare per traslarla nel terreno (angolo di taglio, larghezza delle faccie, ecc.).

E se d'altra parte, allo scopo di rendere confrontabili i risultati, intervenisse un accordo sulla scelta delle dimensioni e sulle modalità di applicazione del coltro dinamometrico De Gasparin, non sarebbe ancora per nulla sicuro che codesto istrumento divenisse atto a fornire un criterio, *sia pure convenzionale* [2], per la stima comparativa delle terre. Invero, lo sforzo

[1] *Considerazioni e proposte intorno alla determinazione di alcune caratteristiche fisico-meccaniche del terreno e allo studio dell'aratro.* Milano, 1907 — pag. 6.

[2] Il lato convenzionale è forse inevitabile in questo campo, ma evidentemente gli

applicato a traslare il coltello (e che, riferito all'unità di lunghezza del tagliente confitto nel suolo, si pretende assumere quale misura della *tenacità*) rappresenta la somma d'un complesso di resistenze varie:

1) di separazione del terreno, vincendone la coesione sulla linea di taglio col deviare, frantumare, recidere, traslare *avanti al filo* del cuneo gli elementi costitutivi, i filamenti o fibre vegetali, le radici, le pietruzze, ecc.;

2) di attrito e adesione *sulle faccie* del cuneo; di compressione, frantumazione, sviamento delle parti a lato delle faccie stesse.

Ora, se il complesso delle resistenze del primo gruppo può rappresentare la *tenacità* del terreno (nel senso agronomico ed in considerazione della particolare natura e struttura del mezzo), è pure certo che nulla hanno a che vedere con la tenacità del terreno le resistenze del secondo gruppo. E siccome ai due gruppi di resistenze corrispondono indubbiamente sforzi in diverso rapporto da un terreno all'altro, così il valore totale che si misura non solo mancherà del significato che solitamente gli si attribuisce, ma neppure costituirà un appropriato, sicuro termine di confronto della tenacità dei vari terreni, in quanto esso comprende elementi che falsano i *valori relativi* di quella caratteristica.

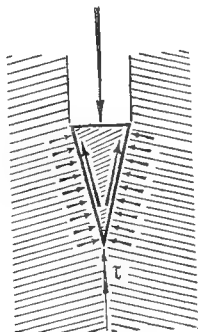



Fig. 1.

II.

Di qui è nata l'idea di costruire uno speciale cuneo o coltello dinamometrico, che consenta *l'analisi* degli sforzi — o quanto meno sia atto a fare isolatamente conoscere lo sforzo che il cuneo richiederebbe per avanzare nel terreno preventivamente tagliato secondo il percorso del suo filo (fig. 1), onde per differenza dallo sforzo totale si ricavi poi la già menzionata *resistenza di penetrazione o di taglio* τ (Codron, Demuth, ecc.), ossia il numero che in agronomia si dovrebbe considerare quale misura della *coesione* o *tenacità.*

---

accordi dovrebbero limitarsi a quei punti che assolutamente sfuggono ad ogni nostra analisi, ossia che non comprendono, insieme ad uno o più elementi non ancora definibili, un gruppo di elementi ben noti e misurabili a parte: tale è appunto il caso del coltro, come più avanti si discute.

E si ottiene così infatti la misura della tenacità secondo il più volte ricordato concetto teorico, a condizione che il cuneo bene affilato si avanzi in un impasto omogeneo di minutissimi elementi. Inoltre, per ogni altro impasto o terreno naturale, la tenacità misurata a quel modo corrisponde ancora al concetto che di essa ricorre nella meccanica agraria — posto che ad esempio il coltro e il vomero di un aratro, oltre la pura azione di penetramento nel terreno (*Eindringungswiderstand, Schnittwiderstand*), si troveranno a produrre *col loro tagliente* le medesime azioni di recisione, frantumazione, traslazione, sviamento che il coltello dinamometrico ha nello stesso terreno *col proprio tagliente* effettuato — mentre le svariate e diverse azioni che si esercitano sulle *faccie*, comunque inclinate o profilate o estese, sia dell'attrezzo che dell'istrumento di misura, saranno escluse dal conto.

Solo adunque se in tal modo ottenuto, il valore della tenacità potrà davvero considerarsi quale espressione di una caratteristica del *terreno*, indipendente dalla natura dell'*attrezzo* e dalla forma dell'istrumento adoperato (1), almeno per quanto lo ammette la natura del mezzo che intendesi di definire. E solo allora vi può essere speranza che la cognizione della tenacità possa giovare all'*analisi* delle condizioni di funzionamento degli organi delle macchine operanti nel suolo, e di conseguenza al loro studio razionale e alla discussione comparativa dei risultati conseguiti in luoghi diversi: i numeri ottenuti mediante il coltro o la vanga dinamometrica De Gasparin parvero talvolta utilizzabili — ma fu illusione, come afferma il Ringelmann e come altri molti, prima e dopo di lui, hanno potuto constatare (2).

III.

Come il principio esposto trovi attuazione, è dimostrato dallo schema fig. 2.

Il coltello dinamometrico A è formato di due lame d'acciaio sottili ed affilate, aventi in comune lo spigolo tagliente ed applicate ad un carrel-

(1) Cfr. il precitato studio dell'autore, pp. 5-7.

(2) A proposito dei tentativi del De Gasparin di studiare la dipendenza fra i risultati della vanga dinamometrica e quelli delle prove di trazione del coltro di un aratro, ecc., il Ringelmann nel 1902 scriveva: «... je dois avouer qu'enthousiasmé par cette méthode élégante, je repris les expériences tant à Grand-Jouan qu'à Grignon et il n'y a pas lieu de m'étendre ici sur les résultats malheureux de ces recherches: dans les conditions les plus favorables, j'obtenais avec la bèche dynamométrique des chiffres variant dans le rapport de 1 à 2 ou à 3, et il était impossible de les relier aux tractions relevées par le dynamomètre enregistreur » (*Rapport sur les essais de Plessis*, pp. 92-93). In conclusione, il prof. Ringelmann finì col limitarsi, nelle prove di aratri, al solo rilievo del peso specifico del terreno, pure riconoscendone l'insufficienza ed affermando la necessità di studiare razionali procedimenti per la determinazione delle numerose caratteristiche fisiche del terreno che interessano il lavoro delle macchine agrarie.

lino B in modo tale che siano libere di compiere un piccolo movimento angolare relativo: il movimento loro concesso è però solo quello consentito dalla insensibile deformazione della *capsula dinamometrica* C [1] interposta a mezzo di opportune braccia fra le due lame, che in tal guisa possono disporsi a formare tra loro un angolo acuto quanto si vuole [2]. Le azioni che si esercitano sulle faccie del cuneo, trasmesse alla capsula dinamometrica, sono indicate o registrate dal manometro D.

Si determina, con due serie di letture o due diagrammi, lo sforzo *netto* di trazione P del coltro operante un taglio verticale della voluta profondità h;

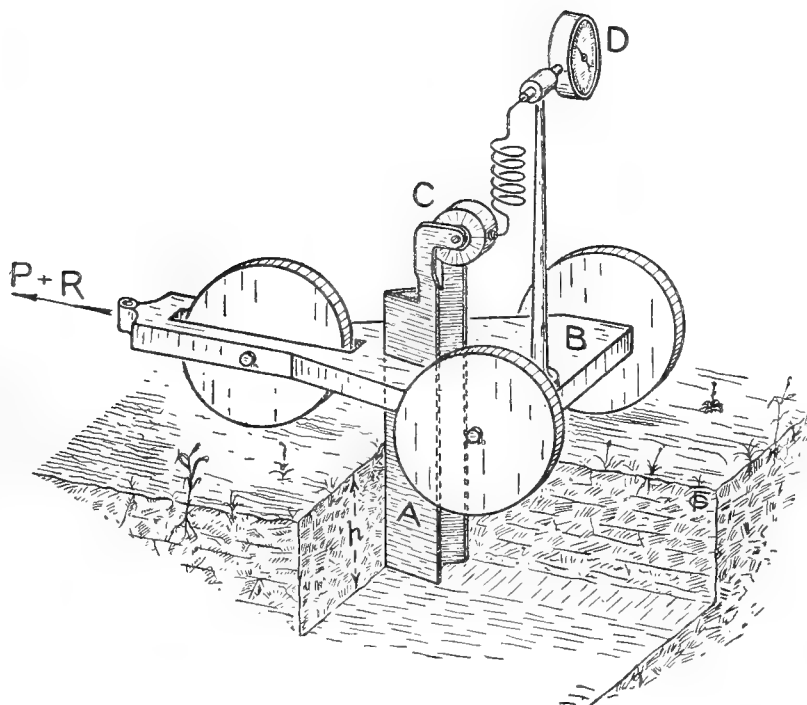



Fig. 2.

contemporaneamente si nota lo sforzo Q sulla capsula dinamometrica [3]: i

[1] F. Giordano, *Le ricerche sperimentali di Meccanica agraria* (Milano, 1906), pag. 132 - e particolarmente la comunicazione fatta al II Congresso internazionale di meccanica agraria (Vienna, maggio 1907) su *Einige neue Dynamometer besonders angewandt an das Studium der landw. Maschinen.*

[2] Anche sino ai valori che i pratici ordinariamente adottano negli aratri: $10° \div 14°$ per i coltri, $8° \div 15°$ per i vomeri (Lázár).

[3] Il coltello dinamometrico, anzichè ad uno speciale carrellino, si applica convenientemente ad un *carro dinamometrico*: chi scrive ha costruito uno di codesti carri che, essendo provveduto di manometro registratore (perchè vi è applicato il dinamometro a liquido, in rapporto alle vedute esposte al II Congresso internazionale di meccanica agraria), si presta particolarmente allo speciale uso. E cioè lo stesso carro è successivamente adoperato per il saggio del terreno e per la prova dinamometrica della macchina agraria: nel primo periodo, su uno stesso diagramma si possono avere le curve dei valori P e Q in ogni istante corrispondenti, il che permette di meglio chiarirne le eventuali singolarità.

corrispondenti sforzi per unità di lunghezza del taglio $\frac{P}{h}$ e $\frac{Q}{h}$, la *tenacità* τ riferita alla stessa unità di lunghezza, il coefficiente f di attrito e adesione, la pressione p che il terreno esercita per unità di superficie sulle lame che vi si internano, l'angolo α del tagliente, la larghezza a delle lame ed il braccio c della reazione Q opposta dalla capsula — sono legate da una equazione la quale naturalmente dipende dal disegno e dal modo di attacco dello speciale coltello. Può ad esempio essere una delle lame fissata al carrello e l'altra articolata con essa a mezzo di lastra sottile, flessibile e tuttavia atta a resistere anche allo sforzo che vi inducono le azioni nel piano della lama (attrito e adesione); oppure possono le due lame F G essere applicate a un dipresso come allo *schema* fig. 3: spinte cioè entrambe da una

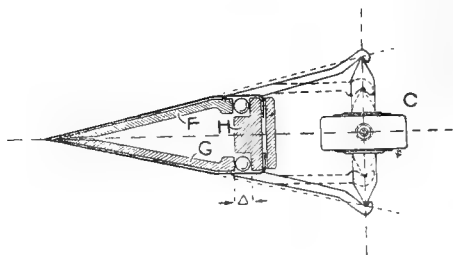
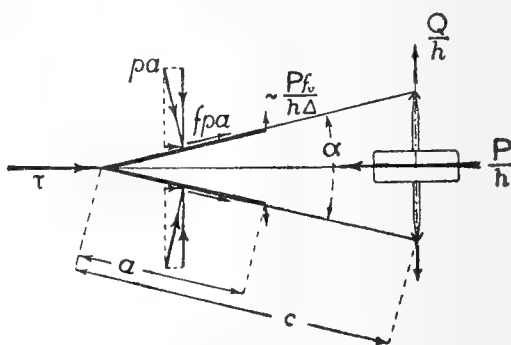



Fig. 3. Fig. 4.

rigida traversa posteriore H che vi appoggia con l'intermediario di due serie di sferette d'acciaio; ecc. Considerando questo secondo caso per fissare le idee, e designato con Δ il diametro delle sferette, con f_v il coefficiente d'attrito volvente che loro corrisponde, si ha (v. fig. 4):

$$\frac{P}{h} = \frac{2}{h}\left(Q\,\frac{c}{a} + P\,\frac{f_v}{\Delta}\right)[\operatorname{sen}\alpha + f(1+\cos\alpha)] + \tau, \tag{1}$$

d'onde, determinato f con ben noti procedimenti, si ricava il valore della *tenacità* τ.

O meglio — costruito il coltello in guisa da poter mutare α in un diverso angolo α' (come è facilissimo) [1], e ripetute le osservazioni ottenendo, in luogo di P e Q, i valori P′ e Q′ — si stabilirà fra queste nuove grandezzze, ritenute le altre costanti, un'equazione analoga alla (1), che, con essa com-

[1] Su gli accorgimenti costruttivi escogitati per variare l'angolo α, per irrigidire in basso le lame, per rinnovare facilmente le parti logorabili o affilare il taglio, per impedire al materiale terroso l'accesso fra le parti che devono conservare immutata la mobilità, ecc., si riferirà in altra Nota, insieme ai risultati di ordinate prove che saranno intraprese con l'ideato istrumento.

binata, permetterà di calcolare

$$(2)\quad f=\frac{\mathrm{P}-\mathrm{P}'-\frac{2c}{a}(\mathrm{Q}\,\mathrm{sen}\,\alpha-\mathrm{Q}'\,\mathrm{sen}\,\alpha')-\frac{2f_v}{\Delta}(\mathrm{P}\,\mathrm{sen}\,\alpha-\mathrm{P}'\,\mathrm{sen}\,\alpha')}{\frac{2c}{a}[\mathrm{Q}(1+\cos\alpha)-\mathrm{Q}'(1+\cos\alpha')]+\frac{2f_v}{\Delta}[\mathrm{P}(1+\cos\alpha)-\mathrm{P}'(1+\cos\alpha')]}$$

e quindi dalla (1) si ricaverà τ, ammesso che τ, almeno fra certi limiti, non dipenda da α.

Se si ha il dubbio che la pressione del terreno non si distribuisca con uniformità *sulla larghezza* delle lame, come nella (1) fu ammesso — o se si hanno altre incertezze — si potranno compiere nuove serie di letture con angoli diversi del tagliente onde stabilire altre equazioni che, in sistema con le precedenti, permettano di calcolare o di verificare le grandezze indeterminate o incerte.

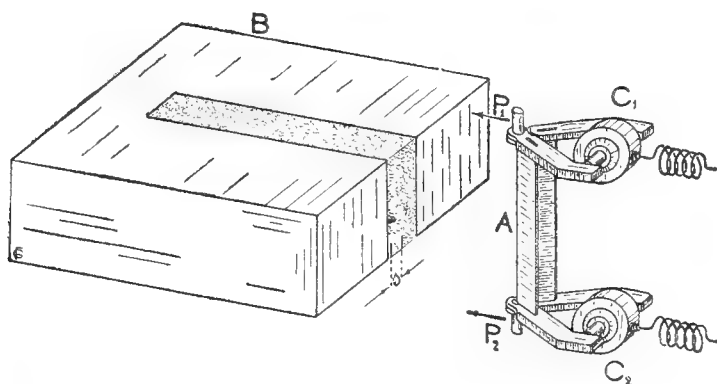



FIG. 5.

Al solito modo, con successivi e diversi approfondamenti del coltro, si potrà rilevare, se del caso, il modo di variare di f e di τ con la profondità. Ed a controllo o a migliore studio di quelle caratteristiche, si potrà anche determinare la posizione della risultante delle resistenze opposte dal terreno, con l'applicare il coltro ad un sistema oscillante trattenuto da apposito dinamometro, secondo il principio dell'ing. Paolo Ceresa-Costa, attuato anni sono dall'Ufficio tecnico della Federazione italiana dei Consorzi agrari [1]: per ragioni evidenti sarà tuttavia opportuna anche qui la sostituzione di una capsula dinamometrica al dinamometro a molla.

IV.

Appare di qui tutto un campo nuovo di studi, ma converrà anzitutto procedere, come si ha in animo di fare, a sistematiche indagini di laboratorio. Lo strumento adatto, poco diverso di quello proponibile per il pratico uso, risulta schematicamente dalla fig. 5: il coltro A, con due capsule dinamome-

(1) Dott. G. C. Pampari, *Lo studio dell'aratro*, Piacenza, 1906, per cura della Federazione italiana dei Consorzi agrari.

triche C_1 C_2 per maggior delicatezza della misura, può agire su impasti omogenei o terre compresse nella cassetta B, munita di fenditura senza o con schermi scorrevoli per trattenere il materiale finchè non vi penetra il coltro. Qui sarà facile determinare direttamente il valore dello sforzo specifico p necessario a comprimere il materiale per uno spessore s uguale a metà di quello del coltro; e sarà facile anche di constatare con esploratori di pressione [1] la distanza sino alla quale per effetto del taglio il materiale si addensa, così da poter assegnare alla cassetta B una sufficiente dimensione trasversale. — Per la più completa analisi dei fenomeni, potrà risultare conveniente, in laboratorio, la non difficile costruzione di un coltello provveduto di un maggior numero di capsule, allo scopo di determinare direttamente gli sforzi di attrito e di adesione sulle lame o altri elementi. Si dovrà rilevare l'effetto di una stretta e sottilissima lama anteposta al tagliente del cuneo — nonchè l'effetto del prolungamento posteriore delle lame secondo piani paralleli, come si ha in certi coltri di aratro, nei vomeri e nelle vanghe; ecc., ecc.

Ricerche tutte che si spera possano recar qualche luce sulla natura e sulle leggi di variazione della cosidetta *tenacità* delle terre, sui fenomeni che accompagnano la penetrazione nei diversi terreni di molti organi delle macchine agrarie — i quali a lor volta ed a scopo di studio potrebbero anche essere costruiti in modo da permettere, come pel coltro, la inserzione di capsule dinamometriche, così da arrivare al diretto studio analitico dei vomeri di aratri, delle vangheggie di estirpatori o coltivatori o scarificatori, degli assolcatori di seminatrici, ecc., ecc.

È evidente poi la possibilità di estendere il procedimento ai campi di varie tecnologie — in particolare, superando qualche maggiore difficoltà d'attuazione, a quella della lavorazione dei metalli. Ed infine non v'ha dubbio che gli analoghi accorgimenti sperimentali, aggiungendosi ai noti artifizi immaginati per constatare il modo e la misura delle deformazioni, gioveranno a confermare e completare le acute indagini dei matematici in ordine alle azioni di contatto, di penetramento, ecc., insufficientemente seguìte o sussidiate fin qui dalle riprove o dalle dimostrazioni sperimentali.

[1] V. per es. il già citato volume su *Le ricerche sperimentali di Meccanica agraria*, pag. 134.

Fisica. — *Sulle forze quasi-elastiche dovute ai movimenti browniani.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. L'applicazione delle teorie cinetiche-statistiche alla spiegazione dei movimenti browniani e delle proprietà delle soluzioni colloidali ha raggiunto la sua completa efficacia negli sviluppi teorici di Einstein e nelle brillanti ricerche di Perrin, che tanto interesse hanno giustamente destato tra i fisici.

La teoria di Einstein, nella duplice forma in cui egli la espose sugli Annalen der Physik [1], costituisce un vero modello di eleganza e di rigore. Ma per la trattazione di alcune questioni già da lui risolute, come pure di altre nuove e di qualche interesse, mi è sembrato utile partire da un punto di vista diverso e che ne permette uno svolgimento più semplice, e più elementare.

2. Il punto di partenza delle mie deduzioni è il seguente.

Le teorie cinetiche-statistiche impongono alle molecole d'un gas, o a quelle della sostanza disciolta, o ai granuli sospesi in una soluzione colloidale *sottratti ad ogni forza esterna*, la suprema regolarità nel supremo disordine; e così nella distribuzione delle particelle, come nella loro orientazione, nessun punto o nessuna direzione può essere privilegiata.

Sotto l'azione d'una forza esterna, agente su ciascuna particella, si produrrà invece una limitata variazione di concentrazione da punto a punto, che cesserà al cessare della forza; l'agitazione termica può perciò considerarsi come l'origine d'una forza antagonista o pseudo-elastica, che impedisce alle particelle di obbedire completamente alle forze esterne; e perciò così come in virtù delle forze elastiche si destano delle reazioni contro le deformazioni, per effetto dell'agitazione termica prendono origine delle pseudo-forze che si oppongono alle variazioni di concentrazione e che dipendono da queste.

È facile trovare l'espressione analitica di queste forze quasi-elastiche in funzione delle variazioni di concentrazione da cui prendono origine. Basta riferirsi a un caso particolare, per esempio ad una forza qualsiasi cui siano sottoposte le molecole d'un gas. Se ciascuna molecola di un elemento di volume d'un gas avente la sezione ds e lo spessore $d\alpha$ è sottoposta ad una forza Π nel senso $d\alpha$, la forza complessiva sarà

$$\Pi \,.\, ds \,.\, d\alpha \,.\, \mathrm{C}\,.$$

ove C indica la concentrazione delle molecole, cioè il numero di molecole

[1] Ann. d. Phys. *17*, pag. 249, 1905; *19*, pag. 371, 1906.

nell' unità di volume. L'elemento di volume è in equilibrio sotto l'azione di quella forza e della differenza $dp \, . \, ds$ delle pressioni totali sulle due basi; si ha perciò:

$$C \, . \, \Pi \, . \, ds \, . \, d\alpha = dp \, . \, ds \, .$$

Ma se l'elemento di volume ha la temperatura T e la pressione p, sarà

$$C = \frac{Np}{RT} \, ,$$

ove N è la costante di Avogadro ed R la costante dell'equazione

$$pv = RT \tag{1}$$

riferite entrambe all' unità di volume o al volume d' un grammo molecola.

E poichè

$$\frac{dp}{p} = \frac{dc}{c} \tag{2}$$

sarà

$$\Pi = \frac{RT}{N} \frac{d(\log C)}{d\alpha} \, .$$

Indicando con F la reazione quasi-elastica nel senso $d\alpha$ dovuta all'agitazione termica e al fatto che la concentrazione C varia con α, avremo perciò

$$F = - \Pi = - \frac{RT}{N} \frac{d \log C}{d\alpha} \, . \tag{3}$$

Questa formola, per il presupposto fondamentale delle teorie cinetiche e pel principio della equipartizione dell'energia, vale anche nel caso delle soluzioni ordinarie e di quelle colloidali.

Se la forza esterna Π, cui è contrapposta, per l'equilibrio, la forza quasi-elastica F, deriva da un potenziale Φ:

$$\Pi = - \frac{d\Phi}{d\alpha} \, ;$$

la formola (3) diviene

$$C = A e^{-\frac{N}{RT} \Phi} \, ,$$

ove A è una costante; si ha così una delle formole fondamentali di Einstein. E se il potenziale Φ è quello dovuto alla gravità, si ottiene la legge di ripartizione dei granuli alle diverse altezze verificata con le esperienze di Perrin, che hanno così permesso una delle più sicure determinazioni della costante N.

3. *Coefficiente di diffusione.* — Se in una soluzione esiste, indipendentemente dalla gravità, una variazione della concentrazione C, positiva nel senso α, le particelle migreranno nel senso delle α decrescenti; e il numero di particelle che nel tempo dt traversa uno strato S normale ad α è dato da

$$- \mathrm{D} \frac{d\mathrm{C}}{d\alpha} dt \,.\, \mathrm{S} ,$$

ove D è il coefficiente di diffusione.

Per calcolarlo si osservi che ogni particella è sottoposta alla forza F data dalla (3) e che subisce da parte del mezzo una resistenza di attrito proporzionale alla velocità v, con un coefficiente di proporzionalità r calcolabile in base alla formola di Stokes:

$$r = 6\pi k a \,, \tag{4}$$

nella quale k è la viscosità del liquido, e a il raggio delle particelle supposte sferiche.

Si ha perciò

$$\mathrm{F} = rv \,.$$

Ma il numero di particelle che traversano con la velocità v lo strato S nel tempo dt è $\mathrm{CS}v\,dt$; quindi

$$\mathrm{CS} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}} dt = - \mathrm{D} \frac{d\mathrm{C}}{d\alpha} \mathrm{S}\, dt$$

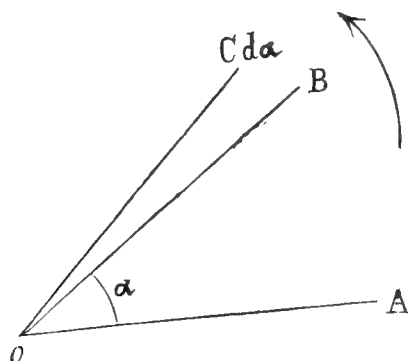
e tenendo conto delle (3) e (4),

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{N}} \frac{1}{6\pi k a} \,.$$

È questa un'altra formola importante dovuta ad Einstein.

4. *Tempo occorrente per la cessazione della birifrangenza magnetica dopo il cessare del campo.* — La grandezza α che figura nella (3) può rappresentare un parametro qualsiasi che caratterizzi un punto o una direzione intorno alla quale l'agitazione termica tenda a stabilire la uniformità.

Così se le particelle hanno un'asse che un campo magnetico esterno tenda a disporre parallelamente a se stesso, e si indica con $\mathrm{C}d\alpha$ il numero di particelle il cui asse è orientato in modo da formare con la direzione del campo un angolo compreso tra α e $\alpha + d\alpha$, C si potrà ancora interpretare come la concentrazione relativa al valore α del parametro, ed F, misurato dalla (3), come il momento della reazione quasi-elastica prodotta dai movimenti browniani su ciascuna particella.

Se adesso il campo cessa istantaneamente d'agire, le particelle, sotto l'azione delle forze F, tenderanno a riprendere l' uniformità della distribuzione.

L'accrescimento del numero di particelle la cui orientazione è compresa nell'angolo $d\alpha = \mathrm{COB}$ sarà nel tempo dt

$$\frac{\partial C}{\partial t}\, dt\, d\alpha\,,$$

d'altra parte se F è il momento della forza motrice, e r il coefficiente di attrito contro i moti di rotazione, il numero delle particelle la cui orientazione traversa OB nel senso della freccia è

$$\frac{F_\alpha C_\alpha}{r}\, dt$$

mentre ne passano nello stesso senso per OC

$$\frac{F_{\alpha+d\alpha}\, C_{\alpha+d\alpha}}{r}\, dt\,.$$

Si ha perciò ponendo

$$h = \frac{RT}{rN}\,,$$

la nota equazione della propagazione del calore o della diffusione

$$\frac{\partial C}{\partial t} = h\, \frac{\partial^2 C}{\partial \alpha^2}\,, \tag{6}$$

con la condizione che per $t = 0$ la concentrazione è determinata in funzione di α dal modo di azione del campo.

La legge relativa di distribuzione

$$C_0 = C_0(\alpha)$$

si può dedurre perciò dalla (3) conoscendo la forza orientatrice del campo H. Se questa è proporzionale a sen α, sarà

$$\frac{\partial \log C_0}{\partial \alpha} = A \operatorname{sen} \alpha ,$$

e

$$\log \frac{C_0}{B} = - A \cos \alpha ,$$

ove B è la concentrazione relativa all'angolo $\frac{\pi}{2}$.

Ora l'orientazione è ben lungi dall'essere completa, poichè ci troviamo assai lontani dalla birifrangenza massima raggiungibile con valori illimitati del campo, e perciò $\frac{C_0}{B}$ è poco diverso da 1.

Poniamo

$$\frac{C_0}{B} = 1 + m .$$

Sarà

$$\log \frac{C_0}{B} = m = \frac{C_0}{B} - 1 ,$$

e quindi

$$\frac{C_0}{B} = 1 - A \cos \alpha ,$$

$$C_0 = B\left[1 - A \cos \alpha\right] .$$

Resta da risolvere la (6) data questa forma di C per $t = 0$. Ora poichè questa è immediatamente scomposta in serie di Fourier, la soluzione della (6) è data immediatamente [1] da

$$C = B\left[1 - A \cos \alpha \, e^{-ht}\right]$$

con

$$h = \frac{RT}{rN} ;$$

e poichè, per i moti di rotazione il coefficiente d'attrito ϱ è dato da

$$\varrho = 8\pi k a^3 ,$$

ove k è la viscosità del liquido e a il raggio della particella *supposta sferica*, sarà

$$h = \frac{RT}{N} \frac{1}{8\pi k a^3} .$$

[1] V. Poincarè, *Propagation de la Chaleur*, pag. 83.

Ma dai valori delle costanti contenute in questa formola, come anche dalle misure dirette di Perrin sui moti browniani di rotazione, risulta che qualora si esprima a in micron, si ha

$$h = \frac{1,5}{a^3}.$$

Adunque sotto l'azione dei movimenti termici le particelle tenderanno alla orientazione normale con legge esponenziale nel tempo; e la birifrangenza sarà sparita a meno, per es. di $\frac{1}{e^5} = \frac{1}{150}$, quando sia

$$ht = 5.$$

Cosicchè se le particelle avessero le dimensioni di 0,2 micron si richiederebbe un tempo

$$t = \text{circa } \frac{1}{40} \text{ di secondo.}$$

Un tempo ancora maggiore si richiederebbe se le particelle, come è ben probabile, hanno una forma non sferica. Ora, come risulta da recenti mie esperienze, la birifrangenza magnetica sparisce dopo un tempo inferiore a $\frac{1}{20.000}$ di secondo, anche con i granuli più grossi a birifrangenza positiva, presi al fondo dslla bottiglia contenente il ferro Bravais, che i sigg. Cotton e Mouton stimano di dimensioni microscopiche, cioè dell'ordine della lunghezza d'onda della luce visibile. Possiamo dunque concludere che: o le particelle, anche le positive, sono incomparabilmente più piccole (quasi al limite della visibilità ultramicroscopica) ovvero che oltre alla forza quasi elastica dovuta ai movimenti browniani interviene qualche altra forza disorientatrice, per esempio una forza mutua tra le particelle, considerate come magnetini permanenti.

Siamo così riusciti a precisare quantitativamente la portata dell'idea emessa da Cotton e Mouton per la quale nei movimenti browniani risiederebbe la forza antagonista contro la tendenza orientatrice del campo che è causa del fenomeno Majorana.

5. Per non incorrere in falsi apprezzamenti sugli effetti reali delle pseudoforze create dalle variazioni di concentrazione, è necessario precisare il meccanismo vero con cui si opera nel mezzo l'eguagliamento delle concentrazioni al cessare della causa che ha prodotto la perturbazione.

Supponiamo che due recipienti A e B, comunicanti attraverso un cannello sottile, contengano due soluzioni con concentrazioni diverse, maggiore per esempio in A.

Malgrado la diversa concentrazione *ciascuna* particella, tanto di A quanto di B, ha esattamente la medesima probabilità di passare nell'altro recipiente; le concentrazioni finiscono col divenire eguali, solo perchè sono in maggior numero le particelle che da A possono migrare verso B, pur avendo *ciascuna* presa in A o in B, la medesima tendenza a migrare rispettivamente verso B o verso A.

Lo stesso vale per le differenze esistenti in un medesimo recipiente. Ciascuna particella conserva, qualunque sia la concentrazione nel posto ove si trova, una assoluta indifferenza a migrare in tutti i sensi, come se le altre non esistessero; e al cessare della causa che ha prodotto le variazioni di concentrazione l'eguaglianza si ristabilisce con un meccanismo analogo a quello dianzi esaminato.

La media dei quadrati delle migrazioni d'una stessa particella in tempi eguali successivi, o di molte particelle nel medesimo tempo, non dipende perciò dalla concentrazione; ma solo dalla temperatura, e dalla viscosità del mezzo, secondo la nota formola semplicissima che l'Einstein ebbe il merito di stabilire e che Perrin potè verificare con le sue brillanti esperienze.

Ciò non toglie che la nozione fittizia delle reazioni quasi-elastiche esercitantisi su ogni particella, come effetto delle variazioni di concentrazione da punto a punto, possa rendere, come abbiamo visto e come si potrebbe vedere con altri esempî, utili servigi.

Chimica. — *Eteri fosforici di alcuni alcooli polivalenti e di alcuni idrati di carbonio* [1]. Nota di Angelo Contardi, presentata dal Socio G. Körner.

In una Nota [2] precedente mi ero occupato della sintesi dell'acido fosfoorganico contenuto nei semi delle piante, ed in altra occasione [3] avevo accennato che, con ogni probabilità, la sintesi vegetale di questo acido non era dovuta ad altro che alla diretta eterificazione dell'inosite preformata coi fosfati acidi trasportati nelle foglie e nelle parti verdi delle piante dalla corrente ascensionale, eterificazione che si compiva sotto l'azione dei cloroplasti.

Ammessa tale ipotesi, ne nascerebbe allora come logica conseguenza che nelle piante, dove al posto dell'inosite ordinaria troviamo invece i suoi

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della R. Scuola superiore di Agricoltura di Milano.

[2] Angelo Contardi, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIX serie 5ª, 1° semestre fasc. I, pag. 23.

[3] Angelo Contardi, Rivista mensile di Sc. Nat. « Natura », vol. I, pag. 100.

isomeri, per es. la quercina o cocosite, oppure in quelle dove al posto dell'inosite si riscontrano altri alcooli a catena chiusa, come la quercite, ecc. od alcooli a catena aperta come la mannite, anche gli acidi fosfoorganici corrispondenti, se esistono, debbano contenere come nucleo organico preformato rispettivamente la cocosite, la quercite, la mannite. Mi ero ancora prefisso come fine alle mie ricerche, di chiarire un dubbio che mi era nato; che cioè le sostanze le quali hanno la stessa composizione chimica centesimale della inosite ed isomeri, ma configurazione molecolare differente, come per esempio il glucosio ed i suoi isomeri, nell'atto dell'eterificazione coll'acido fosforico dovessero mutare la loro struttura molecolare per trasformarsi in composti a catena chiusa più stabili, e dessero luogo alla formazione di derivati del tipo dell'inosite. Oppure, ammettendo che l'eterificazione non producesse alterazioni profonde nella loro struttura molecolare, come infatti dimostrano gli esperimenti che descriverò in seguito, io mi son prefisso di constatare se la saponificazione di questi derivati fosforici operate dagli enzimi non rigenerasse più gli zuccheri o gli alcooli dai quali si era partiti, ma si arrivasse invece ai composti a catena chiusa più sopra ricordati.

Mi accinsi perciò a preparare per sintesi alcuni derivati fosforici di alcooli polivalenti e di idrati di carbonio, affinchè, una volta conosciuti nelle loro proprietà fisiche e chimiche, mi riuscisse più facile, in seguito, l'estrazione di detti prodotti dai vegetali che eventualmente li contenevano, ed il loro riconoscimento.

Fin dall'anno 1896 il Berthelot e l'André [1] avevano sottoposto all'azione degli acidi minerali più o meno diluiti, ed in speciale riguardo a quella dell'acido fosforico, alcuni idrati di carbonio, glucosio, levulosio, galattosio, maltosio; e diressero le loro esperienze allo scopo di studiare non già i prodotti che questi acidi minerali potessero eventualmente formare cogli zuccheri stessi, ma invece rivolsero la loro attenzione ai prodotti che derivano dalla scomposizione degli zuccheri, e trovarono, accanto allo zucchero inalterato, in maggiore e minor quantità, a seconda delle condizioni fisiche in cui era condotta l'esperienza, anidride carbonica, protossido di carbonio, acido umico, acido formico, acido levulinico, furfurolo ed acqua.

Io sottoposi all'azione dell'acido fosforico concentrato successivamente la mannite, la quercite, il glucosio e l'amido, e, poco curandomi dei prodotti di decomposizione profonda della molecola organica, rivolsi piuttosto i miei sforzi a studiare i prodotti di reazione tra la molecola inalterata dalle sostanza organica e l'acido fosforico.

Mannite ed acido fosforico. — L'eterificazione della mannite venne eseguita nello stesso modo da me adottato precedentemente per la sintesi dell'acido fosfoorganico dei semi delle piante.

[1] Comptes Rendus 1896, 123, pag. 567.

Grammi 25 di mannite, secca, venivano scaldati a bagno di olio alla temperatura di 120-130° (temperatura interna) per circa 10 ore con 120 grammi di acido fosforico della densità 1,7. Quando la temperatura sale a 120° si nota uno sviluppo piuttosto abbondante di vapor d'acqua. Raccolto il liquido distillato, si riscontra in esso la presenza del furfurolo, dalle reazioni caratteristiche. Terminato il riscaldamento, diluito il liquido bruno, sciropposo con acqua distillata, filtrato, lavate accuratamente le sostanze nere, pulverulenti rimaste sul filtro, simili nell'aspetto e nelle proprietà agli acidi umici, il liquido venne portato all'ebullizione e decolorato con nero animale A bagno maria si aggiunge poi poco a poco carbonato di bario di recente precipitato fintanto che cessa lo svolgimento di anidride carbonica. Si raccoglie il precipitato su filtro, si lava con acqua bollente, indi si scioglie nella minor quantità possibile di acido cloridrico diluito (1:2) si filtra, se è necessario, indi alla soluzione acida si aggiunge alcool assoluto. Il precipitato, raccolto su filtro, si lava fino a che l'alcool che filtra non ha più reazione acida, indi il precipitato vien fatto bollire con acqua distillata, per eliminare il cloruro di bario; raccolto nuovamente su filtro e lavato finchè le acque filtrate non dànno più la reazione dell'acido cloridrico. Si ripete una seconda volta il trattamento con acido cloridrico, la precipitazione con alcool, il lavaggio con acqua bollente ed allora il prodotto risultante può considerarsi come assolutamente puro.

La polvere bianca così ottenuta, insolubile nell'acqua, poco solubile nell'acido acetico, solubilissima nell'acido cloridrico diluito e nel nitrico, dopo essicamento a 110° venne sottoposta all'analisi.

Gr. 2,0332 di sostanza secca a 110° diedero, calcinati a peso costante gr. 1,8672 di residuo, le ceneri cioè sono il 91,8 per cento.

Il residuo sciolto in acido cloridrico diluito e trattato con acido solforico diede gr. 1,914 di solfato di bario che corrisponde a 55,34 per cento di bario. Il calcolato teorico per il sale neutro di bario dell'etere esafosforico della mannite sarebbe 55,23 per cento.

Gr. 2,210 trattati con acido nitrico concentrato a bagno maria, ripreso con acido nitrico, diluito il residuo, eliminato il bario mediante l'acido solforico, diedero col reattivo triplo gr. 1,001 di pirofosfato di magnesio cioè 12,6 per cento di fosforo. Il calcolato teorico sarebbe 12,61.

Se si scioglie il sale il sale di bario così ottenuto nella minor quantità possibile di acido cloridrico diluito, ed alla soluzione cloridrica si aggiunge la quantità calcolata di acido solforico mezzo normale, si filtra e si evapora nel vuoto il liquido risultante indi lo sciroppo, pure nel vuoto, si essica di nuovo su potassa, si ottiene un liquido denso, igroscopico, quasi incoloro, solubilissimo nell'acqua, nell'alcool, nell'acido acetico, è stabile a 100°, e si altera per prolungato riscaldamento a 110-120° dando piccoli fiocchi neri; arroventato bruscamente deposita carbone.

La sua soluzione acquosa non ha azione sulla luce polarizzata.

Lo sciroppo secco a costanza di peso ed analizzato diede:

Sostanza impiegata gr. 0,4002 C_2O = gr. 0,153 H_2O = gr. 0,126

Trovato	Calcolato per $C_6H_{20}O_{24}P_6$
C = 10,42 %	C = 10,89
H = 3,49 %	H = 3,00

Quercite ed acido fosforico. — Se si trattano gr. 16 di quercite con 50 gr. di acido fosforico della densità 1,7 tenendo costanti tutte le altre condizioni più sopra descritte per l'eterificazione della mannite, ed eseguendo nell'identico modo la purificazione dell'etere fosforico risultante, si ottiene una sostanza pulverulenta, leggermente colorata in bruno che, seccata a 100° e sottoposta all'analisi, diede i seguenti risultati:

Gr. 2,009 di sostanza calcinata a costanza di peso diedero gr. 1,830 di residuo fisso: le ceneri sono dunque il 91,09 %. Il residuo sciolto in acido cloridrico diluito trattato quindi con un eccesso di acido solforico diluito diede gr. 1,880 di solfato di bario corrispondente a 55 % di bario; il calcolato teorico per il sale neutro di bario dell'etere pentafosforico della quercite sarebbe 55,36 %.

Determinato l'acido fosforico nel liquido filtrato, dopo ebullizione con acido nitrico concentrato, si ebbero gr. 0,927 di pirofosfato di magnesio cioè 12,32 % di fosforo mentre il calcolato teorico snrebbe 12,49 %.

Eliminato il bario dal sale fosfoorganico sciogliendolo in acido cloridrico diluito e trattando la soluzione che ne risulta colla quantità calcolata necessaria di acido solforico mezzo normale, ed evaporato nel vuoto il liquido, si ottiene come residuo uno sciroppo denso leggermente paglierino simile in tutto a quello descritto più sopra per la mannite. Anche questo in soluzione non agisce sul piano della luce polarizzata.

Secco a costanza di peso e sottoposto all'analisi diede:

Gr. 0,388 diedero gr. 0,1749 di CO_2 e gr. 0,1178 di H_2O cioè:

Trovato	Calcolato per $C_6H_{17}O_{20}P_5$
C = 12,3 %	C = 12,76 %
H = 3,4 %	H = 3,01 %

Glucosio ed acido fosforico. — Grammi 25 di glucosio vennero scaldati con 120 grammi di acido fosforico del peso specifico 1,7 a temperatura di 120° per 10 ore, indi venne ripetuto lo stesso identico trattamento seguìto per la mannite e per la quercite. Si ebbe così il sale di bario di un etere fosforico del glucosio; va solo notato che la quantità di sostanze umiche è in questo caso un po' maggiore. Esso si presenta sotto forma di una polvere bianca se appena preparato, di color paglierino se viene essicata a 100° o rimane molto tempo nell'aria, è solubilissimo negli acidi, diluiti, clo-

ridrico e nitrico, pochissimo nell'acido acetico, praticamente insolubile nell'acqua.

Gr. 2,641 di sostanza secca, arroventati a costanza di peso lasciarono gr. 2,441 di residuo fisso, cioè le ceneri sono il 92,4 %.

Il solfato di bario ottenuto da queste ceneri pesava gr. 2,288 cioè la sostanza conteneva il 56,58 % di bario. Altre determinazioni di bario eseguite su altri campioni di sostanza diedero rispettivamente 56,30; 56,50; 56,38 di bario per cento.

Dalla parte filtrata dopo la determinazione del bario, trattata dopo ebullizione con acido nitrico, col reattivo triplo si ebbero gr. 1,133 di pirofosfato di magnesio cioè essa conteneva il 12,35 % di fosforo.

Le analisi portano adunque ad ammettere che nell'eterificazione il glucosio assuma sette molecole di acido fosforico anzichè cinque (come era presumibile), ed il gruppo aldeidico si comporti allora come bialcoolico. La quantità calcolata teorica di bario per il sale neutro dell'etere eptafosforico sarebbe del 56,41 % ed il fosforo sarebbe 12,72 %.

Messo in libertà nel solito modo l'acido, esso ha l'aspetto ed il comportamento dei precedenti; non ha azione, in soluzione acquosa, sulla luce polarizzata, non riduce il liquido di Fehling, non precipita colla fenilidrazina in soluzione acetica. Come tutti gli altri non dà la reazione dello Scherer. Sottoposto all'analisi si ebbe:

Sostanza gr. 0,422 diedero gr. 0,1394 di CO_2 e gr. 0,1138 di H_2O.

Trovato	Calcolato per $C_6H_{20}O_{28}P_7$
C = 9,01 %	C = 9,51 %
H = 3,00 %	H = 2,64 %

In una prossima Nota descriverò il comportamento dell'acido fosforico coll'amido e con altri idrati di carbonio.

Chimica. — *Sulla precipitazione del fosfomolibdato ammonico in presenza di acidi organici* (¹). Nota di G. Maderna, presentata dal Socio R. Nasini.

Le condizioni migliori per la precipitazione del fosfomolibdato ammonico furono studiate da diversi autori; tutti sono d'accordo nel sostenere la necessità della presenza nella soluzione di acido nitrico ed ammoniaca (sotto forma di nitrato) in ben determinate proporzioni, perchè si possa avere una precipitazione completa, ma non tutti sono d'accordo circa l'influenza delle sostanze organiche e più precisamente dei varî acidi organici sopra la pre-

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica tecnologica del R. Ist. Tecnico Sup. di Milano.

cipitazione stessa. Così mentre Hundeshagen [1] sostiene che gli acidi organici monobasici non impediscono la formazione del fosfomolibdato ammonico, quando vi sia la presenza di quantità sufficienti di acido nitrico, e che gli acidi polibasici invece (acido tartarico ed ossalico) nelle medesime condizioni la impediscono completamente, H. von Jüptner [2] oppone che la presenza dell'acido tartarico è utile quando si faccia la precipitazione dell'acido fosforico in presenza di molto ferro (determinazione del fosforo negli acciai), poichè esso impedisce che il precipitato formatosi abbia a contenere, come impurezze, piccole quantità di acido molibdico e di ossido di ferro.

Della medesima opinione dell' Hundeshagen è pure Eggertz [3] il quale sostiene che la presenza di certe sostanze organiche, ad es. l'acido tartarico, impedisce la precipitazione del fosfomolibdato ammonico.

Che la presenza di certe sostanze organiche per lo meno non impedisca la precipitazione del fosfomolibdato ammonico, quando si trovi in soluzione dell'acido nitrico, è dimostrato dal fatto che il giudizio sulla convenienza di una data scoria Thomas per essere impiegata in agricoltura viene, fra l'altro, dato in base ai risultati che si ottengono intaccando la scoria stessa con una soluzione di acido citrico al 2 % [4] in determinate condizioni e precipitando l'acido fosforico, che per mezzo di tale reagente è passato in soluzione, colla solita miscela previo passaggio attraverso il fosfomolibdato ammonico.

Sulla costituzione del fosfato di calcio esistente nelle scorie Thomas non vi è, è vero, nulla di sicuro; tuttavia pare non vi possa essere dubbio sulla costituzione del radicale acido che si suppone sia uguale a quello di qualsiasi altro ortofosfato (PO_4).

Alcuni studî poi assai interessanti di Gernez [5] (sull'applicazione del potere rotatorio allo studio delle combinazioni che si formano per azione di alcuni acidi organici otticamente attivi sul molibdato ammonico) dimostrano chiaramente che si formano in realtà dei composti fra molibdato ammonico ed acidi organici attivi, e logicamente, di conseguenza, con tutti gli acidi organici e forse con molte sostanze organiche che non siano acide.

Ora se si suppone che la precipitazione del fosfomolibdato ammonico possa verificarsi senza la necessità della presenza di acido nitrico libero o di qualsiasi altro acido minerale, e si ammette altresì che il radicale PO_4 non entri a far parte del complesso organico, dagli studî del Gernez appare evidente che per lo meno, poichè più combinazioni si formano fra alcuni acidi organici ed il molibdato ammonico, sarà necessaria la presenza di un

(1) Zeitsch. für analyt. Chem., 28, 163.
(2) Oester. Zeitsch. für Berg. und Hütteniwr, 1894, 471.
(3) Journ. für prakt. Chem. 79, 496.
(4) Ann. d'Agricoltura (metodi ufficiali), 1905.
(5) C. R. 109, pag. 151.

eccesso di molibdato ammonico superiore a quello comunemente usato, perchè questo possa precipitare l'acido fosforico esistente in una soluzione contenente tali acidi organici. Questo eccesso potrebbe essere non necessario in un solo caso, quando cioè le dette combinazioni contenessero il radicale molibdico sotto forma ionogena ed il prodotto di solubilità del fosfomolibdato fosse più piccolo di quello del composto organico fra l'acido ed il molibdato ammonico. Che se poi si ammette che il radicale PO_4 entri realmente a far parte del complesso organico, se si verifica precipitazione bisogna pure ammettere che tale radicale si trovi sotto forma ionogena e come facente parte di un composto a prodotto di solubilità verosimilmente superiore a quello del fosfomolibdato ammonico.

Ora, poichè mancano dati a questo proposito nella letteratura, mi parve interessante occuparmi dell'argomento, incominciando collo studio dell'azione dei varî acidi organici sulla precipitazione del fosfomolibdato ammonico, la quale azione, ad onta delle recise e categoriche affermazioni di Hundeshagen, non appare troppo nota.

Però invece di stabilire dapprima se in presenza di acido nitrico gli acidi organici possano ritardare od impedire la formazione del fosfomolibdato ammonico, basandomi sugli studî di Gernez, nella speranza di poter trovare, fra i varî complessi organici che si formano, almeno uno a costituzione ionogena ed a prodotto di solubilità superiore a quello del fosfomolibdato di ammonio, studiai dapprima la precipitazione dell'acido fosforico in presenza di acidi organici e nitrato ammonico e poi in presenza di soli acidi organici. La presenza di un sale di ammonio che pareva *a priori* necessaria, dati gli studî dell' Hundeshagen in proposito, non si mostrò, pei casi da me studiati, essenzialmente tale; i risultati che si ottengono sono gli stessi, salvo piccole differenze, sia che si operi in presenza di un sale d'ammonio oppure no. Il sale nitrico d'ammonio venne prescelto a preferenza dei corrispondenti organici, per non impiegare quantità eccessive di molibdato d'ammonio, dato anche il fatto che la concentrazione dell' ione nitrico, nelle condizioni nelle quali furono fatte le esperienze, non poteva essere che assai piccola.

Le esperienze vennero compiute seguendo in linea generale quanto il Treadwell consiglia nel suo trattato di chimica analitica quantitativa a proposito della precipitazione dell'acido fosforico col molibdato ammonico.

Le soluzioni di acido fosforico (rispettivamente fosfati) che impiegai nelle esperienze furono due: una di fosfato bisodico (in acqua), l'altra di fosfato bicalcico solubile in citrato ammonico (in acqua coll'aggiunta della minore quantità possibile di acido nitrico perchè il sale si sciogliesse completamente).

Le quantità dei varî organici le scelsi in modo che fosse presente nella soluzione una percentuale di gruppi H acidi tale da corrispondere alla quantità di H nitrici, che in generale si consiglia siano presenti per una preci-

pitazione esatta e migliore del fosfomolibdato ammonico; e ciò per un criterio d'indole generale.

La precipitazione ed il dosamento dell'acido fosforico vennero così operati: a 10 cm^3 della soluzione contenente l'acido fosforico venivano aggiunti 30 cm^3 di acqua (oppure 10 cm^3 di una soluzione contenente 340 grammi per litro di nitrato ammonico e 20 cm^3 di acqua) in modo da avere sempre press'a poco il medesimo volume; quindi si aggiungevano i varî acidi organici nelle rispettive quantità calcolate ed in fine, ad incipiente ebollizione, quantità variabili di molibdato ammonico solido. Appena questo era sciolto ed il precipitato formato, lo si lasciava depositare a freddo, si decantava quindi completamente sopra un filtro il liquido sovrastante, e si lavava per decantazione fino a scomparsa di reazione col ferrocianuro potassico col liquido di lavaggio indicato da Treadwell (1) nel caso di precipitazione in presenza di nitrato ammonico, oppure con sola acqua fredda, quando questo ultimo sale non veniva aggiunto.

I risultati ottenuti sono raccolti nelle tabelle I, II, III, IV: le prime due si riferiscono alla soluzione di fosfato di sodio, in presenza di nitrato d'ammonio o meno; le altre due invece alla soluzione di fosfato di calcio, pure rispettivamente in presenza od assenza di nitrato ammonico.

La soluzione di fosfato di sodio conteneva in 10 cm^3 gr. 0.086 di anidride fosforica, calcolata come pirofosfato di magnesio; la soluzione di fosfato di calcio conteneva invece nello stesso volume gr. 0.0976 di anidride fosforica pure calcolata come pirofosfato di magnesio. I risultati riportati si riferiscono al pirofosfato di magnesio pesato nelle varie determinazioni.

Le quantità impiegate dei varî acidi organici, corrispondenti a 19 cm^3 di acido nitrico al 25 % furono le seguenti: per l'acido succinico gr. 4.20; per l'acido malico gr. 5.05; per l'acido tartarico gr. 5.65; per l'acido ossalico gr. 4.7; per l'acido acetico gr. 4.28; per l'acido citrico g. 5.25; per l'acido benzoico gr. 4.2 (metà della quantità corrispondente); per l'acido salicilico gr. 4.4; per l'acido ftalico gr. 3.1 (metà della quantità corrispondente).

L'acido tartarico impiegato fu il comune acido destrogiro; per l'acido malico fu usata la modificazione levogira.

Tabella I.

	GRAMMI DI MOLIBDATO AMMONICO															
	2	3	4	5	5.5	6	6.5	7	8	9	10	10.5	12	15	18	23
Acido succinico. .	nessuna precipitazione															
» malico . . .	—	0.047	0.077	0.086	—	—	—	0.086	—	0.086	—	—	0.0855	—	—	—
» tartarico . .	0.0136	0.022	0.0436	0.070	—	—	—	0.086	0.0855	0.086	—	—	0.0854	—	—	0.086
» ossalico . .	n. prec.	traccie	traccie	pic. pr.	pic. pr.	—	0.047	0.061	0.0718	—	0.0865	—	0.070	0.067	0.021	0.019
» citrico . . .	traccie	traccie	traccie	pic. pr.	pic. pr.	—	0.012	0.022	0.034	0.064	0.085	0.0155	0.0744	0.051	0.025	0.037
» benzoico . .	nessuna precipitazione															
» salicilico. .																
» ftalico . . .																
» acetico. . .																

(1) 200 gr. di nitrato ammonico e 160 cm^3 di acido nitrico in 4 litri di acqua.

TABELLA II.

	GRAMMI DI MOLIBDATO AMMONICO				
	5	8	10	15	20
Acido succinico. .	. . . nessuna precipitazione . . .				
» malico . . .	0.081	0.082	—	0.0782	—
» tartarico . .	0.070	0.0835	—	0.082	—
» ossalico . .	—	pic. pr.	0.083	—	n. prec.
» citrico . . .	—	pic. pr.	0.060	—	»
» benzoico . .	. . nessuna precipitazione . . .				
» salicilico. .					
» ftalico . . .					
» acetico. . .					

TABELLA III.

	GRAMMI DI MOLIBDATO AMMONICO															
	2	3	4	5	5.5	6	6.5	7	8	9	10	10.5	12	15	18	23
Acido succinico. .	. . . . nessuna precipitazione															
» malico . . .	—	—	0.075	—	—	—	—	—	0.097	—	—	—	—	—	0.097	—
» tartarico . .	0.018	0.028	0.0564	0,0776	0.093	0.097	0.098	—	0.0976	—	0.0976	—	0.0976	—	0.097	—
» ossalico . .	—	—	—	—	0.048	0.056	—	—	—	—	0.097	—	—	n. prec.	—	n. prec.
» citrico . . .	0.003	0.0062	0.0058	0.0058	0.037	0.047	—	0.0664	—	0.096	—	0.090	—	0.064	0.046	—
» benzoico . .	. . . . nessuna precipitazione															
» salicilico. .																
» ftalico . . .																
» acetico. . .																

TABELLA IV.

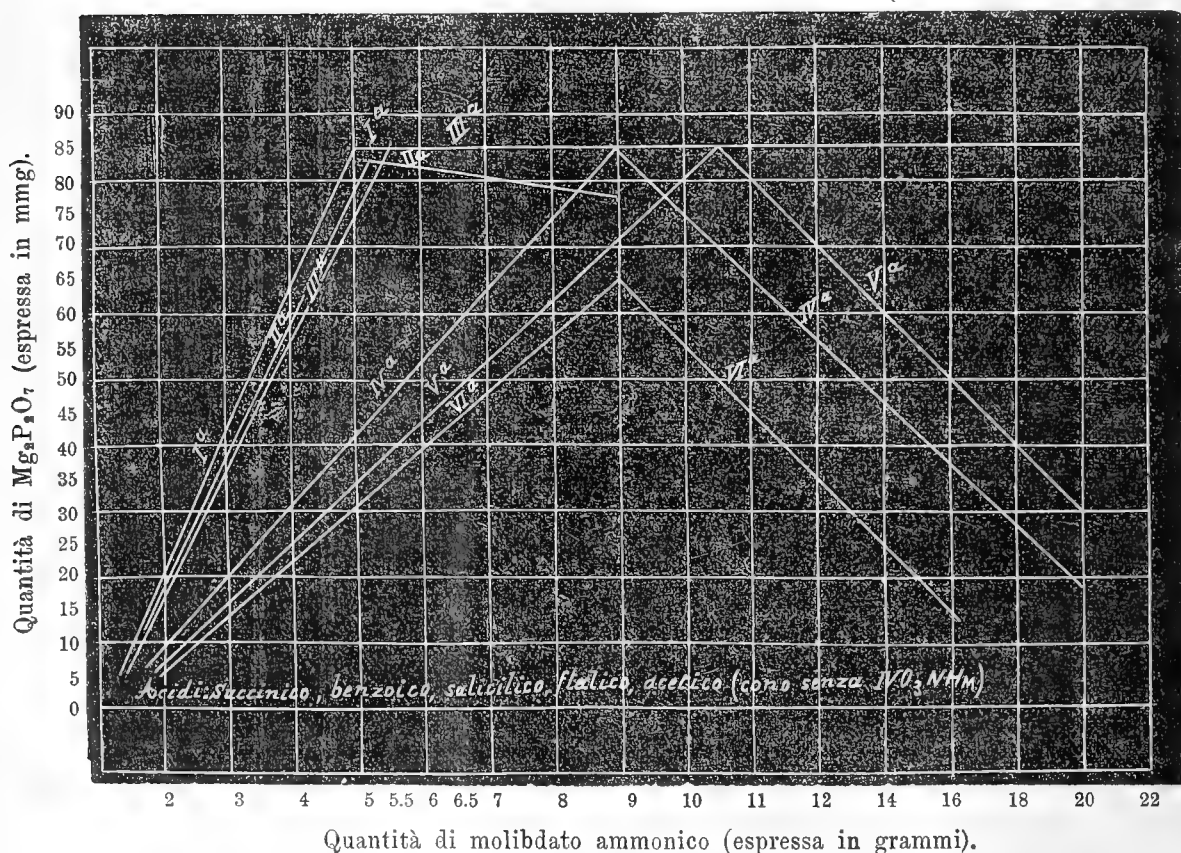
	GRAMMI DI MOLIBDATO AMMONICO				
Acido succinico. .	. . . nessuna precipitazione . . .				
» malico . . .	—	0.090	—	0.080	—
» tartarico . .	precip.	precip.	—	precip.	precip.
» ossalico . .	—	»	—	—	n. prec.
» citrico . . .	—	0.060	0.080	0.040	»
» benzoico . .	. . nessuna precipitazione . . .				
» salicilico. .					
» ftalico . . .					
» acetico. . .					

Se si raggruppano i risultati ottenuti sotto forma di diagramma (le cui ascisse rappresentino le quantità crescenti di molibdato ammonico impiegate, e le cui ordinate indichino le quantità di acido fosforico precipitato coi varî acidi organici in quantità fra di loro proporzionali) si ottengono le seguenti curve:

TABELLA V.

I risultati riportati ed espressi diagrammaticamente dimostrano in modo evidente che la precipitazione dell'acido fosforico per mezzo del molibdato ammonico non solo è possibile, in determinate condizioni, in presenza di

soli acidi organici, ma è anche quantitativa. I risultati un po' inferiori al teorico che si ottengono quando si operi in assenza di nitrato ammonico sono dovuti al fatto della solubilità del fosfomolibdato ammonico (per quanto piccola) in acqua pura; e solo l'acido citrico e più limitatamente l'acido malico mostrano una tendenza ad impedire la formazione del precipitato, anche

I[a] Acido malico (con NO_3NH_4)
II[a] » » (senza NO_3NH_4)
III[a] » tartarico (con e senza NO_3NH_4)
IV[a] » ossalico (con e senza NO_3NH_4)
V[a] » citrico (con NO_3NH_4)
VI[a] » citrico (senza NH_4NO_3)

quando nelle medesime condizioni, in presenza di nitrato ammonico, si abbia una precipitazione completa. Non tutti gli acidi organici però, in qualche caso almeno, permettono la formazione del fosfomolibdato ammonico; e strano a notarsi a questo proposito è il comportamento dell'acido succinico rispetto ai suoi ossiderivati, malico e tartarico, i quali, a differenza del primo, se ritardano la precipitazione non la impediscono, anche per aggiunta di quantità notevoli di molibdato ammonico.

Quando si operi la precipitazione dell'acido fosforico in presenza di acido ossalico e citrico e si impieghi quantità di molibdato superiore ai 10 grammi ed inferiore ai 20 (per la quantità impiegata di acido fosforico) si ottengono

risultati oscillanti, quando non si operi sempre nelle condizioni migliori, vale a dire agitando sempre la soluzione. Ciò è dovuto al fatto che il precipitato una volta formato o non si scioglie affatto (acido nitrico ed anche tartarico) [1] oppure si scioglie con grande difficoltà (acido ossalico) anche operando a caldo, e ciò contrariamente a quanto sostiene Hundeshagen [2], il quale afferma che « gli acidi organici (acido ossalico e tartarico) sciolgono con grande facilità a caldo il precipitato di fosfomolibdato ammonico ». Il fosfomolibdato, che si ottiene in presenza dei varî acidi organici, è completamente esente da sostanze organiche; i varî precipitati ottenuti, lavati semplicemente colla minor quantità possibile di acqua fredda, sottoposti alla combustione, con ossido di rame e in corrente di ossigeno, non portarono aumento alcuno ai tubi di calce sodata, coi quali il tubo a combustione era collegato.

I complessi organici che si formano fra i varî acidi organici da una parte ed il molibdato ammonico dall'altra (unitamente forse al radicale PO_4) sono abbastanza stabili: con un'ebollizione prolungata non si decompongono; si decompongono invece per aggiunta di quantità sufficiente di acido nitrico.

Circa la natura loro nulla *a priori* si può dire, quantunque qualche indizio, in linea generale, si possa avere da quanto ho esposto.

Anzitutto va notato che la base, unita all'acido fosforico, non esercita alcuna influenza sulla formazione o meno del fosfomolibdato. Le curve ed i risultati poi dimostrano chiaramente che almeno un complesso si deve formare fra molibdato ammonico (unitamente forse al radicale PO_4) e gli acidi acetico, succinico, benzoico, salicilico, ftalico. Per quanto riguarda gli acidi malico e tartarico pure almeno un complesso si deve formare a struttura non ionogena, oppure, se avente tale struttura a prodotto di solubilità abbastanza elevato; perchè anzitutto si nota che la quantità di molibdato ammonico che si deve aggiungere ad una soluzione per ottenere una precipitazione completa di una medesima quantità di acido fosforico è quasi doppia, quando si operi la precipitazione in un mezzo acido pei detti acidi, di quello che occorra quando si operi in un mezzo acido per acidi minerali ed essenzialmente per acido nitrico. Ed infatti se a 10 cm^3 della soluzione dei fosfati da me inpiegati si aggiungono nelle condizioni volute ed in presenza di acido nitrico gr. 3.6 di molibdato ammonico, nel filtrato si riscontra ancora una notevole quantità del mezzo precipitante non utilizzato. In secondo luogo poi si nota che il precipitato che si forma (e ci vale per tutti gli acidi) è essenzialmente costituito da fosfomolibdato d'ammonio. Infine fra molibdato d'ammonio (e forse il radicale PO_4) e gli acidi ossalico e citrico, per le stesse ragioni ora addotte almeno due complessi si devono formare.

(1) Si osservano fenomeni di riduzione.
(2) Loc. cit., pag. 164.

I complessi che si formano sono abbastanza stabili e posseggono una spiccata reazione acida. Circa la presenza del radicale PO_4, nei varî complessi organici, nulla *a priori* si può dire in linea generale; ma sopra questo argomento mi riservo di ritornare dopo di aver studiato il comportamento dell'acido arsenico nelle medesime condizioni adottate per l'acido fosforico.

Dati i risultati ai quali sono arrivato impiegando solo acidi organici per la precipitazione del fosfomolibdato ammonico, la risposta alla domanda se le sostanze organiche esercitino una funzione ritardatrice od impeditrice sulla precipitazione stessa, viene ad essere molto semplificata.

Già si capisce *a priori* come alcuni acidi organici non solo non impediscano, ma anzi possano, in determinate condizioni, facilitare, se si può dire, la precipitazione dell'acido fosforico; basterà infatti che l'acido nitrico venga aggiunto in quantità tali da non ridisciogliere il precipitato formatosi perchè la precipitazione stessa non possa avvenire. I risultati ottenuti coll'acido tartarico, in assenza di acido nitrico, confermano pienamente quanto sostiene Jüptner, a proposito della precipitazione dell'acido fosforico in presenza di molto ferro.

Nei casi poi, pei quali i varî acidi organici da soli non permettono la formazione del fosfomolibdato, l'acido nitrico, aggiunto in quantità sufficiente, riesce sempre a produrre la precipitazione, la quale in ogni caso è quantitativa, come dimostrano alcune esperienze fatte in proposito e raccolte nella tabella VI.

La soluzione di fosfato di sodio impiegata in 10 cm^3 conteneva gr. 0.086 di anidride fosforica, calcolata come pirofosfato di magnesio. I risultati si riferiscono tutti a 10 cm^3 di soluzione ed al pirofosfato pesato. Le determinazioni vennero eseguite nel modo seguente: in un bicchiere di piccola capacità si metteva la quantità calcolata dei varî acidi organici e la soluzione del fosfato, quindi 10 cm^3 di una soluzione di nitrato d'ammonio (340 gr. di NH_4NO_3 per litro) e si portava poi il volume a 40 cm^3 circa; ad ebollizione incipiente si aggiungeva il molibdato d'ammonio, e quindi, dopo aver constatato che la soluzione limpida o quasi per qualche tempo, acido nitrico (25 %) fino a tanto che non si aveva più precipitato.

TABELLA VI.

	6	8	10	12
Acido ossalico (gr. 4.7)	—	0.086	—	0.086
Acido citrico (gr. 5.25)	0.0855	0.0862	—	0.0855
Acido acetico (gr. 4.28)	0.085	—	—	0.0855
Glicerina (soluz. 10 %)	0.086	—	0.086	0.086
Saccarosio (soluz. 10 %)	0.086	—	0.0865	—
Acido succinico (gr.)	0.0854	0.086	0.865	—

Concludendo le esperienze riportate dimostrano:

1°) Che, contrariamente a quanto sostiene Hundeshagen e Eggertz, le sostanze organiche ed in ispecial modo gli acidi organici non impediscono

la formazione del fosfomolibdato ammonico in una soluzione, quando questa contenga quantità sufficienti di acido nitrico;

2°) Che una precipitazione quantitativa dell'acido fosforico col molibdato ammonico è possibile anche quando nella soluzione che si assaggia non vi sia dell'acido nitrico, e ciò per sola azione di alcuni acidi organici, purchè esistano determinate proporzioni fra gli acidi organici stessi ed il reattivo precipitante.

3°) Che, contrariamente a quanto sostiene Hundeshagen, l'acido ossalico non scioglie il fosfomolibdato che con grande difficoltà a caldo e quando si impieghino soluzioni molto concentrate; che l'acido tartarico in soluzione diluita non ha alcuna influenza sul precipitato ed in soluzione concentrata non ingenera essenzialmente che fenomeni di riduzione.

4°) Che i composti organici, che si formano fra acido molibdico e forse acido fosforico da una parte ed acidi organici dall'altra sono abbastanza stabili; essi devono essere a costituzione chimica non ionogena in linea generale, o, se lo sono, complessi a prodotto di solubilità superiore a quello del fosfomolibdato ammonico.

5°) Che il radicale base assai probabilmente non esercita influenza alcuna sulla natura e costituzione del complesso organico, perchè sia operando sopra soluzioni di fosfato di sodio che sopra soluzioni di fosfato di calcio si ottengono sempre i medesimi risultati.

Chimica. — *Il sistema ternario rame-antimonio-bismuto.* Nota di N. Parravano e E. Viviani, presentata dal Socio Paternò.

Le leghe ternarie di rame, antimonio e bismuto non sono state finora oggetto di ricerche; sono invece state studiate le leghe binarie di rame-antimonio, rame-bismuto, antimonio-bismuto, che costituiscono i tre sistemi binarî contenuti nel ternario rame, antimonio, bismuto. I diagrammi di stato dei tre sistemi binarî non sono però noti tutti e tre con la precisione che è necessaria per lo studio del sistema ternario, e noi abbiamo dovuto perciò eseguire delle esperienze per completare la conoscenza di essi prima di passare allo studio di questo.

In questa prima Nota incominceremo quindi con l'esporre le esperienze riguardanti i sistemi binarî, per descrivere poi in Note successive quelle sul sistema ternario.

Sistemi binari.

Del sistema rame-bismuto si sono occupati Roland-Gosselin (1), Heycock e Neville (2), e recentemente Jeromin (3), il quale ha stabilito per esso il

(1) Bull. Soc. d'Encoura. [5] *1*, 1310 (1896).
(2) Phil. Trans., *189* A, 25 (1897).
(3) Z. f. An. Ch. *55*, 412 (1907).

diagramma riprodotto nella fig. 1. Il rame si separa primariamente da quasi tutte le leghe. Manca il ramo corrispondente alla separazione primaria del bismuto, e l'eutettico coincide quasi col bismuto puro. Questo sistema si comporta perciò in modo molto semplice e non aveva quindi bisogno di ulteriori ricerche da parte nostra.

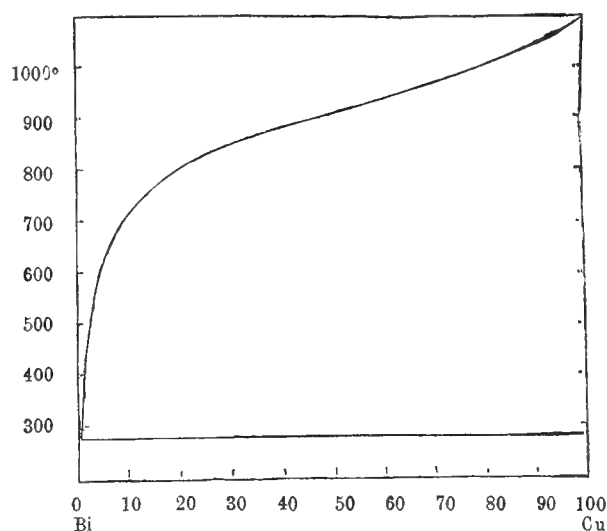



Fig. 1.

Le leghe di antimonio e bismuto sono state studiate da Gautier [1], da Charpy [2], e recentemente da Hüttner e Tammann [3]. Questi ultimi autori hanno stabilito il diagramma che è riprodotto nella fig. 2.

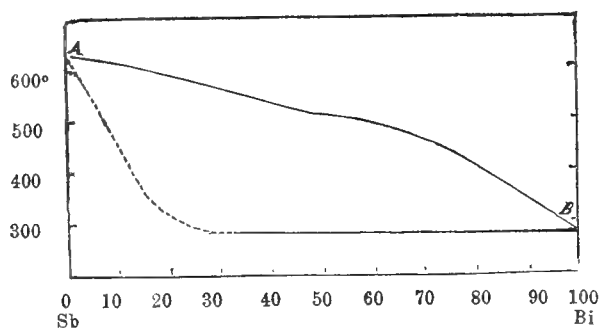



Fig. 2

L'antimonio scioglie il bismuto allo stato solido fino alla proporzione di circa il 30 %, e le leghe contenute in questo campo di concentrazioni solidificano completamente in un intervallo di temperatura. Invece le leghe che contengono più del 30 % di Bi, dopo un intervallo di cristallizzazione, presentano tutte in corrispondenza del punto di fusione del bismuto un arresto, la durata del quale cresce col crescere del contenuto in Bi.

[1] Contrib. à l'étude des alliages. Paris, 1901, pag. 114.
[2] " " " " " " " 138.
[3] Z. f. An. Ch., *44*, 131 (1905).

Il diagramma di H. e T. rappresenta però l'andamento della cristallizzazione nelle condizioni ordinarie di raffreddamento, e quindi non si può dire fino a che punto esso corrisponda a stati veri di equilibrio. Resta ancora a stabilirsi se, in condizioni diverse di raffreddamento, antimonio e bismuto sian capaci di dare una serie continua di cristalli misti. Per decidere questo abbiamo preparate delle leghe con un contenuto di Bi variabile dal 50 all' 80 % e le abbiamo mantenute in un forno elettrico a resistenza di nichel ad una temperatura di circa 330° per un tempo variabile dai cinque ai dieci giorni. Si cercava a questo modo di far compiere la diffu-

Fig. 3.

Fig. 4.

sione del bismuto nei cristalli misti ricchi di antimonio. Le leghe così preparate sono state esaminate al microscopio dopo averle attaccate con una soluzione di cloruro di rame ammoniacale. Esse presentano un aspetto quasi del tutto omogeneo; la diffusione cioè ha avuto modo di compiersi, ed esse son costituite nella quasi totalità della loro massa da una unica soluzione solida.

La fig. 3 rappresenta una lega all' 80 % di bismuto lasciata solidificare nelle condizioni ordinarie di raffreddamento; la fig. 4 rappresenta invece la struttura della stessa lega esposta dieci giorni a una temperatura di 320°-330°. Nel primo caso si vedono nella lega due costituenti, i cristalli misti chiari ricchi di antimonio, e i cristalli misti oscuri ricchi di bismuto; nel secondo caso invece uno dei componenti è quasi completamente scomparso, e la lega risulta quasi tutta costituita da una sola soluzione solida.

Queste esperienze perciò portano a concludere che antimonio e bismuto formano una serie continua di cristalli misti, e che quindi con una sufficiente lentezza di raffreddamento sparirebbero nel diagramma di H. e T. gli arresti alla temperatura di fusione del bismuto.

Più complicato dei due diagrammi sopra ricordati è quello delle leghe di rame e antimonio. Queste sono state studiate da Le Chatelier [1], Charpy [2], Stead [3], e Baikow [4], il quale ultimo ne ha descritto il diagramma di stato. Però il diagramma del Baikow non è completo; mancano in esso alcune indicazioni che sono fra quelle che maggiormente interessano nel caso nostro. Le esperienze di detto autore si estendono da leghe al 90 % fino a leghe al 30 % di antimonio: egli ha lasciato indeciso se Sb si separa puro lungo AB (fig. 5) e quindi l'orizzontale eutettica si prolunga fino ad

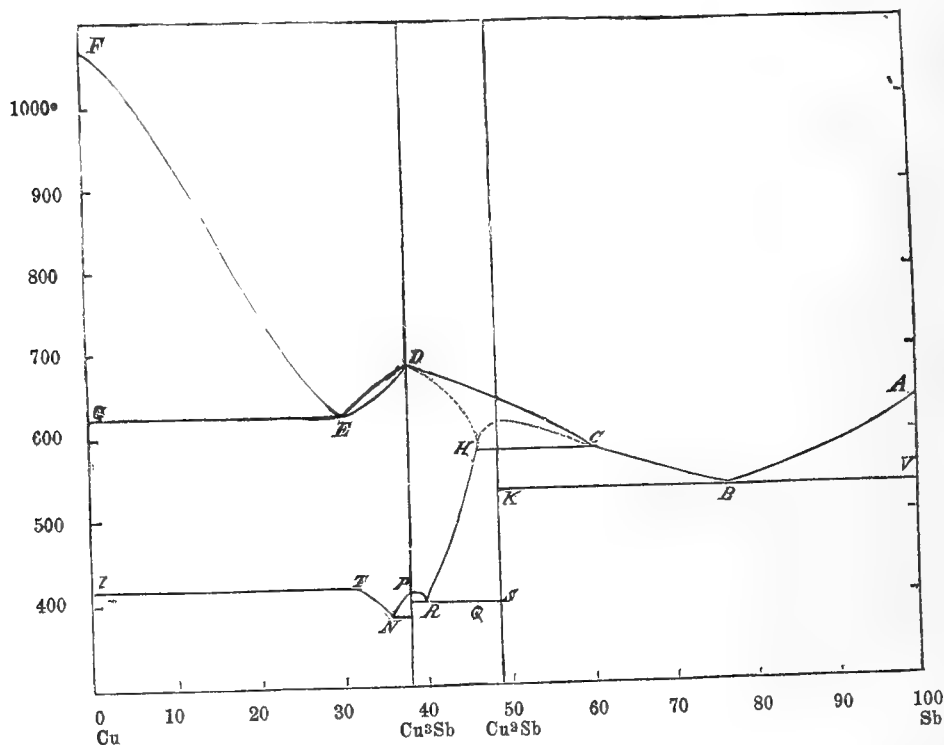



Fig. 5.

incontrare la composizione dell'Sb puro, come anche se Cu si separa puro lungo FE e quindi anche l'altro eutettico si annulla al Cu puro. Egli perciò ha soltanto tratteggiate nel suo diagramma queste due orizzontali eutettiche.

Era quindi interessante per noi il decidere se l'antimonio e il rame cristallizzano puri o sotto forma di cristalli misti, perchè in quest'ultima eventualità avremmo dovuto prendere in considerazione anche la possibilità di formazione di cristalli misti ternarî di rame, antimonio e bismuto.

Nel diagramma del Baikow manca pure la curva che dà la composizione delle soluzioni solide in equilibrio con le leghe fuse lungo la DE.

(1) C. R., *120*, 835.
(2) C. R., *124*, 957.
(3) J. Soc. Chem. Ind., *17*, 1111.
(4) Giornale della Soc. russa di chim.-fisica, *36*, 111.

Bornemann [1] ha cercato di completare il diagramma di Baikow utilizzando alcune esperienze di Hiorns [2]; ma questi ha determinato solo i punti iniziali di solidificazione delle leghe, in maniera che anche il diagramma che dà il Bornemann presenta le stesse incertezze di quello del Baikow.

Abbiamo perciò determinate le curve di raffreddamento di alcune leghe per colmare queste lacune.

Le esperienze in queste leghe binarie, come pure in tutte le ternarie di cui parleremo in seguito, sono state sempre fatte allo stesso modo. Si pesava sempre uno stesso peso, 50 grammi, di miscuglio dei metalli, e questo veniva fuso in crogiuolo di porcellana sotto un abbondante strato di carbone per evitare ogni ossidazione. L'operazione si faceva in un forno elettrico a resistenza di nichel. Per la lettura delle temperature sul galvanometro Siemens, si adoperò una pinza termoelettrica Pt, Pt Rh di 0.2 mm. di diametro, i capi liberi della quale erano tenuti nel ghiaccio. Le letture si facevano di 15 in 15 secondi.

Le indicazioni del galvanometro sono state corrette determinando i punti di fusione di Cu (1084°), Ag (961°), Sb (630°), Bi (269°).

I metalli adoperati erano della casa Kahlbaum.

Riportiamo qui i risultati delle nostre esperienze:

N. d'ordine delle leghe	Composizione in per cento in peso		Temp. di inizio di solidificazione	Temp. di arresto eutettico	Tempi di fermata eutettica
	Cu	Sb			
12	6,14	93,86	577°	528°	150″
13	3,07	96,93	596	528	100
14	1,54	98,46	604	526	60

N. d'ordine delle leghe	Composizione in per cento in peso		Temp. di inizio di solidificazione	Temper. della fine della solidificazione	Temp. di arresto eutettico	Tempi di fermata eutettica	Temp. di trasformazione
	Cu	Sb					
14*a*	62	38	670°	664°	—	—	405°
15	66	34	640	630°	—	—	400
16	68	32	630	—	—	—	420
17	80	20	830	—	620°	140″	420
18	90	10	993	—	622	80	420
19	94	6	1010	—	622	40	—

[1] Metall. *6* 327 (1909).
[2] J. Soc. Chem. Ind. *25* 616 (1906).

Questi dati ci permettono di completare il diagramma del Baikow, il quale viene così ad assumere l'aspetto della fig. 5.

L'orizzontale eutettica KB si prolunga sino a V all'antimonio, e l'orizzontale EG sino al rame, almeno praticamente per quel che può a noi interessare nel caso presente.

La fig. 6 riproduce la fotografia di una lega al 98,46 % di antimonio attaccata con acqua regia diluita. Si vedono nettamente i cristalli primarî di antimonio accanto all'eutettico $Sb + Cu_2Sb$. Anche i due componenti dell'eutettico sono messi bene in evidenza: i cristalli oscuri di Cu_2Sb e quelli chiari di Sb. Dai tempi di fermata eutettica delle leghe al 94, 97 e 98,46 % di antimonio si ricava per interpolazione che l'orizzontale eutettica va a finire all'antimonio.

Fig. 6.

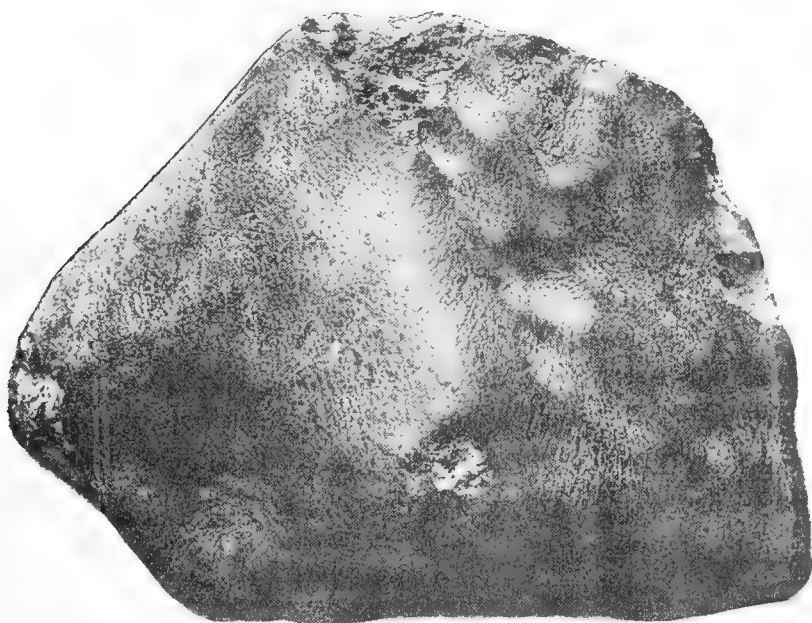
Anche dalla parte del rame dai tempi di arresto eutettico si ricava per interpolazione che la fermata si annulla all'incirca in corrispondenza del rame [1].

Ora, sebbene da misure di conducibilità sia stato dedotto [2] che Cu scioglie Sb allo stato solido, lo Stead (loc. cit.), che ha cercato di stabilire fino a che concentrazione è possibile la formazione di soluzione solida, ha trovato che solo ad una concentrazione del 0,2 % di antimonio la massima parte di questo si separa sotto forma di soluzione solida. Nel caso nostro perciò noi possiamo assumere senz'altro come fasi solide separantisi lungo AB e lungo EF rispettivamente antimonio puro e rame puro, perchè la capacità dell'antimonio ad assumere rame in soluzione solida nell'un caso, e quella del rame ad assumere antimonio nell'altro, pur esistendo, sono certo molto limitate, ed esse non influiscono essenzialmente sulle discussioni che passeremo a fare nelle note successive.

(1) Microfotografie di questo campo sono state pubblicate da Stead (loc. cit.), e da Hiorns (loc. cit.).

(2) Gürtler, Z. f. An. Ch. *51* 396 (1906).

Mineralogia. — *Studio microscopico della meteorite caduta a Vigarano Pieve, presso Ferrara, nel gennaio 1910* (1). Nota di Aristide Rosati, presentata dal Socio G. Struever.

Come annunciarono i giornali politici, il 22 gennaio 1910 cadde a Vigarano Pieve, presso Ferrara, una grande meteorite del peso di circa kg. $11\frac{1}{2}$. Nel marzo dello stesso anno, essendo a Ferrara, ebbi curiosità di vedere la pietra meteorica, che era depositata nell'ufficio municipale di Vigarano Mainarda, e per la cortesia del segretario comunale sig. Ugo Martini potei

Fotografia della meteorite
eseguita per cura del sig. Martini — $\frac{1}{3}$ della grandezza naturale.

fare su di essa le prime osservazioni riguardanti i caratteri esterni, che qui brevemente riassumo.

La sua forma irregolare, piena d'incavi, limitata da sei facce, tre alquanto estese in forma di quadrilatero, tre più piccole all'incirca triangolari, è approssimativamente simile ad un cuneo alto cm. $17\frac{1}{2}$, largo cm. $18\frac{1}{2}$ e lungo cm. 20, se si assume per base la faccia di maggiore sviluppo, che è quasi quadrata. Alla superficie presenta una crosta di fusione nera con molti punti ovoidali di 2 mm. di diametro in media e di colore nero lucido, nell'interno una materia litoidea di aspetto porfirico, in cui la massa fondamentale di

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Roma.

color grigio cenere scuro è gremita di elementi biancastri sferoidali del diametro medio di 2-3 mm. Si hanno quindi tutti i caratteri propri delle pietre meteoriche, che è sempre possibile distinguere con sicurezza dalle rocce telluriche, e risulta inoltre che la meteorite di Vigarano Pieve appartiene alla specie più comune, detta *condrite* per le numerose sferette o *condri*, da cui è costituita.

Il sig. Martini, che qui pubblicamente ringrazio, volle donarmi alcuni piccoli frammenti della meteorite, sui quali ho in gran parte eseguito lo studio microscopico, che forma oggetto della presente Nota. Altri frammenti della stessa pietra ebbe il prof. Strüver, e sono conservati nella ricca collezione delle meteoriti, che fa parte del Museo di Mineralogia dell'Università di Roma, salvo uno che la cortesia del prof. Strüver mi permise di utilizzare per i miei studî. Infine sono grato al prof. Roccella dell' Università di Ferrara, che mi diede nuovo materiale, tra cui un condro isolato di speciale interesse.

Per quanto riguarda la caduta della meteorite, il sig. Martini mi comunicò le notizie che qui testualmente riproduco.

« La notte del 22 gennaio 1910 alle ore 21 ½ la famiglia Bovini, che « abita nella casa del fondo Saracca, di proprietà del sig. Michele Cariani in « Vigarano Pieve, frazione del comune di Vigarano Mainarda (Ferrara), fu « svegliata da una forte detonazione somigliante allo scoppio di un mortaio. « La notte era burrascosa, nevicava e poche donne stavano in cucina, filando; « queste asserirono che contemporaneamente allo scoppio udito si vide un « lampo. Impaurite chiamarono gli uomini che dormivano, i quali si diedero « tosto a fare ricerche nei pressi della casa con lanterne. A tre metri di « distanza a sud-est della casa stessa, sul terreno leggermente coperto di « neve scorsero una macchia e verificarono subito che si trattava di un'aper- « tura recente. Naturalmente affondarono in essa un badile, ed incontrato « un masso solido e freddo lo estrassero ».

I frammenti della meteorite, osservati con una lente d'ingrandimento, fanno riconoscere alcune granulazioni a splendore metallico e colore tra il giallo pirite e il rosso rame di *pirrotite* (*troilite*?), e due minerali di splendore vitreo, l'uno biancastro o grigio cenere sfaldabile, l'altro giallo-verdastro a frattura concoide con aspetto di *olivina*. Essi sono facilmente disgregabili, e con ciò dimostrano di avere la struttura di una comune roccia tufacea, da cui però si distinguono per la loro maggiore durezza.

Comparando la condrite di Vigarano Pieve con quelle della collezione di Roma, si nota una spiccata rassomiglianza nei caratteri esterni con la pietra meteorica caduta a Renazzo presso Cento (Ferrara) nel 1824. Infatti, anche la condrite di Renazzo ha una massa fondamentale nera, che racchiude con evidente disposizione porfirica molte sferette di minerali a colore biancastro.

Al microscopio si vede anzitutto che la meteorite è composta di una sostanza fondamentale prevalentemente opaca e di color nero, in cui sono confusamente disseminati elementi condritici, per lo più trasparenti e incolori, di forme variabili e spesso non bene determinate, ma sempre tendenti ad assumere un aspetto più o meno globulare.

Osservando a luce riflessa i minerali opachi della sostanza fondamentale, si distinguono molte granulazioni metalliche, alcune di colore grigio acciaio, raccolte in piccoli globuli o distese in lamine dai contorni più o meno sinuosi, e dovute al *ferro* abbondantemente diffuso in quasi tutte le meteoriti, altre dai riflessi giallo-bruni, spesso commiste alle prime e anch'esse molto frequenti, riferibili alla *pirrotite* già riconosciuta macroscopicamente. Ad esse si aggiunge un terzo elemento opaco, a struttura finamente granulare, che spesso avvolge e compenetra gli altri minerali, e guardato per riflessione non presenta alcun carattere di sostanza metallica, ma ha tutto l'aspetto di un *materiale carbonioso*. La combustione di un frammento della meteorite con cromato di piombo, che trattiene lo solfo della pirrotite, produce sviluppo di anidride carbonica,e quindi conferma la mia ipotesi. Fra i minerali trasparenti racchiusi nel materiale nero predominante, e che hanno sempre forme granulari o frammentarie, ho notato: *pirosseno trimetrico della serie enstatite-bronzite, olivina, augite, vetro di colore violaceo pallidissimo o quasi incoloro* (molto raro), e più frequentemente *vetro bruno, plagioclasio* in sferette o in aggregati granulari, ad estinzione ondulosa e talora geminato secondo la legge dell'albite, ed infine elementi incolori, limpidi, a contorni angolosi e debolissima birifrazione, che a luce ordinaria hanno aspetto di plagioclasio e non sono bene determinabili, ma forse rappresentano forme di transizione dal plagioclasio alla maskelinite.

Nelle formazioni condritiche sono soprattutto diffusi *olivina* e *pirosseno trimetrico della serie enstatite-bronzite;* in minor quantità compaiono *ferro, pirrotite, cromite, materiale carbonioso, augite, plagioclasio, vetro.*

L'*olivina* si distingue per il notevole rilievo, la rugosità della superficie, la mancanza di sfaldatura distinta ed i vivaci colori d'interferenza. È sempre trasparentissima e incolora, e comunemente ha forme rotondate o poligonali, percorse da numerose fratture, sulle quali, come al contorno, è in alcuni casi presente una colorazione giallognola per deposito di ossidi di ferro. In essa sono molto frequenti minutissime inclusioni ovoidali di vetro bruno talora provviste di libella.

Anche il *pirosseno trimetrico* è incoloro, quantunque tenda ad assumere una tinta grigia, ma si distingue dall'olivina per una minore rifrazione, per essere spesso fibroso e provvisto di sottili linee di sfaldatura parallele a c, che in generale è la direzione d'allungamento dei cristalli, per il colore di interferenza grigio acciaio. Tuttavia in alcuni casi, ad esempio nelle forme granulari, dove tali caratteri non sono evidenti, la distinzione è difficile.

Esso d'ordinario assume forme irregolari, frammentarie, più raramente quelle di lunghi prismi, presenta spesso numerose fratture, e talora inclusioni vetrose brune ed estinzione ondulosa. I suoi caratteri sono quelli di un pirosseno della serie *enstatite-bronzite*; ma la distinzione tra enstatite e bronzite, che al microscopio hanno proprietà ottiche uguali, non è possibile, e si fonda unicamente sulla quantità di ferro contenuta nel minerale. Tuttavia, secondo Tschermak [1], sono minerali caratteristici delle condriti ferro, olivina e bronzite.

L'*augite* in sezioni alquanto spesse ha un colore giallo-bruno pallido, in sezioni molto sottili è quasi del tutto incolora e simile al pirosseno trimetrico. Generalmente presenta una geminazione polisintetica, che a nicol incrociati le dà aspetto di plagioclasio, si sviluppa in cristalli allungati, secondo *c*, talora quasi idiomorfi, ed è provvista di sottili e regolarissime linee di sfaldatura, che seguono la direzione di allungamento e quella dei piani di geminazione. È invece molto rara in cristalli prismatici non geminati e che in sezione hanno forma rettangolare. Nelle sue fratture talvolta si osserva una colorazione giallognola dovuta ad ossidi di ferro.

Alcune granulazioni trasparenti, a forte rilievo, di color rosso-bruno cupo, e forse anche altre nere opache, debbono riferirsi a *cromite*, che è un minerale accessorio quasi costante nelle condriti. È poi probabile che la cromite si trovi anche nella massa fondamentale, dove essendo frammista ai minerali opachi predominanti non è facile distinguerla.

La forma e le dimensioni dei condri sono molto variabili. Oltre i condri globulari tipici si hanno condri deformati, ovoidali, lobati o del tutto irregolari, e circa le dimensioni dai condri visibili solo al microscopio si passa per varie gradazioni a quelli macroscopici, che, come ho notato, in media raggiungono 2-3 mm. di diametro. La linea di separazione tra i condri e la massa fondamentale, che spesso penetra nei primi, è ordinariamente confusa. In casi alquanto rari nel condro si distingue un nucleo ed una zona esterna, che sono tra loro diversi per i minerali contenuti e per la struttura. Oltre i condri interi si osservano anche frammenti di condri (*Chondrensplittern* di Tschermak).

Riguardo alla natura mineralogica dei condri, si distinguono diverse formazioni. In alcune si ha un' intima miscela di olivina e pirosseno trimetrico di forme granulari, a verghetta, o poligonali, disposte in guisa da determinare una specie di caratteristico mosaico, con sviluppo quasi uguale dei due minerali, e talora con struttura porfirica per le maggiori dimensioni di alcuni cristalli di olivina. In altre il condro è essenzialmente costituito di olivina o di pirosseno trimetrico, potendosi così distinguere condri olivinici e condri di pirosseno trimetrico. Essi sono quasi sempre polisomatici,

[1] G. Tschermak, *Die mikroskopische Beschaffenheit der Meteoriten erlaütert durch photographische Abbildungen*. Stuttgart, 1885.

cioè risultano dall'unione di molti individui della stessa specie; solo fra i condri olivinici si ha qualche esempio di sviluppo monosomatico. I condri di pirosseno trimetrico talvolta manifestano una caratteristica struttura fibrosa, i condri olivinici formazioni nucleate con rivestimento esterno di pirosseno trimetrico, o in cui il nucleo è rappresentato da un grande cristallo di olivina ovvero da lamelle di olivina disposte parallelamente e separate da interposizioni vetrose brune, e la zona periferica da un' intima miscela con disposizione a mosaico di olivina e pirosseno trimetrico. Nei tre casi ora considerati ai minerali essenziali si aggiungono in quantità variabilissime ferro, pirrotite, materiale carbonioso, cromite, augite, plagioclasio granulare, vetro bruno. Meno frequenti sono i condri vetrosi, che in massima parte risultano di vetro granuloso bruno o colorato in violaceo pallidissimo, e ordinariamente presentano numerosi prodotti brifrangenti di devetrificazione. Alcuni condri in cui è penetrata una quantità rilevante della massa fondamentale sono colorati in nero, e si chiamano per ciò condri neri (*Schwarze Chondren* di Tschermak); oltre i noti minerali opachi essi contengono molte granulazioni trasparenti di olivina e pirosseno trimetrico. Infine ho notato formazioni eccezionali, in cui prevale l'augite, e i condri finamente granulari, lobati, che in sezione appaiono torbidi simili a feltro, e che, secondo Tschermak [1], sono caratteristici delle condriti carboniose e probabilmente risultano di olivina. Il condro isolato, durissimo, che ebbi dal prof. Roccella, ha la forma di una sferetta del diametro di 5 mm., ricoperta da un'incrostazione nera di sostanza carboniosa, ferro e pirrotite; il nucleo, che è essenzialmente costituito di olivina in grandi forme poligonali, presenta, oltre i minerali opachi e il pirosseno trimetrico, caratteristici cristalli di augite.

Conformemente a ciò che fu riconosciuto nei caratteri esterni, la struttura della meteorite, studiata microscopicamente, è cataclastica, tufacea. La sua densità a 18° C. è di 3,21. Dalle tavole di Tschermak si rileva infine che oltre l'aspetto esterno anche la sua costituzione microscopica è in generale analoga a quella della meteorite di Renazzo, in cui per la diffusione del materiale carbonioso nella massa fondamentale si ha un esempio tipico di condrite carboniosa.

Concludendo, dalle osservazioni fatte nelle mie sezioni sottili e nei pochi frammenti di cui potei disporre, risulta che la meteorite di Vigarano Pieve è una *condrite carboniosa di struttura tufacea*, simile a quella di Renazzo caduta nel 1824. In essa sono minerali essenziali: *olivina* e *pirosseno trimetrico*, frequentissimi: *ferro* e *pirrotite*, accessorî: *cromite*, *plagioclasio*, *vetro*, *augite*, *materiale carbonioso*. I condri sono di sei specie:

1. condri di olivina e pirosseno trimetrico;

2. condri neri (olivina, pirosseno trimetrico, minerali opachi della massa fondamentale);

[1] Op. cit.

3. condri vetrosi;
4. condri olivinici;
5. condri di pirosseno trimetrico;
6. condri augitici.

Nei minerali è notevole la presenza di numerose forme frammentarie e linee di frattura, che accennano a fenomeni di dinamometamorfismo (Rénard) (1) o a rapidi cambiamenti di temperatura (Tschermak) (2).

Fotografia della sezione sottile. Condri di olivina e pirosseno trimetrico, condro nero. Luce ordinaria. Ingr. 65.

Il prof. F. Calzolari dell'Università di Ferrara ha già cominciato l'analisi chimica della meteorite, che sarà oggetto di una sua prossima pubblicazione.

(1) A. F. Rénard, *Recherches sur le mode de formation des météorites pierreuses* (Bull. soc. belge de géologie, 1897); *Recherches sur le mode de structure des météorites chondritiques. Université des phénomènes du metamorphisme méchanique* (Bull. de l'Acad. royale de Belgique, 1899).

(2) Op. cit.

Viticoltura. — *La vegetazione invernale delle viti a Catania.* Nota di F. A. SANNINO, presentata dal Socio G. CUBONI.

A metà di dicembre dello scorso anno, arrivando a Catania, fui colpito dalla persistenza delle foglie sulle viti nostrane.

Il fenomeno non è dovuto ai sali di rame, perchè la poltiglia bordolese non viene adoperata. Devesi invece alla mitezza del clima, specialmente sui fianchi dell'Etna, dove nella zona bassa le brinate sono quasi ignote. E anche ora (16 gennaio 1910) non mancano viti con le foglie dal colore giallo caratteristico che prendono in autunno. Ma si trova ancora una certa quantità di clorofilla, che è causa del prolungarsi della funzione di assimilazione. A questa certamente è favorevole il cielo sereno, la viva luce solare e l'alta temperatura dell'aria, che qui raggiunge d'inverno anche il massimo di 20 centigradi; ed è noto, per le esperienze del prof. Cuboni [1], che tale funzione aveva luogo a Conegliano in novembre anche con la temperatura di 8 centigradi.

Questo prolungarsi della funzione clorofillica delle foglie di viti deve riuscire di non poca utilità alla buona maturazione del legno, e conferma la spiegazione data dal Müntz della fertilità delle viti dei paesi caldi ed asciutti coltivati in terreni mai o scarsamente concimati.

D'altra parte non compromette la normale vegetazione della vite, non essendo soppresso il periodo di riposo necessario alla fruttificazione regolare. Le foglie, infatti, cadono più tardi per effetto del vento che le dissecca lentamente, mentre nei paesi freddi il disseccamento che ne accompagna la caduta è causato dal gelo.

Ad ogni modo la potatura secca anticipata permette al coltivatore di assegnare al periodo di riposo della vite l'indispensabile durata..

A Catania la vegetazione invernale delle viti si può manifestare in altro modo.

Una vigna fillosserata, che nel terreno lavico dell'Etna soffre il secco durante l'estate, presentava a metà di dicembre lo sviluppo anticipato di qualche germoglio verso l'estremità dei tralci interi di viti non ancora sottoposte al lavoro della potatura secca o legnosa, mentre le foglie vecchie erano cadute molto per tempo.

Lo sviluppo di questi germogli si è iniziato verso la fine di novembre, ed in certe annate di maggiore secchezza, comincia pure verso la fine di

[1] G. Cuboni. *Ricerche sulla formazione dell'amido nelle foglie della vite.* Rivista di viticultura ed enologia italiana. Anno IX, Conegliano 1885, pagg. 3 e 33.

ottobre. Ai primi di gennaio, dopo circa un mese, molti di essi avevano raggiunto circa 20 cm. di lunghezza, con 5 foglioline completamente aperte. Qualche germoglio nato verso la metà del tralcio portava grappoli.

Questi germogli indubbiamente si sviluppano a spesa dei materiali di riserva accumulati nel legno, e se in luogo di uno solo per vite se ne sviluppassero molti, la pianta s'indebolirebbe.

Ma seguitando ad accrescersi, arrivano a compiere la funzione clorofillica. La *prova dell'iodio* (1), ideata dal Sachs e sperimentata dal Cuboni a Conegliano, mi ha dato, alla fine di dicembre, risultati positivi con le foglie più adulte di germogli lunghi 20 cm. e della età di circa un mese. Si noti però che la prova dell'iodio non è stata del tutto conforme a quella che ha luogo nel periodo normale della vegetazione delle viti, perchè la foglia trattata con la tintura di iodio non si è decolorata quando si è fatta bollire con l'acqua. Soltanto in una delle prove fatte si è avuto a caldo scoloramento totale, e nuova colorazione, col raffreddamento, solo in qualche parte della lamina fogliare.

Questa vegetazione anticipata della vite durante l'inverno — la quale nei primi periodi è causa di consumo di materiali di riserva — si può, al solito, evitare mediante la potatura secca anticipata, che fa cadere quel tratto di tralcio su cui di regola si sviluppa il germoglio anticipato.

Un'altra osservazione ha permesso di fare la vegetazione invernale delle viti relativamente allo sviluppo della peronospora.

Il 6 gennaio 1910 in contrada Nitta, al confine tra le così dette *Terre forti* e la *Piana* di Catania nel R. vigneto sperimentale per la coltivazione degl'ibridi produttori diretti, ho trovato in vegetazione uno degl'ibridi del Malègue, il 55-27. Su di un germoglio della solita lunghezza di 25 cm. circa, la 2ª foglia, a partire dalla base, aveva metà della lamina con un colore giallognolo dell'apparenza delle foglie peronosporate. Raccolta la foglia pregai il dott. Scalia, professore di botanica e di patologia vegetale nella R. Scuola enologica di Catania, di metterla in camera umida per vedere se si trattava proprio di peronospora. Ed infatti dopo pochi giorni sulla pagina inferiore comparve la caratteristica efflorescenza bianca, che si vede nelle infezioni autunnali sulle foglie non trattate con poltiglia bordolese.

La mitezza del clima della bassa regione dell'Etna, che rende possibile in pien'aria il germogliamento anticipato delle viti e finanche lo sviluppo della peronospora, dimostra la possibilità di una produzione molto anticipata di uve precoci mediante le serre *fredde* o *temperate* molto economiche e già in uso nella zona marittima della Provenza, ma ignote ai viticultori di Sicilia e di altre zone marittime bagnate dal Mediterraneo.

(1) G. Cuboni, lav. cit. pag. 5.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Blaserna ricorda con rammarico le perdite subite dall'Accademia nella persona dei seguenti Soci:

Senatore prof. Stanislao Cannizzaro, Socio nazionale, morto il 10 maggio 1910; apparteneva all'Accademia per la Chimica sino dal 6 aprile 1873;

Prof. E. van Beneden, mancato ai vivi il 28 aprile 1910; apparteneva il defunto Socio straniero all'Accademia, per la Zoologia e Morfologia, sino dal 9 agosto 1899;

Prof. Guglielmo Huggins, morto il 13 maggio 1910; faceva parte il defunto Socio straniero dell'Accademia, per l'Astronomia, sin dal 26 luglio 1883.

Lo stesso Presidente aggiunge che dei Soci predetti sarà fatta la commemorazione nel prossimo anno accademico.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Grassi richiama l'attenzione dei Colleghi sulle pubblicazioni del Socio Righi: *Sulla ionizzazione dell'aria; Sulla traiettoria percorsa da un elettrone attorno ad un ione del campo magnetico;* Di Stefano: *Cenno storico sullo sviluppo degli studii geologici in Sicilia*; Pickering: *The future of Astronomy.*

INDICE DEL VOLUME XIX, SERIE 5ª. — RENDICONTI

1910 — 1° Semestre.

INDICE PER AUTORI

A

B

C

D

F

G

H

K

L

M

V

Z

INDICE PER MATERIE

A

B

C

G

ERRATA CORRIGE

A pag. 50, riga 9 a f. invece di *1827* legg. *1877*.

A pag. 79, alla frase contenuta nelle righe 2-3-4 a f.: « si potrebbe addirittura supporre $U = 0$, giacchè il caso dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa sono nulle » — si sostituisca la frase seguente: « Il caso generale dell'esistenza di forze di massa qualunque, si può facilmente ridurre a quello in cui le forze di massa derivano da un potenziale ».

A pag. 443 linea 1ª, invece di: « *Se il corpo ruota intorno* ecc. » legg.: *Se il corpo ruota con velocità angolare costante intorno* ecc. ».

E. M.

Publicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei, Tomo I-XXIII.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76). Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. IV. V. VI. VII. VIII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I-VIII. (1876-84).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. (1, 2). — II. (1, 2). — III-XIX.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XIII.

Serie 4ª — RENDICONTI Vol. I-VII. (1884-91).
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* Vol. I-VII.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-X.

Serie 5ª — RENDICONTI *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-XIX. (1892-1910). 1º Sem. Fasc. 12º.
RENDICONTI *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XVIII. (1892-1910). Fasc. 1º-2º.
MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I-VIII. Fasc. 5º.
MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.* Vol. I-XII.

CONDIZIONI DI ASSOCIAZIONE

AI RENDICONTI DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

I Rendiconti della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia dei Lincei si pubblicano due volte al mese. Essi formano due volumi all'anno, corrispondenti ognuno ad un semestre.

Il prezzo di associazione per ogni volume e per tutta 'Italia di L. 10; per gli altri paesi le spese di posta in più.

Le associazioni si ricevono esclusivamente dai seguenti ditori-librai:

ERMANNO LOESCHER & C.º — ***Roma, Torino*** e ***Firenze.***

ULRICO HOEPLI. — ***Milano, Pisa*** e ***Napoli.***

RENDICONTI — Giugno 1910.

INDICE

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 giugno 1910.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

PERSONALE ACCADEMICO

PRESENTAZIONE DI LIBRI

(*) Questa Nota verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

E. Mancini *Segretario d'ufficio, responsabile.*

Abbonamento postale.